大韓數學教育學會 論文集 第 8 卷 第 2 號
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
Vol. Ⅷ, No.2, 485-494. December 1998

Piaget의 개념 발달의 메커니즘과 대수의 역사

민 세 영*

Ⅰ. 서론

적어도 일세기 동안 수학교수 맥락에서 수학사가 이용되어 왔으나, 학생이 지식을 구성하는 과정을 비추기 위하여 역사적 관점에서 수학적 지식을 분석한다는 착상이 등장한 것은 겨우 약 20년 전의 일이다. 그런 연구들 중의 하나가 Bachelard의 인식론적 장애의 개념을 수학에 적용한 70년대의 Brousseau의 연구이다. 인식론적 장애라는 개념은 Brousseau에게 학생들이 특정 주제를 학습할 때 반복되는, 결코 우연이 아닌 오류들을 이해하는 방법을 주었다. 그는 이러한 학생들의 오류 뒤에는 어떤 논리가 있다고 주장하고 어떤 문제들을 효과적으로 해결하기에 충분하지만 다른 문제들을 해결하기에는 적절하지 않은 지식이라는 용어로 설명한다. 그는 그 오류들의 근원을 학생 자신의 발달에 따른 인지적 용량과 관련된 개체발생적 근원, 교수학적 근원, 그 지식 자체와 관련된 인식론적 근원으로 분류한다. 그에 의하면 수학사와 오늘날의 학생의 학습오류를 비교하는 것을 통해 그러한 인식론적 장애를 확인할 수 있다(Brousseau, 1983).

많은 학생들은 산술에서 대수로 넘어가는 과정에서 여러 어려움을 겪게 된다. 등호와 변수에 대해 학생들이 갖고 있는 오개념에 대한 논의를 비롯하여 여러 대수적 개념과 그 기호를 이해하는 과정에서 학생들이 겪게 되는 어려움에 대한 다양한 논의가 있었다. 학생들이 대수를 배우는 과정에서 갖는 어려움에 대하여 다양한 해석이 가능하지만 이 글에서는 대수의 역사와 관련지어 생각해보고자 한다. 이를 위하여 Piaget의 반영적 추상화와 개념 발달의 메커니즘에 관한 이론과 대수의 역사를 살펴보고자 한다.

Ⅱ. Piaget의 반영적 추상화와 개념 발달의 메커니즘

Piaget는 지식의 발달이 선형적인 과정으로 이루어지며 그 선형적 과정에서 각 단계는 선행 단계의 결과로 선생단계에서 획득된 지식을 재조직하는 것으로 시작되며 다음 단계에 대한 필요조건이 된다고 보았다(Piaget & Garcia, 1989)

한 수준에서 다른 수준으로 재조직되는 과정에서, 경험적인 추상화(empirical abstraction)와 반영적 추상화(reflective abstraction)가 구별이 된다. 경험적인 추상화는 대상 자체로부터 정보를 이끌어 내는 것이고 반영적 추상화는 주체의 활동과 조작으로부터 생긴다. 이러한 반영적 추상화는 더 낮은 수준(예를 들면, 행동

