大韓數學敎育學會 論文集 第 8 卷 第 2 號
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
Vol. VIII, No.2, 495-507. December 1998

# 미분법 단원에서 용어의 문제

한 대 희*

## 1. 서론

개념을 표현하는 용어는 그 개념을 이해하는 시발점이자 종착점이라 할 수 있다. 새로운 개념을 이해할 때 우리는 우선 그 개념을 표현하는 용어가 주는 느낌에서 시작하고, 학습이 끝난 다음 우리 머리 속에 남아 있는 개념은 용어에 의해 기억되며, 용어를 통해 다른 개념과 관련을 맺게 된다. 이렇게 용어는 그 개념을 이해하는 데 중요한 단서가 된다. 그러나 전문적인 용어는 일상적으로 사용되는 용어와 다를 수 있고, 그 용어가 나타내는 정확한 의미와는 다른 이미지 때문에 개념에 대한 잘못된 이해나 오개념이 생겨날 수 있다. 따라서 어떤 개념의 용어를 정할 때에는 용어의 이러한 성격을 충분히 고려해야 한다.

이 글에서 살펴보고자 하는 것은 고등학교 미분법 단원에서 사용되는 용어의 특징에 대한 것으로, 그 용어들이 미분법 단원의 주요 개념을 이해하는 데에 어떤 작용을 하고 있는가 하는 문제이다. 이를 위해서 수학 용어가 가지는 일반적인 성격을 먼저 고찰하고, 교과서에서 사용되는 미분 단원의 주요 개념에 대한 정의를 살펴본 후 그 용어들의 성격과 문제점을 찾고자 한다. 이어서 그러한 문제점들이 생겨난 원인이 어디에 있는지를 미적분학의 역사와 고등 수학에서 사용되는 용어를 근거로 고찰해보고자 한다.

## 2. 수학 용어의 성격

이 장에서는 용어 분석을 위해 고려해야 할 사항들을 살펴본다. 학술적으로 사용되는 전문 용어는 일상적인 용어와 다를 수 있으며, 수학에서 사용하는 용어는 수학이라는 학문의 성격에서 비롯된 특징적인 면이 있다. 그러면 용어가 개념 이해에 어떤 영향을 미치는 지에 관한 연구들로부터 용어 고찰에 필요한 요인들을 살펴보도록 한다.

### (1) 일상 용어와 전문 용어

이미 언급했듯이 수학에서 사용되는 용어들은 일상어와 다른 전문적인 성격을 가지고 있다. 일상어는 사회 생활의 경험으로부터 자연스럽게 습득되는 것인 반면, 수학에서 사용되는 용어는 일상어를 바탕으로 하되, 일상어와 다른 특수한 의미를 지니게 된다. 일상어와 전문 용어의 차이에서 오는 혼돈은 학습 상황에서 흔히 찾아볼 수 있는 일이다. 예를 들어 1, 2, 3, 4, 5 중에서 제일 큰 수가 어느 것이냐고 하면, 일상적인 의미에서는 3일 수

* 서울대 대학원

도 있다[1]. 따라서 수학 용어의 분석에 있어서는 그 용어의 일상적인 의미를 충분히 고려해야 할 것이다.

### (2) 의미성과 규약성

일상어와 전문어의 성격을 보다 자세히 알아보기 위해서 수학 용어가 가지는 두 가지 상반되는 성격을 생각해 볼 필요가 있다. 수학 용어는 의미성과 규약성이라는 두 가지 측면으로 나누어 생각할 수 있다.[2] 의미성은 그 용어가 나타내고 있는 개념을 그 용어의 字意적인 뜻으로 바로 알 수 있는 경우를 말한다. 예를 들어 '삼각형'이란 '각이 세 개 있는 모양'이라는 말뜻을 가지므로 용어 자체로부터 그 개념의 의미를 바로 알 수 있다. 반면에 규약성이란 그 개념의 의미와는 상관없이 수학자들 사이의 약속에 의해 정해지는 경우를 말한다. 예를 들어 로그를 생각해보자. 로그라는 말만으로는 그것이 무엇을 뜻하는지를 알 수 없으며 그것의 정의를 통해 그 용어의 의미를 알 수 있다.

일반적으로 의미성이 강한 용어는 쉽게 이해할 수 있지만 규약성이 강한 용어는 쉽게 이해하기 힘들다. 따라서 개념을 보다 쉽게 이해시키기 위해서는 의미성이 강한 용어를 사용하는 것이 바람직하다고 하겠다. 그런데 고등 수학으로 갈수록 내용이 보다 추상적이 되며, 규약적 성격이 강한 용어를 많이 사용하게 된다. 특히 현대 수학은 '다루고 있는 대상'보다는 '대상들 사이의 관계'를 탐구하는 학문이며, 특히 극단적인 공리주의적 입장에서는 수학을 약속에 의한 게임으로 파악하기도 한다. 이러한 입장에서는 수학의 용어는 완전히 규약적일 수 밖에 없을 것이다.

### (3) 일관성[3]

다음으로 고려해야 할 수학 용어의 성격으로 일관성을 들 수 있다. 다른 과목과 비교되는 수학의 특징 중의 하나는 소위 '앞의 내용을 모르면 뒤의 내용을 알 수 없다'는 것이다. 즉 수학은 대단히 체계적으로 구성되어 있으며, 수학을 표현하는 가장 일반적인 말인, 이른바 공리 체계에서는 정의와 정리가 계속해서 연관성을 가지며 발전한다. 수학에서 한 개념의 이해는 그것에서 끝나는 것이 아니라 다른 개념과 체계적인 관련을 맺게 된다. 이러한 측면에서 수학 용어는 앞뒤의 내용을 잘 연결시켜줄 수 있도록 일관성 있게 체계적으로 정의되어야 한다.

