大韓數學敎育學會 論文集 第 8 卷 第 2 號
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
Vol. Ⅷ, No.2, 527-540. December 1998

음의 횟수에 관한 개념 정의 및 학습화전략

김 명 운*

1. 서론

Descartes(1596-1650)가 음수를 직선 위에 나타내기 훨씬 전인 기원 전 수 세기쯤부터 인도나 중국에서는 음수를 알고 있었다. 인도에서는 음수가 '부채(빚)'로 쓰였고, 중국에서는 빨갛게 물들인 산대(계산에 쓰이는 막대)로 이것을 나타내었다. 16세기의 수학자들은 '가짜'의 수 또는 '인위적으로 만들어진 수'라고 생각하기도 하였으나, 음수가 온도, 해발고도, 동서의 방향 등 실제 여러 가지에서 적용될 수 있었다. 물론 음수의 탄생이 뺄셈의 문제점을 해결한 공로는 말할 것도 없다. 수란 물건의 다·소, 대·소, 위치, 순서 등을 나타내기 위한 목적에서 생긴 자연수, 정수, 유리수, 실수, 복소수 등의 총칭이다.

수를 횟수의 측면에서 살펴보면 1번, 2번, 3번, ··· 하는 자연수적 횟수를 생각할 수 있다. 그러면 음의 정수의 횟수 즉, -1번, -2번, -3번, ··· 등은 생각할 수 없는 것인가! 만약 '음의 횟수'를 사용할 수 있는 실제의 현상이 있다면 '음의 횟수'의 존재는 인정받을 수 있을 것이다.

횟수가 수학에서 사용되는 예로 곱셈과 거듭제곱을 들 수 있다. 곱셈의 (피승수)×(승수)에서 피승수는 양(量)을 의미하고 승수는 더해지는 횟수를 의미한다. 그래서 곱셈의 정의가 일반적으로 동수누가(同數累加)로 해석된다. 즉, 3×4에서 3만큼의 양을 4번 더하는 것이 된다는 것이다. 그러나 (음수)×(음수)에서 승수가 음일 때, '음의 횟수'에 대한 인식이 되지 않아 해석이 곤란해져, 곱셈의 정의는 무시되고 많은 수학자들은 다른 측면에서의 해석을 시도했다. 인도인들의 생각을 빌어서 '빚'에 '빚'을 곱하면 '재산'이 된다는 생각, '손해'에 '손해'를 곱하면 '이익'이 된다는 생각 등이 그것이다. 그러나 이해가 되지 않는 논리이다.

또 '같은 부호의 두 수를 곱하면 양수가 된다. 이것은 정의이다.'라는 논리를 펴고 있다. 물론 정의로 정해 놓고 그 정의에 따른 여러 가지 계산에서 모순이 없고, 적용되는 수많은 실례가 있다면 그 정의를 인정할 수도 있지 않느냐는 주장에 이해는 간다.

16세기 로마의 수학 교수인 Clavius(1537-1612)는 "플러스 마이너스의 곱셈 법칙을 설명하려고 하지 말자. 이것이 진리라고 이해하지 못하는 것은 인간의 능력이 부족해서이다. 그러나 이 법칙이 정확하다는 것은 의심의 여지가 없고 수많은 실례가 있지 않은가!"라고 말했다 김용운 · 김용국(1990). 김용운 등(1990)도 (부채)×(부채)가 어떤 의미가 있는 지에 대한 바른 설명을 할 수 없다고 했다. 이는 '음의 횟수'의 존재를 인식하지 못한 결과로 '음의 횟수'만

* 부산교육대학 강사

이해되면 풀어지는 과제인 것이다.

거듭제곱에서도 횟수는 사용된다. a^b은 a를 b번 곱한다는 것으로 지수인 b는 a라는 밑을 b번 곱하라는 횟수의 의미인 것이다. 따라서 3^4은 3을 4번 곱하는 것이 된다. 그러나 여기서도 '음의 횟수'는 등장한다. 3^{-4}의 경우 3을 -4번 곱해야 된다는 문제가 나온다. 이 경우 역시 '음의 횟수'에 대한 고려가 되지 않으므로 $a^m \div a^n = a^{m-n}$이라는 지수법칙을 적용하여 3^{-4}을 우회적인 방법인

$$3^2 \div 3^6 = \frac{3^2}{3^6} = \frac{1}{3^4}$$

으로 설명하고 있을 뿐이다.

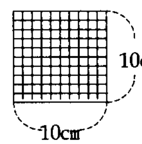
본 연구는 횟수를 다루는 곱셈과 거듭제곱에서 기존 사고의 문제점을 지적하고 '음의 횟수'를 정의함으로써 기존의 문제점을 제거하고 학생들이 보다 쉽게 접근하고 이해할 수 있도록 도와주기 위한 것으로 '음의 횟수'가 무엇이며, 어떻게 정의해야 하는지, 어떻게 처리하여 적용하여야 할 지에 관한 것이다. 이 과정에서 곱셈과 거듭제곱의 정의도 수정되며, '덧셈·뺄셈의 시초수'와 '곱셈·나눗셈의 시초수'라는 새로운 개념이 도입이 된다.

현재의 교육과정은 초등학교 6학년 2학기에 음의 정수의 개념이 도입되어 지도되고 있고, '음의 횟수'의 관한 내용이 처음으로 등장하는 것은 중학교 1학년 단계에서 (음수)×(음수)단계에서이다. 그러면 수학교과서에서도 도입되지 못한 '음의 횟수'에 관한 내용을 13세 또는 14세의 학생들에게 어떻게 지도하여야 할 것인가에 대한 것도 연구해 볼 필요가 있을 것이다. 잘못 접근하면 너무 추상적이 되어 학생들의 혼란만 가중시킬 것이므로 (음수)×(음수)의 학습에 Bruner의 EIS(enactive, iconic, symbolic representation)이론을 수정·보완한 ERS(enactive, relational, symbolic representation)학습 이론에 따른 3단계의 지도 전략을 제시하여 학생들의 음의 횟수에 관한 보다 쉬운 이해를 도모하고자 한다.