* 서울대 대학원

체계)으로부터 더 높은 수준(예를 들면, 표상)으로의 투사(projection)과 투사에 의해 옮겨진 것을 더 넓은 체계 내에서 재구성하고 재조직하는 반영(reflection)으로 이루어진다. 경험적 내용을 단순히 관찰하는 수준에서 확장적 일반화, 즉, 앞의 것을 재조직하는 것 없이 일부에서 모두로, 또는 특수한 것에서 일반적인 법칙으로의 일반화와 대조적으로, 반영적 추상화는 새로운 종합을 구성하며 그 종합 내에서의 특별한 법칙은 새로운 해석을 필요로 한다. 충분한 의식 없이 어떤 조작이 수단적 역할을 하는 단계로부터 이러한 동일한 조작이 주제가 되어 새로운 이론의 발달에 이르게 하는 이후의 단계로의 변화가 이루어진다. 반영은 두 가지 보완적인 이유로 인하여 구성적인 과정이다. 첫째, 사영은 근본적으로 앞의 수준에서 변환된 이전의 내용과 최초의 구조 안에서 통합될 수 있는 새로운 내용을 결합시키고 그 구조가 일반화되는 것을 허용하며 다음의 보다 높은 수준에서의 대응을 성립시킨다. 둘째, 이러한 처음의 조직을 통해 관련된 내용을 발견하게 되며 이 내용은 이전의 구조 속으로 직접 동화될 수 없는 것이다. 이것은 그 구조를 보다 넓은, 따라서 부분적으로 새로운 구조로 통합될 때까지 구성과정에 의해 변형시키는 것을 필요로 한다. 반영적 추상화와 구성적 일반화에 의한 이러한 구성 양식은 계속되는 각 수준에서 무한히 반복되며 인식의 발달은 하나의 메커니즘의 결과이다. 그러나 이 메커니즘은 구조의 새로운 조직의 창조와 새로운 내용의 첨가를 번갈아 함으로 끊임없이 새로워지고 확장된다 (Piaget & Garcia, 1989).

지식은 그 역사적 맥락에서 분리될 수 없기에 개념의 역사는 그 개념의 인식론적 의미에 대한 모종의 암시를 준다. 근본적인 문제는 개념이나 구조 혹은 특별한 분야에 대한 일반적인 시각이 발전되는 과정에서 중요한 단계를 어떻게 특징짓느냐 하는 것이다. 즉 그런 단계들이 있는지 그리고 그 순서를 설명할 수 있는지가 문제가 된다. 역사적 시기와 그 방향을 연구하는 것의 인식론적 관련성을 인정할 때, 심리발생의 관점에서 지식의 구성을 분석하는 것에서의 역사의 정보적 가치를 인지하게 된다. 역사-비평적 인식론과 발생론적 인식론 사이에 유사성이 있는 주된 이유는 자료를 이용하는 중요한 차이에 관계없이 두 종류의 분석이 항상 모든 수준에서 메커니즘과 반영적 추상화에 관한 유사한 문제로 수렴하기 때문이다. 이러한 메커니즘은 주체와 대상 사이의 초기의 상호작용뿐 아니라 하위단계가 다음의 형성에 영향을 주는 방식에도 작용한다. 이것은 모든 인식론적 발달에 공통되는 똑같은 일반적인 문제상황으로 이끈다.

Piaget의 관심은 개념의 내용이 아니라 그 구성의 공통된 수단과 메커니즘에 놓여진다. 가장 일반적인 유형의 메커니즘은 물론 추론의 본질과 관련된다. 과학사와 심리발생의 모든 수준에서 추론은 경험적 추상화뿐만 아니라 반영적 추상화에 관계된다. 역사적 순서와 심리발생의 순서 사이의 대응을 설정하려는 것이 아니라 역사상의 한 시기에서 다음 시기로의 변환을 중재하는 메커니즘이 심리발생의 한 단계에서 다음 단계로의 변이를 중재하는 메커니즘에 유사하다는 것을 보이는 것이 Piaget의 관심이며 그는 이러한 메커니즘의 특징을 intra-object, inter-object, trans-object의 수준으로 보고 있다. 이러한 특징이 개념의 심리발생과 역사적 발달의 모든 수준에서 발견된다는 그의 연구의 결론이다. 이러한 메커니즘의 일반성과 발달의 전체적인 순서 내에서뿐만 아니라 모든 하위수준에서도 발생한다는 것은 분명히 구성주의적 인식론을 옹호하는 좋은 논거가 된다

(Piaget & Garcia, 1989, pp. 28-29).