### (4) 이름과 의미

여기서는 개념을 이해하는 데에 이름이 얼마만큼 중요한 위치에 있는 가에 대해 고찰한다. 이름과 의미가 어느 정도 밀접하게 관련되어 있는가에 대한 대답은 아동의 발달 단계에 따라 다를 수 있다. 일반적으로 어린 나이일수록 이름과 의미가 더욱 밀접하게 관련된다. 비고츠키는 이름과 의미의 고착성에 관한 다음과 같은 실험 결과를 보고하고 있다. 즉, 그는 학령기 이전의 아동에게 개를 소라고 부르는 게임을 하는 실험을 했는데, 다음의 대화

---

1) Durkin & Shire(1991)는 "Lexical ambiguity in mathematical contexts"에서 일상적으로 사용되는 용어가 수학적 문맥에서 사용될 때 나타나는 문제점에 대해 보고하고 있다.
2) 우정호(1989)는 수학 교육학 개론에서 수학적 표기를 상징성과 규약성으로 나누어 설명하고 있다. 이 글에서는 수학 용어를 이와 유사하게 상징성과 의미성으로 나누어 설명하고자 한다.
3) 여기서 용어의 일관성은 체계성이나 연관성을 포함하는 뜻으로 사용되고 있다.

는 그 실험의 내용을 잘 예시해준다.

교사 : 소는 뿔을 가지고 있니?
학생 : 예
교사 : 여기서 소란 진짜 소를 말하는 것이니? 자 지금 무슨 게임을 하는지 잘 생각해 보자, 개가 뿔을 가지고 있니?
학생 : 물론 소를 소라고 부른다면 그것은 소이고, 소는 뿔을 가지고 있어요. 그런 종류의 개는 작은 뿔을 가져야 하나요?(Vygotsky, 1962, p.129)

이 대화에서 알 수 있듯이 학령기 이전의 아동은 용어의 규약성을 전혀 받아들이지 못한다고 하겠다. 물론 어떤 연령에서, 어떤 정도로 이름과 의미가 관련되어 있는가에 대해서는 이견의 여지가 있겠지만 용어(이름)의 발달이 개념 형성에 중요한 역할을 한다는 것에는 이의가 없을 듯하다 (Bell,et al, 1983, p.277).

### (5) 개념과 개념 이미지

비너(Vinner)에 의하면 개념은, 형식적인 수학의 일부인 '개념 정의'와 개인이 개념과 관련하여 개인의 마음속에 형성한 여러 가지 심상과 성질, 과정 등으로 이루어진 '개념 이미지'로 구분된다. 또한 그는 개념 이미지와 개념 정의가 갈등을 일으킬 수 있음을 보여주고 있다. 그런데 다음의 인용문에서 알 수 있듯이 개념 이미지는 개념의 이름과 밀접한 관련을 맺고 있다.

> 개념의 이름은 그것을 보거나 듣게 될 때 기억 속에 자극을 준다. 개념의 이름은 기억 속에 어떤 것을 환기시킨다. 일반적으로 그것은 개념의 정의가 아니다. 그것을 우리는 개념 이미지라고 부른다. (Vinner, 1991, p.68)

즉, 개념 이미지는 개념의 정확한 뜻(정의)이 아니라, 학생들의 개인적인 경험을 바탕으로 개념의 이름 등에서 환기되는 인상이나 느낌 등을 가리키는 것으로 개념의 정확한 의미를 이해하는데 장애로 작용할 수 있다는 것이다.

앞에서 언급했던 의미성과 규약성을 고려하면 보다 심각한 문제를 발견하게 된다. 즉, 이름과 의미가 보다 밀접하게 관련되어 있는 저학년의 학생일수록 그들의 이해를 돕기 위해 용어의 의미성을 중시 해야한다. 즉, 일상적이고, 직관적인 용어를 사용해야 한다. 그러나 학생이 성장하여 보다 추상적인 수학을 습득해야 하는 과정에서는 용어의 규약적 성격이 증대되어야 하는데, 이때 이전의 의미성이 강한 용어는 이후에 잘못된 개념 이미지로 작용할 수 있게 된다. 따라서 고등 개념을 지도하는데 있어서는 그 개념의 용어와 관련된 개념 이미지가 개념의 이해에 어떻게 작용하는지에 대해 충분히 고찰하고 그에 따른 지도가 이루어져야 한다.

### (6) 번역과 qwerty 효과

용어의 문제를 고찰할 때 빼놓을 수 없는 것이 번역의 문제일 것이다. 수학은 서구 역사의 산물인 바, 그것을 수용하는 우리 나라의 경우 모든 용어들을 번역해서 사용해야 하는데 그 과정에서 많은 어려움이 있으며, 당시의 시대적인 영향을 받게 된다. 특히 우리 나라는 일본과 중국을 거쳐 서구의 문명을 받아들였기 때문에 그 과정에서 일본과 중국의 영향을 받게 되었다.

마지막으로 언급하고자 하는 문제는 소위 qwerty 효과라는 것이다. 타이프기가 만들어질 당시 초기의 영문 자판은 깊이 있는 연구 없이 자모를 배열해서 사용했다. 이후에 인체 공학의 이론에서 기존의 자판의 불합리함을 지적했지만 이미 사회에서 널리 퍼져 있는 자판의 구

성을 바꿀 수가 없었다고 한다. 이와 같이 비록 불합리하더라도 그 사회에서 이미 굳어져버린 것은 바꾸기가 어려운데 이런 현상을 영문 자판의 왼쪽 맨 윗줄의 문자를 따서 qwerty 효과라고 한다.