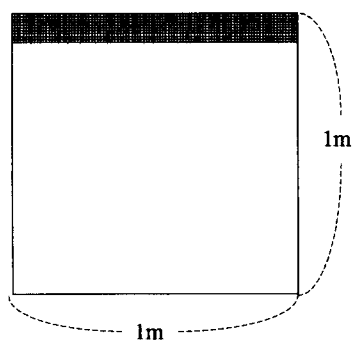
2. 곱셈에 대한 오용

(1) 곱셈에 대한 잘못된 이해

한 교사가 $1\,m^2 = 10000\,cm^2$ 라는 사실을 아동들에게 설명을 하려고 한다. 그 교사는 아동들에게 눈으로 직접 확인시켜 주는 것이 좋겠다고 생각하였다. 그런데 한 변이 1m인 정사각형 안에 10000개의 $1cm^2$의 넓이를 가진 정사각형을 붙이는 일은 쉽지 않았다. 그래서 그는 <그림 1>에서와 같이 한 변이 10 cm인 정사각형 안에 $1cm^2$의 넓이를 가진 정사각형이 100개가 있음을 보여주고, <그림 2>와 같이 한 변이 1 m인 정사각형의 가로로 그런 사각형을 10개를 붙이며 가로에는 $1cm^2$가 몇 개가 들어있느냐고 질문을 했다.

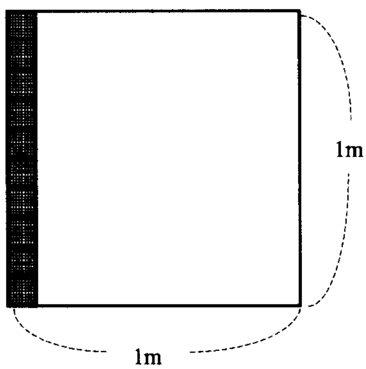


<그림 1>



<그림 2>

아동들은 100 $cm^2 \times 10$의 계산을 하여 1000개가 있다고 대답했다. 그 교사는 같은 방법으로 <그림 3>과 같이 이번에는 세로로 한 변의 길이가 10 cm인 정사각형 10개를 붙이고, 세로에는 1 cm^2가 몇 개 있느냐고 물었다. 마찬가지로 아동들은 1000개가 있다고 대답을 했다. 그러자 교사는 주저없이 "자, 그러면 한 변의 길이가 1 m인 정사각형 안에는 1cm^2가 모두 몇 개가 있나요?" 라고 물었다. 아동들은 가로에 1000개, 세로에 1000개 이므로 $1000\times1000=1000000$의 계산을 하여 1000000개가 있다고 대답을 했다.



<그림 3>

위와 같은 어리석은 수업이 있을 수 있겠느냐고 반박할 지 모르나, 실제로 본인이 예비교사의 교생실습 과정에서 직접 목격하였던 수업이다. 그러면 위의 수업에서 무엇이 잘못되었을까? (직사각형의 넓이) = (가로)×(세로)이므로 가로가 1000, 세로가 1000이니 넓이가 1000000이 된 것이 얼핏 보기에는 맞는 것 같기도 하다. 그러나 1 m^2 = 10000 cm^2라는 진리를 생각해 보면 뭔가가 문제가 있는 것은 분명하다.

교육부 편찬 초등학교 4학년 수학과 교사용지도서에 따르면 직사각형의 넓이를 구하는 공식을 무조건 암기하는 것은 지양하고 그 공식이 유도되는 과정을 학생들에게 잘 이해시키도록 안내한다.

직사각형의 넓이를 구하는 공식은

(직사각형의 넓이) = (가로)×(세로)

로 나타내었으나, 이것은

(가로의 길이)×(세로의 길이)

를 줄인 것이다.

그러나, 실제 직사각형의 넓이를 구하는 공식은

(직사각형의 넓이) = 1 cm^2 ×(가로)×(세로)

를 뜻하며, 공식으로 정리하기 위해서 1 cm^2를 생략하여 나타내었음을 보여준다. 그러면서 항상 넓이는 단위넓이 1 cm^2의 몇 배인 지에 의하여 나타내어진다는 것을 기본으로 하여 공식을 만들어야 한다고 안내하고 있다.

따라서 직사각형의 넓이를 구하는 공식을 다음과 같이 정리할 수 있을 것이다.

① 1 cm^2×(가로)×(세로)

여기서의 가로와 세로는 가로줄과 세로줄에 있는 넓이가 1 cm^2인 정사각형의 개수를 의미한다.

② (가로)×(세로)

여기에서 가로는 가로 한 줄의 넓이이다. 세로는 그러한 가로줄의 개수를 의미한다. 따라서 굳이 단위를 붙이자면, (가로) cm^2×(세로)개가 될 것이다.

현재 대다수의 초등학교 학생들은 위의 공식에서의 각 수치가 무엇을 뜻하는 지를 모르고 있고, 다수의 교사들 역시 별로 중요하게 생각하고 있지 않는 것 같다. 그러나, 이것은 상당히 잘못된 생각이다.

우리가 현실에서 당면하게 되는 실제의 어떤 현상이 있을 때, 그 현상의 결과만 중요시하게 되면 우리는 그 현상의 적용·발전과는 거

리가 멀어지게 된다. 하지만 그 현상의 원인과 과정에 대한 관심이 깊어지게 될 때, 그 현상의 적용·발전 또는 유사현상에로의 확장 적용이 가능하게 될 것이다.

어떤 사실에 대한 과정이나 원리에 대한 올바른 인식이 없이 단순히 그 결과만 수용하여 중간 과정에 대한 중요성을 무시한다면, 그것은 수학교육의 기본 속성인 과학적·논리적 사고력 신장 능력을 교사가 원천봉쇄하는 것과 같다.

교사는 아동들로 하여금 수학의 학습에 대한 즐거움과 흥미를 느낄 수 있도록 하여 수학 과목에 대한 긍정적인 자세를 발달시키도록 노력해야 한다. 그리고 수학학습에 대한 자신감과 목적의식을 갖고 계속적으로 연구하는 마음가짐을 갖도록 노력해야 한다. 또한 아동이 수학을 학습하는 가운데 정신적인 자극과 즐거움을 발견하며 수학적 연구의 풍부한 결과에 대하여 기쁨과 자부심을 느낄 수 있도록 지도하여야 한다.

(2) 곱셈은 동수누가만이 아니다.