내조작적(intraoperational) 단계는 서로 별개의 형태로 표현될 수 있는 내조작적 관계가 그 특징이며 그 이름이 말해주듯이 내적인 요소를 포함한다. 그러나 이 내적인 요소들은 서로 결합될 수 없고, 불변하는 것이 있다는 것을 전제로 하는 어떤 변환도 포함하지 않는다. 간조작적(interoperational) 단계는 이전 수준에서 서로 별개인 형태 중에서의 대응과 변환 그리고 그러한 변환에 의해 요구되는 불변성이 특징이다. 초조작적(transoperational) 단계는 그 내적 관계가 간조작적 변환에 대응하는 구조의 발전이 특징이다(Piaget & Garcia, 1989, pp. 141-142). 또한 각 단계는 하위수준을 포함하며 그 하위수준은 똑같은 계열을 따른다. 초조작적 단계에 해당하는 세 번째의 역사적 시기를 그 예로 살펴볼 수 있다. 그 시기는 전체적으로는 초조작적 단계이며 그 하위수준들은 trans-intra, trans-inter, trans-trans라고 부를 수 있다. 이들 세 가지 중 마지막은 이전의 구조들을 새로운 구조 속에 통합시키는 것으로부터 생겨난다. 이들 새롭게 주제화된 조작은 보다 높은 수준의 구조에 이르게 된다. 예를 들어 다음과 같은 A, B, C의 세 단계가 있고 B가 a, b, c라는 하위수준을 갖는다고 가정하자. B의 하위수준인 a(intra 수준)에서조차 A가 B 유형의 연산에 종속된다는 의미에서 A에 대한 재해석이 이미 존재하며 B의 a의 요소는 하위수준 b에서의 inter유형의 변환에 포함된다. 이것은 하위수준과 단계의 계열 모두에서 intra, inter, trans 계열이 재조직에 의하여 구성을 계속해 가는 데에 반동적인 영향을 주도록 순향적인 의미에서 어떻게 구성되는가를 보여준다. 어떤 특정한 수준에서는 수학자나 아동 모두 단순한 관찰과 어떤 것의 발명을 의미하는 발견에 결코 만족할 수 없으며 각 단계에서 그들은 그들이 찾는 것에 대한 논거를 얻으려고 노력한다. 그때 이것은 이루어진 일반성과 관계에서의 고유한 필요성을 찾는 것으로 귀착된다. 왜냐하면 마지막 분석에서 명확한 논거에 의한 고유한 필요성을 얻지 않는다면 주체는 그 구성을 가치 있는 것으로 받아들이지 않기 때문이다. intra 수준의 특징적인 요소들간의 관계는 어떤 필요성도 갖지 않거나 여전히 매우 단순한 일반성에 가까운 매우 제한된 형태만을 이룰 수 있다. 단계를 변환의 결과로, 그리고 요소들간의 국소적인 변환을 수행하는 것으로 이해하는 것은 그 나름의 논거를 고유하게 결정하는 필연적인 관계로의 최초의 접근을 제공한다. 그러나 반대로 변환은 설명적인 근본적 논거를 요한다. 그리고 trans 수준의 특징인 탐구는 이 새로운 필요에 대한 반응이다. 왜냐하면 변환의 전체적인 체계는 새로운 변화를 생성하고 그 체계적인 구성에 대한 논거를 제시하기 때문이다. 그러나 이러한 전체적인 특징 자체는 상대적이며 구조에서 구조의 category로의 이행과 함께 그러한 움직임은 계속된다. 즉, intra에서 inter로 그리고 trans 수준으로의 계열은 단지 동등한 과정의 표현에 불과하다. 주관적인 면에서 그것은 설명을 향한 추구이며 객관적인 면에서는 그것은 항상 상대적으로 남아있지만 한 단계에서 다음 단계로 끊임없이 증가하는 필요성의 성취이다(Piaget & Garcia, 1989, pp. 168-169).

Piaget는 발생적 인식론의 부단한 목표는 지식의 자발적인 발달은 생물학적 유기체에 그 근원을 갖고 있고 논리적-수학적 구조의 구성을 향해 간다는 것을 보여주는 데 있다는 것을 상기시키기 원한다. 비록 생물학적 메커니즘과 인지적 메커니즘 사이의 가능한 유사성을 기초로 성립시키고자 했던 밀접한 관계를 보이지는 않지만 그는 심리학의 역할과 심리학과 과학적 사고의 역사와의 수렴성을 증명하고자 한다.