최초로 번역을 하던 시대에는 수학을 비롯한 서구 문명 자체에 대한 이해가 부족했고, 일본과 중국의 영향 등으로 바람직하지 못한 용어가 생겨날 수 있었으며, qwerty 효과로 지금까지 그대로 사용되는 용어가 있을 수 있다. 따라서 용어의 대한 고찰은 이와 같은 문제도 고려해야 할 것이다.

이상의 논의를 요약하면 다음과 같다. 저학년일수록 이름과 의미의 관련성이 강하므로, 학습 초기에 보다 일상적인 용어에 가깝고, 이해하기 쉬운 닫는 용어를 사용해야 한다. 그러나 고학년으로 올라갈수록 추상적이고 규약성이 강한 용어를 사용해야 하고, 이때의 용어들은 가능한 일관성 있고 체계성이 있어서 전후의 개념들과 연관성을 가지도록 해야 한다.

그런데 저학년일수록 의미성이 강한 용어를 사용해야 하지만, 실제로 수학 교육에서 추구하는 것은 추상적인 사고에 이르게 하는 것이므로, 고등 개념의 이해에 있어서 초기의 이 직관적인 용어는 이후에 잘못된 개념 이미지로 작용하여 장애가 될 수 있다.

따라서 수학 용어 분석에 있어서는 다음의 몇 가지 사항에 중심을 둔 논의가 이루어 져야 할 것이다. 즉, 그 용어에 어떤 의미성이 있는가? 규약성을 강조하는 경우, 용어들이 일관성 있게 정의되고 있는가? 의미성이 어떤 개념 이미지를 주고 있는가? 그리고 용어에 의한 개념 이미지가 오개념을 형성하거나 장애로 작용하고 있는 것은 아닌가? 등을 고려 해야 한다.

이상의 논의를 바탕으로 다음 장에서는 미분법 단원에서 사용되는 용어에 대해 살펴보도록 한다.

## 3. 고등학교 미적분 단원에서 사용되는 용어의 분석

### (1) 고등학교 미적분 단원에서 사용되는 주요 용어

미분법 단원에서 사용되는 주요 용어가 무엇인가에 대해서는 異見이 있을 것이다. 그러나 이 글에서는 미분법 단원의 기본 개념을 이해하기 위해 쓰이는 기본적인 용어들을 중심으로 살펴보고자 한다.

미분법 단원의 주요 용어로, '평균변화율', '미분가능', '순간변화율' 혹은 '미분계수', '도함수', '미분한다', '미분법' 등을 들 수 있다. 먼저 이들의 정의를 살펴보자 (금중해외 2인, 1998. pp. 134-138).

* 평균변화율 : 함수 $y = f(x)$에서 $x$가 $a$에서 $b$까지 변할 때, 함수값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변하는 데, 이때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

를 $x$가 $a$에서 $b$까지 변할 때의 함수 $y = f(x)$의 평균변화율이라 한다.

* 미분가능 : $a$를 고정시켜 놓고, $b$를 $a$에 한없이 가까워지도록 할 때 평균변화율이 일정한 값에 가까워지는 경우, 곧 극한값

$$\lim_{b \to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

가 존재할 경우, 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 미분가능하다고 한다.

* 순간변화율, 미분계수 : 위의 극한값을, 함수 $f(x)$의 $x = a$에서의 미분계수 혹은 순간변화율이라 한다.

* 도함수 : 일반적으로 함수 $f(x)$에서 $x = a$에 대하여 미분계수 $f'(a)$를 대응시키는 함수

$$f' : a \rightarrow f'(a)$$

를 $y = f(x)$의 도함수라고 한다.

* 미분한다. : 함수 $f(x)$의 도함수를 구하는 것을 $f(x)$에 대하여 미분한다고 한다.

* 미분법 : 도함수를 구하는 계산법을 미분법이라고 한다.

(2) 문제의 제기

위의 용어들의 특징들을 앞에서 살펴본 수학 용어 분석에서 고려할 사항과 관련해서 문제점을 찾아보자.

① 용어의 의미성

미분법 단원에서 사용되는 주요 용어들이 일상적인 의미와 깊은 관련을 맺고 있지는 않다. 다만 중심적인 역할을 하는 미분이란 용어의 字意가 가늘 미(微), 나눌 분(分)이므로, 그 자체로 '잘게 나눈다'는 의미를 가지고 있다는 점에 주의해야 한다. 미분의 의미를 잘게 나눈다는 것에 둔다면 자연스럽게 미분가능이란 '잘게 나눌 수 있음' 미분한다는 '잘게 나눈다'와 같은 의미가 된다. 다만 미분계수에서 잘게 나눈다는 것과 계수 사이에는 직접적인 연관성을 찾기 어렵다. 이렇게 미분이라는 용어의 의미성에 집착하면 미분 단원의 여러 개념의 수학적 의미와는 다른 의미가 연관되게 된다. 이런 미분이라는 용어의 영향이 이후에 어떻게 작용하는지에 대해서는 미분이라는 용어에 대한 고찰을 보다 자세히 한 뒤 다루도록 하겠다.

② 용어의 일관성

* 미분계수

계수의 수학적인 정의를 고려할 때, 미분계수에서 수학적 용어로서의 '계수'의 의미는 찾기 힘들다. 미분계수의 정의는 평균변화율에서 순간변화율로 진행하는 것에 초점을 맞추고 있으며 여기서 미분계수가 어떤 의미를 지니는지에 대해서는 알 수 없다. 따라서 미분계수를 계수라는 용어에 관심을 두고 생각하면 일관성이 없어 보인다. 그렇다면 왜 의미상으로 관련이 없어 보이는 미분계수라는 용어를 사용하고 있는 것인가? 순간 변화율 대신에 미분가능이라는 용어와 관련을 주기 위해서 미분계수가 등장했다면, 차라리 계수를 생략하고 '미분'이라고 하는 편이 낳을 것이다.