곱셈은 초등학교 2학년 과정에서 처음 도입된다. 이 때 곱셈은 '동수누가'의 개념으로 지도가 된다. 몇씩의 묶음의 수나 수직선에서의 뛰어세기, 배(倍) 개념 등 모두 동수누가로 지도가 된다. 이것은 초기의 곱셈의 개념에 관한 지도로서 탓할 것이 못된다. 더구나 음수의 개념이 전혀 도입되지 않는 단계이므로 당연한 지도라고 할 수 있다. 그러나 중학교에서 정수의 곱셈지도에서는 '동수누가'만의 해석은 문제가 된다. 왜냐하면 정수의 곱셈에서는 '동수누가'로 해석이 안되는 경우가 나오기 때문이다.

3×4는 3을 4번 더하는 것이다. 즉,

$$3+3+3+3=3\times4=12$$

이라는 것이다.

$(-3)\times4$ 는 (-3)을 4번 더하는 것이 된다. 즉,

$$(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=(-3)\times4=-12$$

가 된다.

그러면 $3\times(-4)$는 어떻게 해석을 할까. 현재 지도되고 있는 몇 가지 방법을 살펴보면 아래와 같다.

첫째, **곱셈의 교환성을 이용**하는 것이다. $3\times(-4)=(-4)\times3$ 을 이용하여 -4가 3번 더해지는 것으로 해석을 해 보자는 것이다. 이것은 결과가 같으므로 인정을 해 줄 수도 있다. 물론 전자와 후자의 상황은 전혀 다르다. 전자는 3을 (-4)번 더한다 는 것이 되고, 후자는 (-4)를 3번 더한다는 것이 되므로 전혀 다른 현상을 단지 곱셈의 교환성으로 일축해 버리고 같은 상황으로 만들어 버린다는 데에 문제는 있다. 하지만 더 큰 문제는 $(-3)\times(-4)$와 같은 음수와 음수의 곱에서는 곱셈의 교환성으로도 어떻게 해 볼 수 없는 경우가 되어 버린 것이다. 따라서 설득의 가치가 없다.

둘째, 몇몇 중학교 교과서의 설명으로서, **수직선 뛰기로 이해를 시키는 것**이다. (피승수)×(승수)에서 피승수의 부호는 수직선에서의 방향을 결정한다는 것이다. 양수는 오른쪽 방향, 음수는 왼쪽 방향을 뜻한다고 전제한다. 그리고 승수의 부호는 피승수와 같은 방향이냐 또는 반대 방향이냐를 결정한다는 것이다.

수직선 뛰기의 설명은 (양수), (음수)들의 각각의 곱을 논리적인 모순없이 모두 해결할 수 있다는 점에서 첫번째와 다르나, 학생들이 이 현상과 실제적으로 나타나는 현상을 연관시키지 못함으로 해서 구체적인 상황을 연결시킬 수 없다는데에 문제가 있다.

세째, 몇몇 교과서의 설명으로 **곱셈의 규칙**

성을 이용한 설명이다.

$$(+3)\times(+3)=+9$$
$$(+3)\times(+2)=+6$$
$$(+3)\times(+1)=+3$$
$$(+3)\times(0)=0$$
$$(+3)\times(-1)=-3$$
$$(+3)\times(-2)=-6$$
$$(+3)\times(-3)=-9$$

위와 같이 승수가 1씩 커짐에 따라 피승수만큼 증가되고, 승수가 1씩 작아짐에 따라 피승수만큼 감소됨을 보여 승수가 음수인 경우에 곱의 결과는 음수가 됨을 논리적으로 보인 것이다.

이 설명은 그럴 수 있는 개연성은 가지고 있으나 하나의 현상을 단독적으로 해석하지 못한다는 데에 문제점이 있다. 예를 들어 $(+3)\times(-100)$의 경우에는 해석하기 위해서 많은 시간이 걸린다. 또한 그 자체가 의미하는 실제의 어떤 상황에 대한 설명을 할 수 없다.

위의 세 가지는 현재까지 행해지고 있는 정수의 곱셈지도에 관한 교수법이다. 이들 모두는 위에서 지적한 바와 마찬가지의 문제점을 지니고 있는 것으로 이와 같은 문제는 곱셈의 잘못된 정의에 있다는 사실을 모두가 인식하지 못한 결과에서 비롯된 것이다. 즉, 곱셈은 '동수누가'로 해석하기에는 부족하다는 것이다.

3. 음의 횟수의 개념 정의

(1) 곱셈의 '동수누가(同數累加)'와 '동수누감(同數累減)'의 양면성

초기의 곱셈 창안은 동수누가였다. 이는 누구나 인정하는 것으로 곱셈의 등장은 수학의 획기적인 변화를 가져왔다. 곱셈이 다른 부분에 확장 적용되어 거듭제곱을 생각하게 되고 많은 수식의 연산에서 편리함을 가져왔다는 사실도 또한 누구나 인정을 한다. 그러나 곱셈 자체의 문제점에 있어서는 전혀 발전이 없었다. 단지 '동수누가'의 원리만을 생각할 뿐이었다.

곱셈은 인간이 계산의 편리함을 위하여 만든 하나의 약속이다. 따라서 이 약속에 모든 경우가 다 적용된다는 보장은 애당초 없는 것이었다. 우리는 Pythagoras (B.C 582-497)학파의 판단 오류로 인하여 무리수의 연구가 천 수백년 동안이나 늦게 이루어졌다는 수학의 역사를 음미해 보아야 할 것이다. 아무리 위대한 수학자라도 그의 사고에 모순이 있을 수도 있고, 아무리 위대한 수학의 약속도 어떠한 오류를 품고 있을지 아무도 모르는 일이다. 많은 위대한 수학자들이 인정했다는 이유로 또, 그들도 어쩔 수 없었다는 이유로 그러한 오류를 외면한다는 것은 다른 분야도 아닌 수학의 분야에서는 있을 수 없는 일이다.

뜻하지 않은 사소한 것의 발견이 수학의 흐름에 있어서 엄청난 발견을 가져올 수도 있다는 것을 우리는 많이 보아 왔다. '0의 발견'이 그랬고, '음수의 발견'이 그랬고, '분수의 발견'··· 등, 셀 수 없을 만큼의 많은 사소한 발견으로 수학은 획기적인 변화를 가져왔다. '동수누가'의 원리가 저항을 받는 것은 승수가 음수일 경우이다. 그러면 승수가 음수인 경우는 어떻게 해석을 해야 할까.