III. 대수의 역사

대수를 배울 때 대부분의 학생들은 기호체계가 대수에서 중심적이라고 생각한다. 사실 대수는 기호체계의 발달과 함께 발달하였다고 할 수 있다. Nesselmann은 대수적 표기의 역사적인 발달을 세 단계로 특징지었다. 첫 단계는 '수사적 대수'로 이 단계에서의 문제의 풀이는 생략이나 기호 없이 순전히 산문체로 씌어졌다. 그 다음 단계는 '약호 대수'로 이 단계에서는 자주 쓰이는 양(量), 관계, 연산 등을 위해 속기를 위한 생략이 이루어졌다. 마지막 단계가 '기호적(symbolic) 대수'로 이 단계에서는 풀이가 기호에 의한 속기로 널리 나타나는데 이 기호들은 그것이 의미하는 실체와 명확한 관계는 거의 없다(오혜영, 허민, 1994).

Piaget는 intra-, inter-, transoperational 단계에 집중하여 대수의 발달을 살펴보며 대수가 어떻게 수학의 한 분야로서 성립되었는지를 결정하기 위하여 대수의 기원에 대한 예비적인 탐구를 하였다(Piaget & Garcia, 1989).

대수의 기원을 아시리아, 바빌로니아, 이집트 등의 고대로 거슬러 올라가는 수학사가들이 많지만 일반적으로 Diophantus가 처음으로 산술문제를 기호로 형식화한 후에 그 문제를 풀고 방정식에서의 미지량을 표현하기 위하여 수가 아닌 문자로 나타낸 부정값을 도입하였다고 보는 견해가 지배적이다. Piaget의 역사적인 분석에서 Viète는 미지량을 단지 문자로 표현하는 것의 한계를 분명하게 인식한 르네상스 시대의 인물로 나타난다. 그의 '그리스 고전으로의 회귀'는 그로 하여금 Diophantus의 과학으로 되돌아가서 그것을 완성하게 하였고 현대의 대수의 출발점이 되었다고 일컬어진다. 그러나 이러한 유형의 해석에서 산술연산의 보다 적절한 표기를 도입하고 인도에서 들어온 개념인 영(zero)의 아이디어를 수로 도입하고 부정량을 나타내기 위하여 문자를 사용하는 것을 도입한 것을 제외하고는 아랍인들이 한 역할은 상대적으로 불명확하다. 이런 맥락에서, Viète의 연구는 박학한 학자의 연구, 과학의 창조적인 천재와 혁신자의 연구보다는 체계화의 연구로 생각된다(Piaget & Garcia, 1989).

Piaget의 역사적 분석은 Jacob Klein의 Die *griechische Logistik und the Entstehung der Algebra*를 바탕으로 하고 있다. Klein은 그리스 사고의 학문적 분석을 근거로 하여 Diophantus와 Viète의 연구와 16세기와 17세기에 발달된 대수에 대한 의식에 관한 근본적인 재해석을 도입한다. Klein의 주의깊은 연구는 Piaget로 하여금 대수의 기원을 대수 자체의 보다 최근의 단계에서뿐만 아니라 수학과 물리학의 다른 분야의 발달에서 발견한 메커니즘의 일반적인 schema 내에 둘 수 있게 하였다(Piaget & Garcia, 1989).