* 도함수

'미분계수', '미분한다', '미분가능', '미분법' 등은 모두 '미분'이라는 용어와 관련되어 있다. 여기서 도함수는 그야 말로 뚱딴지 같이 등장하여 일관성을 저해하고 있다. 또, '미분가능성'이 미분계수의 존재성이라면, 용어들을 일관성있게 사용하기 위해서는 '미분한다'는 것을 '도함수'를 구하는 것보다는 '미분계수를 구하는 것'이라든가, 차라리 '미분을 구하는 것'이라고 하는 편이 더 일관성 있을 것이다.

이상에서 알 수 있듯이, 미적분의 용어 체계는 그리 일관성 있게 구성되어 있지 못하다.

③ 개념 이미지

미분법 단원에서 사용되는 용어들에서 가장 많이 등장하는 용어가 '미분'이다. 그럼 이 미분이라는 용어가 환기시키는 이미지는 무엇인가? 미분(微分)의 문자 그대로의 의미는 '잘게 나눈다'는 것이다. 그런데 미분계수나 미분

법이 '잘게 나눈다는 것'과 얼마나 많은 연관성을 가지고 있는가? 학생들 사이의 농담 중에서 코끼리를 냉장고에 넣는 방법에 관한 이야기가 있다. 그 중에서 미적분을 이용해서 코끼리를 냉장고에 넣는 방법은 "코끼리를 미분해서 냉장고에 집어넣고 다시 적분한다"라고 한다. 이 이야기 속에서 미분은 잘게 나눈다는 것을 의미하고, 적분은 다시 합한다는 의미를 지닌다. 글자 그대로의 해석임에는 틀림이 없지만, 단순히 아주 작게 나눈다는 것이 미분 단원의 중요한 핵심을 다 표현하고 있는 것은 아니다. 미분계수가 아주 작은 값의 비라는 관점에서 잘게 나눈다는 이미지를 포함하고 기는 하지만 미분계수의 정의에서 수학적으로 중요한 것은 아주 작은 값의 몫이 어떤 값에 가까워진다는 것이다.

미분이라는 말이 환기시키는 이미지는 무한히 잘게 나눈 것 즉 무한소인데, 이것이 미적분을 탄생시킨 기본 개념이며, 미적분 단원의 기본 아이디어인 무한을 포함하고 있기는 하지만, 그 이미지만으로 미분법의 의미를 정확하게 표현할 수는 없다. 즉 미분계수는 아주 작은 값의 비이며, 이것이 순간적인 변화율이나 접선의 기울기를 의미한다는 점이 중요한 사항이며 그에 비해 단순히 잘게 나누는 것 자체는 핵심적인 내용이 아니다. 또 무한소는 이미 수학의 역사에서 폐기되고 극한으로 대치되었던 바 학생들이 만약 미분이라는 자의에 얽매여 미적분 단원을 이해한다면, 그 학생의 머릿속에 미분법이란 단순히 잘게 나눈다는 이미지밖에는 남지 않을 것이다.

따라서 미분이란 용어가 주는 개념 이미지는 미분법의 중요 개념을 이해하는 데에 도움을 주기보다는 어떤 다른 의미에 집착하게 함으로써 미분법 단원 전체를 이해하는 데에 장애를 줄 수 있다고 하겠다.

이상의 문제점을 정리하면, 미분법 단원의 용어 체계는 '미분'이라는 용어에 의해서 문제점이 생겨난다. '미분'이라고 하는 정확한 정의가 없는 용어를 바탕으로 함으로써 용어 체계의 일관성이 저해되고 있을 뿐만 아니라 미분이라는 용어의 의미성에서 비롯된 개념 이미지가 미분법 단원의 기본개념을 이해하는 데 장애가 될 수 있다.

이러한 용어상의 문제점들은 '미분'이라는 용어와 관련되는 바, 이하의 논의에서는 이렇게 문제점이 많은 미분은 과연 무엇이고, 그 정체를 알 수 없는 표현이 왜 용어 체계상 중심적으로 사용되고 있으며, 중심적으로 사용되면서 왜 학교 수학에서 그 정의가 없는가 하는 문제들을 고찰해 본다.

## 4. 미분이란 무엇인가?

### (1) 번역 이전의 용어[4]

미분과 관련된 논의에 앞서, 지금까지의 논의가 번역의 과정에서 생겨난 우리 나라에 국한된 문제인지를 확인해보자. 이를 위해서 우선 위의 용어들의 번역되기 이전의 표현을 살펴보자.

순간변화율, 미분계수 : derivative (at $x = a$)
cf) differential coefficient

| | |
|---|---|
| 미분가능성 | : differentiable |
| 도함수 | : derived function |
| 미분한다 | : differentiate |
| 미분법 | : differentiation |

4) 여기서는 Bartle(1964), Spiegel(1974) 등의 대학 교재를 이용했다.

위에서 쉽게 알 수 있는 것은 우리의 용어는 영어식 표현을 '글자 그대로' 옮겨 놓은 것이라는 점이다. 단지 다른 것은 영어권에서는 미분 계수에 해당하는 differential coefficient를 더 이상 사용하지 않고 대신 derivative를 사용하고 있다는 점이다.

결국 영어에서도 마찬가지의 문제점들이 발견된다. 즉, differentiates란 동사의 결과에 해당하는 명사로 differential이 와야할 것 같은데, derivative가 자리잡고 있다. 또한 differential의 정의가 없이 이 단어와 관련된 파생어들이 용어의 중심을 이루고 있다. 이것은 위에 제시된 용어의 문제가 단순히 번역상의 문제가 아니라 영어권에서도 안고 있는 문제라 할 수 있을 것이다.