먼저, **덧셈·뺄셈의 '시초수'**를 도입을 하자. 3×4에 있어서 3을 4번 더한다고 했는데, 실제로는 $3+3+3+3$ 으로 해석을 하여 사실상으로 3에다 3을 3번 더하는 생각을 하고 있다. 그러므로 정확하게 해석하자면, $+3+3+3+3$으로 해석하여야 옳다는 것이다. 그러면 여기에서 처음에 오는 $+3$은 도대체 무엇에다가 3을 더

한다는 것인가. 그래서 우리는 덧셈의 '시초수'를 생각해 보아야 할 것이다. '덧셈의 시초수'는 덧셈의 항등원인 '0'이다. 따라서 위의 계산에서는

$$3\times4=(0)+3+3+3+3$$

으로 보아야 옳을 것이다.

이제 승수가 음수인 경우를 생각해 보자. $3\times(-4)$ 에서 승수가 횟수를 의미한다는 점을 감안하여 3을 -4번 더한다고 봤을 때, '-4번'은 무엇을 뜻하나? '$+4$번'이 4번 더해주는 것이라고 볼 때, '-4번'은 4번 제거해 버리는 것 즉, 빼 주는 것이라고 보면 될 것이다. 즉,

$$3\times(-4)=(0)-3-3-3-3=-12$$

로 해석하면 된다는 것이다.

이렇게 **승수가 음수인 경우** '동수누감'으로 해석하면, 앞에서 지적한 정수의 곱셈에 있어서의 문제는 해결이 된다. (음수)×(음수)에 있어서도 간단하게 해결할 수 있다.

예를 들어 $(-3)\times(-4)$ 의 경우에 있어서도

$$(-3)\times(-4)=(0)-(-3)-(-3)-(-3)-(-3)$$
$$=(0)+(+3)+(+3)+(+3)+(+3)=+12$$

로 생각할 수 있을 것이다.

물론 여기에서 $-(-3)=+(+3)$ 이 되는 것은 어떻게 이해를 시킬 것이냐는 반문이 있을 수도 있다. 이 반문은 여러 가지로 의미가 있는 해석이 가능하다. 예를 들어 상행위를 계속적으로 하고 있는 상점에서 3만큼의 손해(-3의 의미)를 제거($-$의 의미)한다는 것은 3만큼의 이익($+3$의 의미)이 생긴($+$의 의미) 것과 같다는 이해가 가능하다는 것이다. 또한 3만큼의 부채를 탕감한다는 것은 3만큼의 자산을 늘리는 것과 같다는 의미있는 이해가 가능할 것이다.

따라서 곱셈은 승수가 양수일 때는 '동수누가'의 해석이 되나, 승수가 음수일 때는 '동수누감'으로 해석해야 하는 것이다.

(2) 음의 횟수의 개념 정의

위에서 '동수누감'은 어떠한 생각에서 나온 것인가. 그것은 '음의 횟수'를 역연산으로 생각을 해 보자는 데서 나온 것이다. 즉 $+4$번이 4번 더한다는 것이므로 -4번은 더하는 것의 역연산인 빼는 것으로 해석을 하여 4번을 뺀다는 생각을 한 것이다. 따라서 "음의 횟수는 역연산의 양의 횟수이다"로 정의할 수 있다.

(3) 곱셈의 재정의

곱셈은 '동수누가'만이 아니다. 곱셈은 승수의 부호에 따라 '동수누가'가 될 수도 있고, '동수누감'이 될 수도 있다.

곱셈을 음의 횟수에 관한 정의를 이용하여 재정의(再定義) 하자면, "곱셈은 승수가 양수일 때는 동수누가이고, 승수가 음수일 때는 동수누감이 된다." 라고 할 수 있다.

4. 음의 횟수의 확장 적용

(1) 거듭제곱의 애매한 지도

거듭제곱의 정의에 따르면 a^m 은 a를 m번 곱하는 것으로 되어 있다. 여기에서도 횟수가 적용이 된다. 음의 횟수를 역시 생각하고 있지 않으므로 a^{-m}의 경우는 우회적으로 설명이 되고 있을 뿐이다.

대부분의 교과서에서는 $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$ 이라는 정의를 하고 있다.

이는 마치 같은 부호의 두 수의 곱은 양수가 된다는 이야기와 맥락을 같이 한다. 어떤

교과서에서는 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 이라는 지수법칙을 이용하여 아래와 같은 예를 들어 설명하고 있다.

$$4^{-3} = 4^2 \div 4^5 = \frac{4\times4}{4\times4\times4\times4\times4} = \frac{1}{4\times4\times4} = \frac{1}{4^3}$$

이와 같은 설명이 논리적으로 이상은 없으나, 정확한 직접적인 해석은 하고 있지 않다는 데에 문제가 있다. 다시 말하면 어떤 식을 직접적인 현상으로 이해할 수 없다는 것이다. 그 자체로 명확한 이해를 할 수 없으므로 학생들은 막연한 이해만을 할 뿐이다. "아, 그래서 그렇게 되는구나!" 하면서도 고개를 갸우뚱거린다.

(2) 거듭제곱의 '동수누승(同數累乘)'과 '동수누제(同數累除)'의 양면성

우리는 위에서 승수가 음수인 경우의 곱셈에서 '음의 횟수'의 정의를 이용하여 역연산으로 생각한 결과 '동수누감'이 된다는 사실을 알았다. 여기 거듭제곱에서의 지수도 역시 횟수를 의미하므로 지수가 음수인 경우는 '음의 횟수'에 관한 정의가 도입될 수도 있을 것이다.

따라서 지수가 음수인 경우는 여러 번 곱한다는 것의 역연산으로 생각하여 여러 번 나눈다는 생각이 가능하다는 것이다.

4^3을 생각해 보자. 이것은 4를 3번 곱한다는 것으로 4×4×4 로 생각을 하는데 엄밀히 따지면 이것 역시 4에다가 4를 2번 곱하는 것이 되어 조금 문제가 있다. 즉, ×4×4×4 가 되어야 하는데 이것 역시 처음의 ×4는 어디에다 4를 곱하는지가 문제가 된다. 따라서 우리가 앞에서 '덧셈·뺄셈의 시초수', '0'을 생각했듯이, '곱셈·나눗셈의 시초수'를 생각할 수 있을 것이다. '덧셈의 시초수'는 덧셈의 항등원 0을 생각하였다. 따라서 '곱셈·나눗셈의 시초수' 역시 곱셈의 항등원인 '1'을 생각하면 될 것이다. 그러므로 $4^3 = (1)\times4\times4\times4$ 로 해석하여야 4를 3번 곱하는 것이 될 것이다.

4^{-3}의 경우를 생각해 보자.