Diophantus와 Viète의 차이는 그 두 사람이 수학적 기호를 사용한 방법에서 정한 구별에 달려 있다. Diophantus의 '산술'에 공통적으로 속해 있는 대수적 특징은 방정식에서 특별히 미지량을 언급할 때 그가 다양한 약호를 사용하였다는 것에 근거한다. 이것은 보통 대수 기호체계를 구성하는 것으로 해석된다. 수많은 기하학적 실체를 나타내기 위하여 단지 문자를 사용하는 것만으로는 문제를 기호적으로 다루는 것이라고 할 수는 없다. Euclid와 그보다 이전의 Archytas도 그러한 표상을 사용하였는데 이러한 문자의 사용은 한계가 있었다. 문자는 단지 특정한 어떤 수를 나타내는 것이고 연산에서 사용되지 않았다. 이런 유형의 문자는 결코 기호가 나타내는 것이 그 자체로 '일반적 대상'이라는 생각에서의 기호는 결코 아니다. 문자의 사용이 기호적인 특징이 된 것은 16세

기에서부터였다. Diophantus가 일반적인 문제와 일반적인 해에 대하여 말한다는 사실은 고전적인 해석을 지지한다. 그럼에도 불구하고 Klein의 재해석은 -일반적이라는 용어의 대수적 의미에서- 이러한 표현에 있다고 생각하는 기호적인 특징에 대하여 의심을 던진다. 이 점에 대하여 그는 방법의 일반성과 연구 대상의 일반성 사이의 근본적인 차이를 도입한다(Piaget & Garcia, 1989).

Viète는 그리스 사고의 특징적인 방법론을 취하였으나 매우 다른 수준에서 Diophantus의 연구를 재조직할 수 있게 한 범위와 깊이를 주었다. Viète에 따르면 이런 형태의 연구에 주어진 분석(analysis)이라는 용어는 Théon에게서 비롯되었는데 그가 인용한 Théon의 정의는 '찾아야 하는 것이 이미 주어졌다고 여기고 찾아야 하는 것을 결정하고 이해하는 것에 이르는 것에 의하여 계속 나아가는 것'이다. 그 용어의 현재의 의미에서 보면 종합(synthesis)은 주어진 것을 취하고 찾아야 하는 것을 결정하고 이해하는 것에 이르는 것에 의하여 나아가는 것으로 시작되는 과정이다. 분석에 관하여서는, Viète는 그리스인에 의하여 이루어진 zetetic(이론적 분석)과 poristic(문제에 의한 분석)이라는 두 유형에 대한 또 다른 구별을 재도입한다. 그리고 나서 그는 세 번째 유형인 exegetic을 첨가한다. 찾고 있는 양과 주어진 양 사이의 방정식이나 비례를 찾는 zetetic 기술과 방정식이나 비례로부터 세워진 정리의 진실성을 연구하는 poristic 기술과 세워진 방정식이나 비례에서 찾고 있는 양 자체가 만들어지는 exegetic 기술이 있다. Viète의 형식화에서 본질적인 것은 양이라는 용어가 가장 일반적인 의미로 사용된다는 것이다. 서로 독립적인 두 가지의 연구 방법-Pappus의 기하학적 분석과 Diophantus의 산술적 방법-은 여기서 수렴한다. Viète의 새로운 대수는 기하학적이면서 동시에 산술적이며 고대인들이 이룬 것보다 더 높은 수준의 일반화를 획득하는 것을 필요로 한다. Viète는 수치적 계산(logistice numerosa)은 수를 조작하고 기호 계산(logistice speciosa)은 alphabet 문자 같은 형식이나 형태를 조작하는 것으로 보았다. 여기에서 핵심단어는 기호(espèces)이다. 기호(species)는 그 자체가 기호적인 구성물, 즉, 단지 그 잠재적인 객관성이 실제적인 객관성으로 이해되는 구성물이다. 따라서 형식은 Viète에게서 처음으로 zetetic을 나타낼 수 있는 것으로 완전하게 선언되는 기호적인 형식론의 언어 내에서만 이해될 수 있다. 그것과 함께 수학적인 자연과학의 가장 중요한 도구인 공식이 처음으로 가능해진다. 그러나 무엇보다도 고대의 인식에서는 도달할 수 없었던 이해의 새로운 방법이 열리게 된다. Viète로 하여금 새로운 학분 분야로서의 대수를 구성하게 하였던 그의 결정적인 차이는 수의 개념에서 일반적인 기호의 개념으로 도약한 것에 있다. 문자는 일반적인 수의 개념을 나타낸다. 여기서 Piaget는 Klein과 다르다. 그는 이 점을 강조하지 않지만 Piaget는 그것이 결정적이라고 생각한다. zetetic의 법칙이라는 제목이 붙은 Isagog의 제 5장은 방정식의 변환 규칙을 포함하고 있으며 Piaget의 견해로는 Viète의 형식화의 본질적인 면과 가장 중요한 인식론적 근거를 포함하고 있는 것으로 여겨진다(Piaget & Garcia, 1989, pp. 143-149).