그렇다면 이 용어상의 문제의 핵심이 되는 미분 혹은 differential은 무엇인가? 이제 differential이 무엇이며, 이것이 왜 여러 용어에서 중심이 되어 나타나고 있는지 그리고 differential 자체를 곧바로 사용하지 못하는 원인이 어디에 있는지를 살펴봄으로써 이상에서 논의된 용어상의 문제의 근원을 찾아보도록 한다. 본 논문에서는 이를 수학의 역사와 현대 수학에서의 differential의 정의를 살펴봄으로써 알아보도록 할 것이다.

### (2) 미적분의 역사에서 differential

① 무한소를 기초로한 미적분에서의 미분[5]

널리 알려져 있듯이 미적분학이 처음으로 탄생한 시기에 미적분은 '아주 작은 값', '더 이상 나눌 수 없는 값', '무한소' 등으로 표현되는 아주 모호한 개념을 바탕으로 했다. 즉 접선의 기울기는 $x$가 아주 작게 변할 때, 그에 따라서 아주 작게 변하는 $y$ 값 사이의 비를 뜻했다. 라이프니츠는, $x$의 변량을 $\Delta x$ 라고 할 때, 그 값이 무한히 작아 지면, 이를 $x$의 미분이라 하고 $dx$로 나타내었다. 마찬가지로 $dy$는 $y$의 미분을 난타내는 기호였다. 따라서 접선의 기울기를 $\frac{dy}{dx}$로 구할 수 있었다(Boyer, 1968, p.441).

이렇게 미분을 이용해서 미적분의 이론이 전개되게 됨으로 해서 '미분'이 가장 중심적인 개념으로 자리잡게 된다. 즉, 미분법이란 두 미분의 몫을 구하는 것이고, 적분은 미분의 합이 된다. 또 기하학에서 미분(무한소)를 이용한다면 이는 미분기하학이 되는 것이고 미분이 들어 있는 식이 미분방정식이 된다. 이렇게 미분은 무한소의 아이디어를 바탕으로 하는 수학 어디에나 사용되는 중심 개념이 되었다.

② 극한의 개념을 바탕으로 한 미적분에서의 미분

미적분학이 발전함에 따라, 무한소 개념을 바탕으로 한 미적분학에 여러 가지 문제점이 나타나게 되고, 미적분학의 기초에 대한 반성이 일어나게 되었다. 무한소는 정의 자체가 무한과 관련하여 대단히 모호한 것이었으며, 버클리에 의해 논리적 결함이 지적되는 등 많은 비판을 받게 된다 (한대희, 1997, pp.13-19).

라그랑지 시대에 이르러서는 무한소가 아닌 도함수(derivative)를 중심으로 하고자 하는 경향이 나타나게 되었다 (Cojori, 1952, p.207). 그 이후에 코시는 더 이상 애매 모호한 개념인 미분 혹은 무한소을 미적분의 기초로 하지 않

5) 미분법 초기의 발달은 여러 학자들에 의해 다양하게 이루어 졌으며, 특히 뉴턴과 라이프니츠는 미적분학 발달의 결정적인 계기를 만든 학자로 평가되고 있다. 이 단원에서는 '미분'과 관련하여 라이프니츠와 관련된 내용을 중심적으로 다루고자 한다.

고, 극한을 논리적 기초로 한 미적분학 체계를 만들어 내었다.

코시는 우선 극한, 무한소, 무한의 개념을 설정하고, 극한의 개념을 이용해 오늘날과 같은 도함수의 정의를 했다. 그리고 이 도함수를 이용해서 다시 미분을 정의했다 (Boyer, 1949, p.275). 즉, $dx$를 유한인 상수라 할 때, 함수 $y = f(x)$의 미분, $dy$ 는 $f'(x)dx$로 정의된다. 여기서 $f'(x)$는 미분 앞에서 사용되는 계수와 같은 의미를 가지게 되고, 따라서 미분계수라는 명칭이 생겨나게 되었다.

코시 이후로, 미적분학은 극한의 개념을 보다 엄밀히 정의하고, 이를 바탕으로 발전하게 된다. 따라서 고전적인 무한소의 개념을 바탕으로 한 미분은 사라지게 되었다.

그러나 초기의, 무한소 개념이나 미분은 문제를 풀이하는 과정이나 증명의 과정에서는 계속 사용되었고, differentiable, diffrentiate등의 용어나 differential calculus, diferential equation 등과 같은 용어에서 여전히 differential이란 표현을 관습적으로 사용했다. 아마도 이 differential는 미적분학의 역사에서 발견되는 대표적인 qwerty효과의 예라고 할 수 있을 것이다.

간략한 미적분학의 역사로부터 우리는 미적분 초기의 무한소를 바탕으로 한 미분의 개념과 극한을 기초로 한 미적분에서의 미분 개념을 살펴보았다. 이를 통해 미분 계수 (differential coefficient)의 유래와 도함수 (derivative)가 등장하게 된 배경 및 미분 (differential)의 두 가지 의미를 알 수 있었다.

미분의 한가지 의미는 아주 작은 증분이라는, 미적분 초기의 개념인 무한소와 관련을 맺고 있다. 무한소는 미적분을 탄생시키는 역할을 했지만, 논리적 한계에 의해 극한의 개념에 자리를 양보하게 된다. 그러나 무한소와 미분의 이미지는 계속해서 수학자들 사이에 남아있으며, 덜 논리적이지만 발견적인 힘을 가지며, 미적분을 관습적으로 표현하는 용어 속에 그대로 남아 있게 된다.

코시에 의해 새롭게 정의된 미분의 개념은 극한에 의해 정의된 도함수를 이용해서 정의된다. 따라서 미적분의 이론을 전개하는 데 반드시 필요한 개념이라기보다는 도함수를 응용하는 한 방법이라고 할 수 있다. 다음 단원에서는 코시에 의해 새롭게 정의된 미분이 이후에 어떻게 발전하게 되었는지를 고찰함으로써 학교 수학에서 왜 미분이 사용되지 않는 지에 대한 해답을 찾을 것이다.