4^{-3}은 4를 −3번 곱하는 것이 된다. 이것을 음의 횟수에 관한 정리를 이용하여 역연산으로 생각하면 4를 3번 나누는 것과 같다. 따라서 아래와 같은 식이 성립할 것이다.

$$4^{-3} = (1)\div4\div4\div4 = (1)\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4^3}$$

이렇게 음의 횟수에 관한 정리를 사용하면 지수가 음수라도 그 자체에서의 직접적인 해석이 가능하며, 거듭제곱은 지수의 부호에 따라 '동수누승'이 될 수도 있고, '동수누제'가 될 수도 있음을 알 수 있다.

(3) 거듭제곱의 재정의

거듭제곱은 지수의 부호에 따라 지수의 해석이 달라진다. 지수가 양인 경우에는 (지수)번 곱하는 것으로 해석이 되어지고, 지수가 음인 경우에는 (지수의 절대값)번만큼 나누는 것이 되어진다.

이렇게 음의 횟수에 관한 정리를 이용하여 거듭제곱을 재정의하면, "거듭제곱은 지수가 양인 경우에는 동수누승이 되고, 지수가 음인 경우에는 동수누제가 된다." 라고 정의를 내릴 수 있다.

5. 음의 횟수의 학습화 전략

(ERS 이론에 따른 3단계 지도 전략)

브루너는 어떠한 교과목의 내용도 보다 경제적이고 적용력이 있는 형태로 단순화할 수

있다고 했다. 그는 일반적인 어린이의 인지발달 경로가 '활동적 표상'으로 시작하여, '영상적 표상'을 거쳐 '상징적 표상'에로 통한다고 했다.

그러나 이러한 Bruner의 EIS 이론에 따라 하나의 학습과제를 활동적 표상단계, 영상적 표상단계, 상징적 표상단계로 나누어 학습지도 전략을 수립하는데는 어려움이 있다. 아주 간단한 학습내용은 활동적 표상단계의 내용을 영상적 표상단계로 조직하는데는 별 어려움이 없으나 조금만 복잡한 활동적 표상단계는 영상화시키가 곤란하다는 것이다. 즉, 반구체화시키기가 곤란하여 EIS 이론에의 적용이 어렵다는 것이다.

그래서 이를 수정 · 보완한 것이 ERS학습이론이다. ERS학습이론이란 한 학습과제를 학생들이 재미있는 놀이를 할 수 있게끔 활동적 표상으로 구성한 후, 학생들이 활동 후, 활동적 표상단계에서의 각각의 활동이 본 학습에서의 수식과 어떤 관련이 있는지 연관을 지어 나가면서 상징적 표상으로 바꾸어 간다는 것이다.

학생들은 ERS학습이론에 따라 활동적 표상에서 상징적 표상으로 연관을 지을 수 있게 되고 또, 상징적 표상에서 활동적 표상으로 연관을 지으면서 본 학습내용을 의미 있게 학습을 할 수 있게 되고 이러한 학습은 학생들의 사고의 유연성을 높여줄 수 있을 것이다.

본 논문에서는 내용상 4가지의 학습요소로 분류하고, 각 학습요소에 따른 3단계의 지도 전략을 제시할 것이다. 학습요소의 내용상의 분류는 아래와 같다.

첫째, 정수의 개념화 지도 전략.

둘째, 정수의 덧셈 지도 전략.

세째, 정수의 뺄셈 지도 전략.

네째, 정수의 곱셈 지도 전략.

위의 각 학습요소에 따른 3단계 지도 전략은 아래와 같이 제시한다.

제 1단계에서는 학습내용을 모두 이야기로 구성시켜 학습하는 아동이 전혀 수학학습을 생각하지 않으면서 이야기 활동만으로 놀이학습을 전개시켜 나간다.

제 2단계에서는 제 1단계에서 했던 이야기 활동내용을 학습요소와 관련시켜 도식화시킴으로써 이야기 상황과 학습요소 상호간의 전환활동을 한다.

제 3단계에서는 수리적인 추상적 사고과정으로 학습을 전개시켜 나간다. 이 때, 제 1단계와 제 2단계의 과정을 한 번씩 되새겨 줌으로써 추상과 구체와의 관련성을 이해시키도록 한다.

(1) 정수의 개념화 지도 전략

<제 1 단계>

(엄지와 하늘나라)

어느 마을에 엄지라는 착한 아이가 살고 있었다. 엄지는 하느님이 계시는 하늘나라에는 어떤 사람이 살고 있으며, 그곳에 사는 사람들은 얼마나 행복하게 사는지 무척 궁금해하였다. 그래서 엄지는 하느님에게 엄지가 하늘나라를 구경할 수 있도록 해 달라고 매일같이 기도하였다.

하느님은 평소에도 착한 엄지가 매일 정성껏 기도하는 모습을 보고 감동하여 천사장을 불러 엄지의 소원을 들어주라고 지시했다.

천사장은 천사들을 모아 회의를 열었다. '어떻게 하면 엄지를 하늘나라로 올릴 수가 있을까?' 하는 것이 회의 내용이었다. 천사들은 고민 끝에 엄지에게 풍선을 매달아 주어 엄지가 둥실둥실 떠서 하늘나라로 올라올 수 있도록 하자고 의논을 했다.

엄지에게 풍선을 한 개 매달아 주면 엄지는 하늘나라를 향해 한 칸 올라가게 되었다. 어떤 천사는 풍선을 세 개를 매달아 주어 엄지

가 하늘나라를 향해 세 칸 올라가게 하였고, 어떤 천사는 풍선을 일곱 개를 매달아 주어 엄지가 일곱 칸을 올라가게 하였다. 많은 천사들이 엄지에게 풍선을 매달아 주었고, 엄지는 하늘나라를 향해 점점 올라가고 있었다.

이 때, 지옥에서는 긴급 사탄회의가 벌어졌다. 그들은 엄지가 하늘나라로 올라가서 하늘나라의 아름답고 살기 좋은 모습을 보고 오게 되면 많은 친구들에게 그 이야기를 해 주어서 다른 모든 친구들도 하늘나라에 가기 위해 착한 일들만 하여 자기들이 바라는 나쁜 아이는 없어질 것이라고 생각하였다. 그래서 그들은 엄지를 하늘나라에 올라가지 못하도록 막기 위한 대책을 강구하기 시작했다.