Viète의 대수의 특징은 다음과 같다. 첫 번째로 비례가 중심적 역할을 하기 때문에 모든 방정식이 동차이어야만 한다. 즉 모든 단항이 같은 차수를 가져야 한다. 따라서 그의 대수는 단순하게 수치적인 것과 별로 다르지 않다. 그것은 단지 양의 산술에 근거한 대수이다. 둘째로, Viète로 하여금 문자에 관한 이론적인 계산

법을 구성하게 한 비례론의 추상화이다. 비에 있어서는 문자와 연산이 무엇을 의미하는지를 알아야 할 필요는 없으나 문자가 어떻게 연산되는지는 알아야 한다(Charbonneau, 1996, p.33). 로운 대수를 성립시키기 위한 더 높은 수준의 일반화를 발전시키는 데에서 Viète가 양의 도약을 한 것의 기초를 이루는 추론에 대한 이러한 해석은 이러한 방향의 사고를 직접적으로 이은 Descartes에 의하여 전개되었다.

고대 수학에서는 x, x^2, x^3을 길이, 넓이, 부피와 연결시켜서 각각 다른 질적 내용을 지닌 것으로 간주하였고 그에 따라 동질적이지 못한 방정식은 다룰 수 없었으나 Descartes는 x, x^2, x^3을 모두 길이를 나타내는 것으로 생각하였다. Descartes의 새로운 수 관념은 동질적이지 않은 방정식을 다룰 수 있게 하였다(오혜영, 허민, 1994). Descartes가 측도의 단위를 도입한 것은 양(예를 들면, 선분)의 수치적 표상을 찾으려 한 것이 아니라 기호적 표현의 조작에서의 단순화를 주기 위한 것이다. 그때 방정식은 동차일 필요가 없게 된다. Descartes는 간단하면서도 본질적으로 현재의 표기와 일치하는 기호 표기를 사용한다. Descartes의 기호적 대수는 동질성을 주장하지 않음으로써 Descartes의 대수는 Viète의 대수보다 훨씬 더 추상적이다.