### (3) 현대 미적분학에서 미분[6)]

이 절에서는 현대 미적분학(해석학)에서 발견되는 미분(differential)에 대해 살펴본다.

#### ① 다변수 함수에서 differential

differential의 현대적인 개념을 설명하기 전에 '미분가능'의 의미를 다시 한번 살펴보자. '미분가능'에 대한 정의는 '순간변화율'의 존재 즉, 한 변수와 다른 변수의 비가 다가가는 극한값이다. 그런데 다변수 함수의 경우에는 이런 변화율은 여러 가지 방법으로 구할 수 있다. 즉 여러 방향에서 증가율을 구할 수 있게 된다. 이것을 편미분(partial derivative)라고 한다. 그렇다면 그 중에서 어느 것을 구하는 것을 미분법이라고 할 것인가? 혹은 미분가능성을 어떻게 다변수 함수로 확장할 수 있을 것인가?

이것을 기하학적으로 설명하면, 1변수 함수의 미분가능성이 접선의 존재성이었던 바, 2변수 함수의 미분 가능성은 접평면의 존재성으로 정의할 수 있다. 이를 조금 다르게 표현하

6) 이 절은 주로 R.F. Wheeler(1981)의 Rethinking Mathematical Concepts를 참조하였다.

면 접선의 존재란 일차함수(직선)로 근사 된다는 것이고, 다변수 함수의 경우는 선형 함수(접평면)로 근사 될 수 있다는 것이다.

다시 말해, 다변수 함수에서 미분을 다루기 위해서는 미분한다는 것의 개념을 일반화해야 하고 그 과정에서 변수 사이의 변화율을 구하는 것과 선형 함수로 근사 시킨다는 것의 개념의 분화가 생겨난다. 여기서 분화된 두 개념을 각각 derivative와 differential로 정의하게 된다. 혼돈을 피하기 위해 이제부터는 이 두 개념을 구분해서 사용하도록 하자.

그럼 현대 미적분학에서의 differential의 정의을 살펴보자. 먼저 다변수 함수에서 미분가능성과 differential의 정의를 확인하자(Fleming, 1976, p.83).

함수 $f$ 가 $x_0$에서 미분가능 하다는 것은 다음의 식을 만족하는 선형 함수 $L$이 존재하는 경우를 말한다.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)}{|h|} = 0$$

이 때, 이 선형 함수를 나타내는 covector를 differential이라고 하며, $df(x_0)$로 나타낸다.

이것을 2변수 함수의 경우로 풀어쓰면 다음과 같다(Wheeler, 1981, p.165).

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = l\Delta x + m\Delta y + \varepsilon \Delta r$$

여기서 $(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$에서 ,

$(\Delta x, \Delta y) \to 0$ 일 때, $\varepsilon \to 0$가 되는 경우를 differentiable이라고 하고,

이때, $df = l\,dx + m\,dy$ 이고, 이것을 differential이라고 한다.

여기서 알 수 있는 것은, differentiable이란 한 점에서 선형 근사 가능함을 의미하는 것이며, 이것은 기하학적으로 접평면의 존재성을 의미한다. 이것과 비교해서 편미분을 고찰해보자. 용어 사용상의 혼돈을 피하기 위해, 변수 사이의 순간 변화율이 존재하는 경우를 derivable이라고 부르고, 한 종속 변수에 대한 순간 변화율을 partial derivative라고 하자.

그런데, 미적분학의 기본적인 결과로부터 differentiable이면 derivable이지만 그 역은 성립하지 않음을 알 수 있다. 물론 1변수 함수의 경우 두 개념은 동치 관계에 있다. 여기서 우리는 미분 단원의 용어 중에서 순간변화율과 미분계수 사이의 관계를 다시 한 번 확인할 수 있다. 즉 1변수 함수의 경우 두 용어는 같은 의미를 지니지만 고등 수학에서는 두 개념의 분화가 필요한 것이다.

② 1변수함수에서 differential

이제 이것을 1변수 함수에 적용하여 미분(differential)의 개념을 살펴보자 (Wheeler, 1981, p.167).

함수, $y = f(x)$에서, $x$의 증분을 $\Delta x$, $y$의 증분을 $\Delta y$라고 하자.

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x$ 이고, $\Delta x$가 0에 가까이 감에 따라, $\varepsilon$도 0에 가까이 간다면, 이를 differentiable라고 하고, 이 때, $dy = f'(x)\,dx$로 표현하며, 이를 $y$의 differentia이라고 한다.

물론 이 식은, 미적분 역사의 초기에 등장하는 식과 동일해 보인다. 그러나 여기서 $dy$, $dx$는 무한히 작은 값의 의미를 가지고 있지 않다.

여기서, 문제가 발생한다. 즉, 새롭게 정의된 미분과 과거 무한소 개념을 어떻게 구분 지을 수 있는가? 특히 $dx$라는 기호는 미적분의 여러 가지 상황에서 사용됨으로 오해와 혼돈의 소지가 될 수 있다.[9)]

9) 1942년에서 1952년까지 American Mathematical Monthly에서 이 문제에 관한 논쟁이 벌어졌다.

이런 의문에 답하기 위해서는 differential이 정의되는 과정을 보다 자세히 살펴보아야 한다. 그 과정을 순서에 따라 기술하면 다음과 같다 (Wheeler, 1981, p.161).