사탄들의 회의 결과는 엄지의 발에 돌멩이를 매달아 주자는 것이었다. 엄지에게 돌멩이를 하나를 매달면 엄지는 한 칸 내려오게 되었다.

어떤 사탄이 엄지에게 돌멩이를 세 개를 매달아 주자, 엄지는 땅을 향해 세 칸 내려왔다. 또, 어떤 사탄이 엄지에게 돌멩이 다섯 개를 매달아 주자, 엄지는 다섯 칸 내려왔다.

이렇게 천사들과 사탄들은 서로 풍선과 돌멩이를 많이 매달아 주려고 쉴 틈 없이 움직였고, 엄지는 올라갔다가, 내려왔다가 했다.

자, 여러분들이 천사 또는 사탄이 되어서 엄지에게 풍선 또는 돌멩이를 매달아 보세요.

<제 2 단계>

제 1 단계에서의 풍선과 돌멩이의 역할의 차이를 아동들에게 인식시켜, 풍선은 좋은 역할을 하고 돌멩이는 나쁜 역할을 하는 것을 이해시킨다. 같은 세 개라도 풍선을 세 개 달아 주었을 때와 돌멩이를 세 개 달아 주었을 때 엄지의 상황이 정반대가 됨을 보여준다.

그렇게 하여 수에는 엄지가 원하는 방향으로 이끌어 주는 수인 양수와 그 반대인 음수가 있음을 깨닫게 한다. 또한 양수와 음수의 표현의 약속을 학습시킨다.

따라서 이 때, 풍선은 양수가 되고, 돌멩이는 음수가 됨을 학생들 스스로가 찾아낸다.

<제 3 단계>

개념의 고착화 단계로서 구체(具體)와 추상(抽象)의 연관성을 인식하여 구체가 나타내는 추상을 정확하게 표현할 수 있고, 추상이 나타내는 구체도 정확하게 표현할 수 있다. 즉, 각각의 양수를 그에 해당하는 풍선을 연상하며 이해하고 각각의 음수는 그에 해당하는 돌멩이를 연상하며 이해한다.

(2) 정수의 덧셈 지도 전략

<제 1 단계>

(엄지와 하늘나라)

하늘나라를 향해 올라가던 엄지는 뜻밖으로 사탄들이 나타나서 방해를 하는 바람에 공중에서 오르락내리락 하고 있었습니다.

엄지에게 너무 많은 천사들과 사탄들이 달려들게 되자, 천사장과 사탄장은 타협을 했습니다. 천사와 사탄이 각각 1명씩 나와서 풍선과 돌멩이를 매달아 주자고 의논을 했습니다.

천사 ①이 풍선을 3개 매달아 주는 동안 사탄 ①이 돌멩이 4개를 매달아서 엄지는 3칸 올라갔다가 다시 4칸을 내려와 원래보다 1칸 내려오게 되었습니다.

천사 ②가 풍선을 7개를 매달아 주고, 사탄 ②가 돌멩이를 4개 매달아 주어서 엄지는 7칸 올라갔다가 다시 4칸을 내려와서 이번에는 3칸을 올라간 꼴이 되었습니다.

천사 ③이 풍선을 4개, 사탄 ③이 돌멩이를 4개 매달아 주어 엄지는 4칸을 올라갔다가, 다시 4칸을 내려와 원래 그대로 있게 되었습니다.

이렇게 엄지는 하늘나라를 향하여 다가갔다가 멀어졌다가 하였습니다.

<제 2 단계>

제 1 단계에서의 풍선을 달아주고 돌멩이를 달아 주는 것을 학생들에게 각각 양수와 음수를 더하는 것과 같다는 것을 이해시킨다.

예를 들어 풍선을 3개 매달아 준다는 것은 +3을 더하는 것이라는 것을 이해시킨다. 이 때, 더하기는 매달아 주는 것이고, 풍선 3개는 +3을 의미하게 되는 것이다. 마찬가지로 풍선을 7개를 매달아 주는 것은 +(+7)을 의미하게 된다.

또한 돌멩이를 매달아 주는 것은 음수를 더한다는 것이다. 이 때, 돌멩이는 음수를 뜻하고, 매달아 준다는 것은 더하는 것을 뜻하는 것이므로 예를 들어 돌멩이 4개를 매달아 준다는 것은 +(−4)가 되는 것이다. 그래서 돌멩이 6개를 매달아 주는 것은 +(−6)과 같이 표현할 수 있다.

결국, 풍선과 돌멩이를 같이 매달면, 양수와 음수의 덧셈이 되어 정수의 덧셈에 관한 지도가 될 수가 있다.

다양한 예를 통하여 정수의 덧셈에서의 교환성과 결합성을 이해시킬 수 있다.

그래서 같은 부호의 두 수의 합은 그 부호에 절대값의 합을 쓴 것이고,

다른 부호의 두 수의 합은 절대값이 큰 수의 부호에 두 수의 절대값의 차를 쓴 것이 된다는 사실을 아동들에게 주지시킨다.

<제 3 단계>

정수의 덧셈에 관한 여러 문제를 엄지에게 풍선과 돌멩이를 달아주는 놀이를 하던 것을 연상하며 계산에 임하도록 한다. 즉, 계산식에서의 각각의 수나 연산작용을 놀이단계의 각각의 활동을 연상하면서 행한다.

(3) 정수의 뺄셈 지도 전략

<제 1 단계>

(엄지와 하늘나라)

계속해서 풍선과 돌멩이를 매달아 주는 천사들과 사탄들도 지쳤습니다. 천사들은 하늘나라로 올라가서 풍선을 들고 내려와 엄지에게 매달아 주었고, 사탄들은 땅에 내려가서 돌멩이를 들고 올라가 엄지에게 달아 주었기 때문에 천사들과 사탄들 양쪽 모두 지쳐 버렸답니다.

그 때, 꾀가 많은 한 사탄이 엄지에게 매달아 놓은 풍선을 세 개를 끊어 버려 엄지는 땅을 향해 세 칸을 내려오게 되었답니다. 그것을 본 어떤 천사가 화가 나서 돌멩이를 4개 끊어 버렸습니다. 그랬더니 엄지는 네 칸을 올라가게 되었습니다.

어떤 천사들은 풍선을 매달아 주기도 하고, 어떤 천사들은 이렇게 돌멩이를 끊어 버리기도 하였습니다. 마찬가지로 어떤 사탄들은 돌멩이를 매달아 주기도 하고, 풍선을 끊어 버리기도 하였습니다.

왜냐하면, 천사가 풍선을 3개 매달아 주는 것이나, 돌멩이를 3개 끊어 버리는 것은 똑같이 엄지가 3칸씩 올라가게 만들었기 때문입니다.

또한 사탄이 돌멩이를 4개 매달아 주는 것이나, 풍선을 4개 끊어 비리는 것은 똑같이 엄지를 4칸씩 내려오게 만들어 버리므로 같은 역할을 하게 되었습니다.

<제 2 단계>

자른다는 것은 뺀다는 것임을 이해시키도록 한다.

즉, 풍선을 자른다는 것은 풍선이 양수를 뜻하는 것이므로 양수를 제거해 버린다는 것이

고, 따라서 양수를 뺀다는 해석이 가능하다는 것이다.

또한, 돌멩이를 자른다는 것은 돌멩이가 음수를 뜻하므로 음수를 제거해 버린다는 해석으로 음수를 뺀다는 해석이 가능하다.

풍선을 자르면 엄지는 땅을 향해 내려오게 되므로 이 행위는 음의 행위가 되어 결국 자르는 풍선의 개수만큼의 돌멩이를 달아 주는 것과 같은 역할을 한다. 따라서 다음과 같은 식이 성립한다.

$-(+3)=+(-3)$; 풍선 3개를 자른다 = 돌멩이 3개를 단다.

$-(-3)=+(+3)$; 돌멩이 3개를 자른다 = 풍선 3개를 단다.

위와 같이 뺄셈을 계산의 편의상 반수(反數)의 덧셈으로 바꾸어서, 정수의 뺄셈은 정수의 덧셈으로 계산을 하면 된다는 것을 보여 준다.

여러 가지의 다양한 문제로 뺄셈은 반대부호의 수를 더하는 것과 결과가 같다는 내용을 이해시킴으로써, 양의 요소를 제거하는 것은 즉, 양수를 빼는 것은 음의 요소를 달아 주는 것 즉, 음수를 더해 주는 것과 같다는 것을 아동들에게 주지시킨다.

마찬가지로, 음의 요소를 제거하는 것은 즉, 음수를 빼는 것은 양의 요소를 달아 주는 것 즉, 양수를 더해 주는 것과 같다는 사실도 아동들에게 인식시킨다.

<제 3 단계>

정수의 뺄셈에 관한 여러 문제도 엄지에게 풍선과 돌멩이를 잘라버리는 놀이를 하던 것을 연상하며 풍선과 돌멩이를 잘라버리는 행위는 각각 돌멩이와 풍선을 달아주는 행위와 같은 결과를 얻은 것을 연상시키며 뺄셈을 반대부호 덧셈으로 자연스럽게 전환하여 계산하도록 유도한다.

(4) 정수의 곱셈 지도 전략

<제 1 단계>

(엄지와 하늘나라)

지칠대로 지친 천사들과 사탄들은 몇 명씩 짝을 지어 행동하기 시작했다. 천사 3명이 풍선을 4개씩 엄지에게 매달아 주자, 엄지는 4칸씩 3번 올라가서 모두 12칸을 올라가게 되었다. 그 모습을 본 사탄들도 똑같이 행동했다. 사탄 3명이 돌멩이를 4개씩 엄지에게 매달아 주자, 엄지는 4칸씩 3번 내려가게 되어 모두 12칸을 내려가게 되었다. 그리고는 바로 내려오지 않고 그들 각각은 풍선을 4개씩 잘라버렸다. 그러자 엄지는 또, 4칸씩 3번을 내려와서 12칸을 내려오게 되었다. 화가 난 천사들도 3명이 돌멩이를 4개씩 잘라 버리자, 엄지는 4칸씩 3번 올라가게 되어 다시 12칸을 올라갔다.

<제 2 단계>

풍선은 양수의 개념이고, 돌멩이는 음수의 개념이다.

또한 매달아 주는 것은 더해준다는 의미이고, 잘라 버린다(제거한다)는 것은 뺀다는 의미이다. 따라서 같은 개수의 풍선 또는 돌멩이를 여러 번 매달아 주는 것은 양수 또는 음수를 여러 번 더해주는 것이 된다. 따라서 승수가 양수인 곱셈이 되는 것이다. 그러나, 같은 개수의 풍선 또는 돌멩이를 여러 번 잘라 버리는 것은 양수 또는 음수를 여러 번 빼 주는 것이 되어 승수가 음수인 곱셈이 된다.

위의 사실을 학생들이 곱셈식과 연관을 지어 찾아낼 수 있도록 유도해주고 많은 이야기를 꾸며 연관성을 익히도록 한다.

승수가 양수이면 여러 번 달아 주는 것을 의미하고, 승수가 음수이면 여러 번 잘라버리는 것을 의미한다. 따라서 승수가 양수인 경우

에는 '동수누가'가 되고, 승수가 음수인 경우에는 '동수누감'이 된다.

$a>0$, $b>0$ 일 때,

① 풍선 a개를 b번 달아 주었다.

$$(+a)\times(+b)=\underbrace{(+a)+(+a)+(+a)+\cdots+(+a)}_{b\text{번}}=+ab$$

② 돌멩이 a개를 b번 달아 주었다.

$$(-a)\times(+b)=\underbrace{(-a)+(-a)+(-a)+\cdots+(-a)}_{b\text{번}}=-ab$$

③ 풍선 a개를 b번 잘라 버렸다.

$$(+a)\times(-b)=\underbrace{-(+a)-(+a)-(+a)-\cdots-(+a)}_{b\text{번}}$$

$$=\underbrace{+(-a)+(-a)+(-a)+\cdots+(-a)}_{b\text{번}}=-ab$$

④ 돌멩이 a개를 b번 잘라 버렸다.

$$(-a)\times(-b)=\underbrace{-(-a)-(-a)-(-a)-\cdots-(-a)}_{b\text{번}}$$

$$=\underbrace{+(+a)+(+a)+(+a)+\cdots+(+a)}_{b\text{번}}$$

$$=+ab$$

결과적으로 같은 부호의 두 수의 곱의 결과는 양수가 되고,

$$(+)\times(+)=(+),(-)\times(-)=(+)$$

다른 부호의 두 수의 곱의 결과는 음수가 된다.

$$(+)\times(-)=(-),(-)\times(+)=(-)$$

<제 3 단계>

정수의 곱셈에 관한 여러 문제를 엄지에게 같은 개수의 풍선과 돌멩이를 달아주거나 잘라버리는 놀이를 하던 것을 연상하며 계산에 임하도록 한다. 즉, 계산식에서의 승수가 양일 때에는 달아주는 행위를 연상하고, 승수가 음수일 때에는 잘라버리는 행위를 연상하며 계산에 임하도록 한다.