(0) 함수 $f$ 가 주어진다.
(1) $x$의 증분 $\delta x$가 주어진다.
(2) $\delta y = f(x+\delta x) - f(x)$ 로 정의한다.
(3) $\frac{\delta y}{\delta x}$ 를 구한다.
(4) $\delta x \rightarrow 0$ 일 때, $\frac{\delta y}{\delta x}$ 를 조사한다.
(5) $f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ 로 정의한다.
(6) 다시, 특정한 증분 $\delta x$ ( $\neq 0$ )
(7) $dy = f'(x)\,\delta x$로 정의한다.
(8) 이제 $f(x) = x$ 로 택하면, $dx = 1 \cdot \delta x$ 이다.
(9) 따라서, $dy = f'(x)\,dx$ 가 된다.

여기서 주목해야 할 것은, $dy$는 아주 작은 증분이 아니라, $x$와 $dx$의 두 변수에 의해 결정되는 함수라는 것이다. 이것의 기하학적 의미는 다음의 그림1을 보면 분명해 진다. 그림에서 $dx = \delta x$ 는 임의의 어떤 값이며, $dy$는 접선에 의해서 결정되는 증분이다.

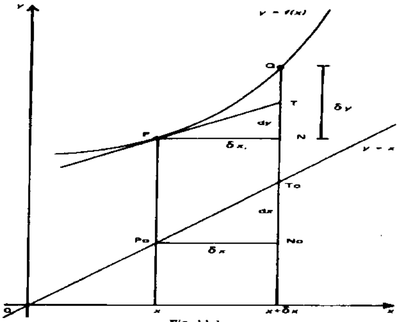


그림 1

이상의 논의를 요약하면 다음과 같이 기술할 수 있다.

1) derivability : 두 변수 사이의 순간변화율의 존재성

derivation : $y \rightarrow \frac{dy}{dx}$

derivative : $f'(x)$

2) differentiability : 선형 근사 가능성, 혹은 접평면의 존재성[10)]

differentiation : $y \rightarrow dy$

differential : $dy$ ( $= f'(x)\,dx$)

그럼 이렇게 수학적으로 정의된 differential를 왜 학교 수학에서 도입하지 않고 있는가? 그것은 differential과 derivative의 개념 분화는 다변수의 미적분학을 다루는 과정에서나 필요한 것으로 굳이 1변수 함수를 다루는 과정에서 도입할 필요가 없다는 것과 위에서 살펴 본대로 사용되는 기호나 용어상에 혼란을 가져 올 수 있기 때문이다. 즉 미분법을 처음 배울 때, $dx$는 독립적인 의미가 없는 것으로 배우지만 만약 differential을 배우게 되면 $dx$를 독립적인 수처럼 파악하는 등 혼란을 야기 시킬 수 있기 때문이다.

## 5. 결론

이 글에서는 미분법 단원에서 사용되는 용어들이 어떤 문제점을 가지고 있는지 그리고 그 문제점이 어떻게 생겨나게 된 것인지를 고찰하였다.

이것을 위해 2장에서는 수학 용어 분석에서 고려해야 할 사항들을 일상 용어와 전문 용

10) 현대 미적분학에서 differential의 의미를 거칠게 표현하면, '어떤 조건을 만족하는 선형함수를 표현하는 벡터', '$x$와 $dx(=\Delta x)$에 의해 결정되는, 함수의 선형 근사를 나타내는 함수' 등을 들 수 있을 것이다.

어, 용어의 의미성과 규약성, 일관성, 이름과 의미, 개념과 개념 이미지, 번역과 qwerty 효과 등으로 나누어 살펴보았다.

이어서 3장에서는 현재 사용되고 있는 교과서를 분석했고, 이를 통해 미분법 단원에서 사용되는 용어들에 문제점이 있음을 확인할 수 있었다. 즉, '미분계수'에는 계수의 의미가 없다. '미분가능', '미분계수', '미분한다', '미분법' 등의 주요 용어는 모두 '미분'이라는 단어를 중심으로 하고 있지만 도함수라는 특이한 용어가 있어 일관성을 저해하고 있으며, 중심적인 단어인 '미분'은 정의 없이 사용되고 있다. 특히 '미분'은 그 字意적 의미에서 각 용어의 정확한 의미와는 밀접한 관련이 없는 '잘게 나눈다'는 이미지를 가짐으로 해서 미분법 단원의 개념을 이해하는 데 어려움으로 작용하고 있다.

4장에서는 미적분학의 역사와 현대 수학에서 사용되고 있는 '미분'이라는 용어를 고찰해 봄으로써 이러한 '미분'과 관련된 문제점이 생겨난 원인이 어디에 있는지 고찰해보았다. 즉, 역사적인 관점에서 미분은 아주 작은 증분(무한소)이라는 개념을 가지는 것으로 미적분학의 탄생기에 중요 개념이었으나, 그 개념의 모호함과 논리적인 모순에 의해 미적분학에서 추방되었다. 그러나 무한소는 직관적이고 발견적인 성격을 가짐으로 지금까지도 문제의 해결과정이나 개념의 이해에서 비공식적으로 사용되고 있으며, 무한소의 의미를 가지는 '미분'은 오랫동안 중요한 개념으로 사용되어 온 바 수학 분야에서 관습적으로 사용되는 용어가 되었다.

또한 현대 수학에서의 '미분'은 극한에 의해 정의된 도함수를 통해서 새롭게 수학적으로 정의되며, 미분법의 내용을 다변수로 일반화하는 과정에서 분화되는 개념을 설명하기 위해 사용된다. 그것은 고전적 의미의 '미분' 역할을 하면서, 고전적인 의미의 '미분'의 모호함을 제거하고 있다. 그러나 그것은 다변수 함수를 배우는 수준에서야 의미 있는 것이며, 이는 $dx$란 기호와 관련해서 많은 혼란을 야기할 수 있다. 따라서 학교 수학에서는 현대적인 '미분'을 배제하게 된다.[11]

위의 역사적 고찰을 통해 '미분계수'의 어원과 일관성 없는 '도함수'란 용어가 왜 등장했는지, 그리고 학교 수학에서 왜 '미분'이란 용어의 정의가 나오지 않는지를 이해 할 수 있을 것이다.