Ⅵ. 결론

본 연구는 횟수가 적용되는 연산의 부분에서 횟수를 나타내는 수가 음수일 때, 이에 대한 해석을 명쾌하게 내릴 수 없다는 문제점을 해결하려는 것이다. 횟수가 적용되는 부분으로는 곱셈과 거듭제곱이 있으며, 본 연구에서는 곱셈과 거듭제곱에서 현재 나타난 문제점을 다음과 같이 제시하였다.

(1) 곱셈에 대한 정확한 인식이 결여되어 있다. (피승수)×(승수)에서 피승수는 양(量)을, 승수는 횟수를 나타낸다는 것에 대해 소홀히 생각한다는 것이다.

(2) 각종 공식을 정리함에 있어, 결과에 급급하여 과정의 정확한 인식을 소홀히 취급하여 학생들의 탐구력을 신장시키는데 별로 도움이 되지 않는다는 것이다.

(3) 곱셈에서 승수가 음수인 경우, 본 연구에서 처음 도입되는 '음의 횟수'에 대한 사고를 해 보지 않은 결과 수학교육의 초기입문과정에서부터 명쾌한 이해보다는

(음수)×(음수) = (양수)

라는 정의를 규정하여 학생들의 학습동기 유발에 실패하고 있다는 것이다.

(4) 거듭제곱에서 지수가 음수인 경우 $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ 이라는 정의로 규정하여 우회적인 설명을 보충함으로써, 학생들의 이해에 도움이 부족하다. (단, $m>0$)

위의 문제점들을 해결하기 위하여 본 연구에서는 '음의 횟수는 역연산의 양의 횟수이다.'라고 정의하였다. 이 정의는 다음과 같이 적용될 수 있다.

(1) $a\times b$ 는 a를 b번 더하는 것이고, $a\times(-b)$ 는 a를 $-b$번 더하는 것이 되므로 a를 b번 빼는 것과 같다. 여기서 곱셈에 대한

재정의가 이루어지게 되었다. '곱셈은 승수가 양수일 때는 동수누가이고, 승수가 음수일 때는 동수누감이다.' (단, $b>0$)

(2) a^m 은 a를 m번 곱하는 것이고, a^{-m} 은 a를 $-m$번 곱하는 것이 되므로 a를 m번 나누는 것과 같다. 여기서 거듭제곱에 대한 재정의가 이루어지게 되었다. '거듭제곱은 지수가 양수일 때는 동수누승이고, 지수가 음수일 때는 동수누제이다.' (단, $m>0$)

(3) (1)에서 a를 b번 더하거나, a를 b뺀다는 것을 과연 어디에 a를 b번 더하고, 빼나를 생각해 볼 때 '덧셈 · 뺄셈의 시초수 0'을 제안할 수 있다. 또한 (2)에서 a를 b번 곱하거나, a를 b번 나누는 것 역시, 어디에 a를 b번 곱하고, 나누느냐를 생각하면서 '곱셈 · 나눗셈의 시초수 1'을 제안한다.

본 연구에서 제기하는 '음의 횟수에 관한 정리'를 학습현장에서 보다 쉽게 접근시키기 위하여 브루너의 EIS이론을 수정 · 보완한 ERS 학습이론에 따른 정수의 개념, 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 관한 3단계 지도전략을 다음과 같은 관점에서 제시하였다.

(1) 양수와 음수를 각각 바람직한 쪽의 방향과 그렇지 못한 쪽의 방향의 두 가지의 대비 개념으로 제시하였다.

(2) 더하는 것은 달아준다는 것으로 뺀다는 것은 잘라버린다는 즉, 제거한다는 생각을 하였다.

(3) 음수를 뺀다는 것은 악의 요소를 제거해 버리는 것이므로 선의 요소가 더해지는 것과 같은 결과가 됨을 보였다.

(4) 승수가 음수일 때는 음의 횟수만큼 달아주는 것이므로 양의 횟수만큼 제거하는 것으로 생각할 수 있다.

참고문헌

김용운·김용국(1992). 수학사대전. 우성문화사.

김용운·김용국(1990). 재미있는 수학여행①. 서울: 김영사.

김평산(1993). 중·고교 수학교육의 문제점과 그 개선 방향. 충남교육, 105, 28-34.

동아출판사백과사전부(1982). 원색세계대백과. 서울: 동아출판사.

교육부(1996). 4-1 수학과 초등학교 교사용 지도서. 국정교과서 주식회사.

우정호(1993). 수학은 이렇게 가르치고 이렇게 배워야 한다. 충남교육, 105, 9-17. 충청남도 교육연구원.

윤성재(1992). 직관적 음수지도방법에 관한 고찰. 대한수학교육학회논문집 2(1).

임규혁외 2인(1987). 발달심리학. 서울:집문당.

최휘성(1993). 국민학교 산수과 교육의 문제점과 그 개선 방향. 충남교육, 105. 18-27.

한충효(1992). 교육심리학의 구조탐구. 도시명: 교육과학사.

THE DEFINITION OF NEGATIVE COUNTING NUMBER AND TEACHING MODEL

Myung-woon Kim

In the teacher's guide of mathematics textbook for the 1st grade of the middle school, the clear and logical reason why the multiplication of negative number to negative number makes positive number, and a^{-m} with a>0 and m>0, is defined by $\frac{1}{a^m}$, is not given.

When we define the multiplication or the power by successive addition or successive multiplication of the same number, respectively, we encounter this ambiguity, in the case that the number of successive operations is negative. In this paper, we name this number, negative counting number, and we make the following more logical and intuitive definition, which is "negatively many successive operations is defined by positively many successive inverse operations."

According to this new definition, we define the multiplication by the successive addition or the successive subtraction of the same number, when the multiplier is positive or negative respectively, and the power by the successive multiplication or the successive division if the exponent of the power is positive or negative, respectively.

In addition, using this new definition and following the E · R · S Instruction strategy which revised and complemented the Bruner's E·I·S Instruction strategy, we develope new teaching model available in the 1st grade class of middle school where the concept of integers, three operations of integers are introduced.