역사적인 배경과 어의 자체를 고려할 때, '미분'이란 용어는 어떤 개념 이미지를 가지고 있는데, 이는 반드시 긍정적인 영향을 미치고 있는 것은 아니다. 즉, 아주 잘게 나눈다는 것은 미분법 단원의 중요한 특징인 무한(과정)의 아이디어를 주고 있다. 그러나 그러한 자의적 의미만으로는 미분법 단원에서 등장하는 중요한 개념을 이해할 수 없으며 오히려 핵심을 놓치고 정확하지 못한 개념 이미지에 고착하게 할 수 있다. 뿐만 아니라 '미분'을 완전히 배제하지도 못하고, 완전히 수용하지도 못하는 학교 수학에서는 용어를 일관성 없이 사용하며, 따라서 위의 불완전한 개념 이미지와 작용하여 미분 단원을 잘못 이해하는 원인이 되고 있

11) 이상의 고찰로부터 세 가지 서로 다른 '미분'이 있음을 알 수 있다. 첫째는 고등학교 미분법 단원의 용어에서 발견되는 '미분'으로, 이 때의 '미분'은 정확한 정의 없이 사용된다. 그 다음으로는, 미적분의 역사 초기에 무한소와 관련된 '미분'이 있었다. 이 '미분'은 현대의 용어 체계의 기원이 되며, 무한소와 관련된 개념 이미지를 만들어 낸다. 마지막으로 코시 이후로 수학적으로 정의되는 '미분'이 있다. 세 번째의 '미분'은 여러 가지 문제점에 의해, 이것을 학교 수학에서 도입하기는 어렵다.

다.[12)]

따라서 미분법 단원에서는 이러한 용어상의 문제점과 그 원인을 고려한 지도가 이루어져야 할 것이다. 물론 미분법 단원의 용어를 재정리해야 한다던가, 혹은 어떻게 할 것인가 등의 문제는 보다 많은 연구와 논의가 필요할 것이다.

## 참고 문헌


금종해, 정순영, 박평순 (1998). 고등학교 수학 I. 한샘 출판사.

우정호(1989). 수학 교육학 개론. 서울대학교출판부.

한대희(1997). 미적분의 역사 발생적 전개에 관한 연구. 서울대석사학위논문.

Bell, A. W., Costello, J., & Kuchemann. D. E. (1983). A *Review of research in mathematical education*, Nfer-Nelson.

Allendoerfer, C. B. (1952). Editorial Differentials. *American Mathematical Monthly*, 59, 403-406.

Bartle, R. (1964). *The elements of real analysis.* Wiley.

Cajori, F. (1952). *A history of mathematical notations.* The Open Court Publishing Company.

Church, A. (1942). Differentials. *American Mathematical Monthly*, 49, 389-392.

Durkin, K., & Shire, B. (1991). *Lexical ambiguity in mathematical contexts.* Open University Press.

Fleming, W. (1976). *Function of several variables.* Undergraduate Texts in Mathematics.

Fort, M. K. (1952). Differentials. *American Mathematical Monthly*, 59, 392-395.

Kac, M., & Randolph, J. F. (1942). Differentials. *American Mathematical Monthly*, 49, 110-112.

Phipps, C. G. (1952). The relation of differential and delta increments. *American Mathematical Monthly*, 59, 395-398.

Ransom, W. R. (1951). Bringing in differentials earlier. *American Mathematical Monthly,* 58, 336-337.

Spiegel, M. R. (1974). *Advanced calculus.* Schaum Outline Series.

Vinner, S. (1991). The role of definition in the teaching and learning of mathematics. *Advanced mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publishers.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language.* The M. I. T. Press.

Wheeler, R. F. (1981). *Rethinking mathematical concepts.* Ellis Horwood Limited.


12) Wheeler(1981 p.140)는 이런 문제 의식에서 미분법 단원의 용어를 다음과 같이 재정리하자는 주장하고 있다.

* differentiable ⟶ derivable * differentiation ⟶ derivation * differentiates ⟶ derives

* differential ⟶ derivative * derived function

그러나 이미 오랜 전통으로 굳어진 용어들을 바꾼다는 것은 그리 쉬운 일이 아니며, Wheeler 이런 주장은 널리 받아 들여 지고 있지는 않는 듯하다.

# A Study on the Problem of Terminology in Calculus

Han, Dae-Hee

This article intends to review what problems the terms in calculus have and how those problems are caused. For this purpose We make examinations on the considerations in the analysis of mathematical terminology, which includes the problems of general and technical terms, the meaning and the boundary of words, their consistency, the name and meaning, concepts and their concept images, translations and qwerty effects.

And in chapter 3, We analyse the textbook which are currently used, through which I was able to find out that the terms in calculus have some problems. In other words, the key terms such as "differentiable", "differential coefficient", "differentiation" have their roots in the term "differential" but the term "derived function" is very distinct from other terms and thus obstructs the consistency of terms. And the central term "differential" is being used without clear definition. In particular, the fact that "differential", when used in its arbitrary definition, has the image of "splitting minutely" can be an obstacle to understanding the exact concepts of calculus.

In chapter 4, We make a review on the history of calculus and the term "differential" currently used in modern mathematics so that I can identify the origin of the problem connected with the usage of the term "differential".

We should recognize the specified problems and its causes and keep their instructional implications in mind. Furthermore, following researches and discussions should be made on whether the terminology system of calculus should be reestablished and how the reestablishment should be made.