Viète 이후에, 19세기 중반까지 대수의 연구는 방정식에 제한되어 있었다. 이차방정식을 풀기 위한 방법은 Viète 이전에 인도인에 의하여 발견되었다. 사실, 바빌로니아인들도 이차방정식을 풀 수 있었다. 삼사차방정식은 16세기 말까지 풀 수 없었다. 삼차방정식을 풀 수 있는 공식의 발견에 관한 Tartaglia와 Cardano 사이의 분쟁은 잘 알려진 것이다. 오랜 기간 동안 사차 이상의 방정식을 푸는 공식을 발견하려는 많은 노력이 있었다. 이 시기에 연립일차 방정식의 해를 구할 수 있게 되고 기하학이나 역학에 의하여 제시된 어떤 특별한 문제에 대한 대수적인 해를 발견하게 된다. 그럼에도 불구하고, 각각의 문제는 그 나름의 해법, 특별한 과정을 필요로 하며 역사적인 발달 과정에서 내조작적 시기에 해당한다. 17세기와 18세기의 전반부 동안 수학자들은 Leibniz와 Newton에 의하여 창조된 미적분에 그들의 관심을 집중시키고 있었다. 18세기 후반에 수학자들은 대수의 기본적인 정리를 포함하여 강력한 일반성을 갖는 문제를 대수적으로 형식화하는 것에 성공하였다. 이것을 성취하기 위하여, 그들은 연속함수와 무한소 계산에서 얻어진 변환의 성질을 이용하였다. Piaget의 일반적인 정의에 따르면, 이 시기는 간조작적 단계에 해당한다. 오랜 기간 동안 변환은 최초의 대수적 구조인 군(group)이 나타나기까지 대수를 지배하였다. 이러한 성취는 초조작적 단계를 향하여 대수 방정식의 이론을 이끌어가는 것이었다. 내조작적 단계에서 간조작적 단계로의 변천에서 중심되는 인물은 Lagrange이다. 다양한 차수의 방정식을 풀려는 경험적인 노력은 Lagrange에게 보다 일반적인 범위의 문제에 대한 길을 주었다. 삼사차방정식의 해의 성질과 그 해를 얻는 추론에 대한 고찰을 통하여 Lagrange는 고차방정식을 푸는 데 도움이 되는 아이디어를 얻는 것이 가능하다고 생각하였고 원래의 방정식의 차수를 낮추는 함수를 도입하여 푸는 방법을 도입하였다. 이러한 생각은 후에 군론에 이르는 아이디어를 포함하는 것이다. Lagrange는 방정식의 근에 대한 함수를 분석하고 x_i가 모든 가능한 방법으로 치환되었을 때 $x_1, x_2, \ldots x_n$을 근으로 갖는 함수 y가 만들어지는 값의 수는 n의 약수라는 것을 보였다. Gauss의 Disquisitiones Arithmeticae는 이 시기의 마지막에서 유일한 위치를 갖는다. 특히 Forms and indeterminate equations of the second degree라는 제목이 붙은 제 5절에서 Gauss는 부정이차방정식의 해에 관련된 이차방정식의 형식에 대하여 연구하였다. a, b, c가 주어졌을 때 $ax^2+2bxy+cy^2$의 형식의 미지수 x, y로 된 함수를 이차형식의 함수라고 하며 미지수 x, y에 주목하지 않을 때 위의 형식을 기호 (a, b, c)로 나타낸다. (a, b, c)로 나타내어진 형식의 성질은 b^2-ac에 의하여 결정되기에 이것을 이 형식의 판별식이라 부른다. 또한 미지수 x, y를 갖는 형식 F가 미지수 x', y'를 갖는 형식 F'으로 $x=\alpha x'+\beta y'$, $y=\gamma x'+\delta y'$에 의하여 변환될 수 있다면 F는 F'을 함의한다 또는 F'은 F에 포함된다고 한다. F가 F'에 포함되고 F'이 F에 포함될 때 두 형식의 판별값은 서로 같으며 이때 $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2=1$이다. Gauss가 비록 이차형식에 관한 것만 연구하였을지라도 두 개의 항과 세 개의 항을 가진 이차형식의 성질에 대한 그의 주의깊은 분석은 그의 중요한 주제가 되었다. Gauss에 의하여 연구된 형식과 그가 증명하였던 성질들은 군론으로 변화될 수 있었다(Piaget & Garcia, 1989, pp. 149-153).

사실 Gauss에 의하여 정의된 것과 같은 합성의 법칙을 가진 이차식은 Gauss가 principal class라고 부른 유목을 단위요소로서 갖는 아벨군이다. 군론에 관한 개념에 아주 가까이 접근해간 이들 저자들이 그것의 구성에 필요한 작은 단계를 거치지 못한 이유는 무엇인가? Piaget는 그 단계가 단지 작게 보일 뿐이라고 설명한다. 사실, Lagrange, Ruffini, Cauchy 그리고 몇몇 사람들과 함께 Gauss는 대수의 발달에 있어서, 그리고 특히 대수방정식에 관한 이론의 역사에 있어서 간조작적 기간의 마지막 대표자들이다. 그의 방법은 핵심적으로 함수를 변환시키고 고정된 관계를 발견하는 데 있었다. 그가 유도한 성질들은 단지 변환의 체계에서 불변인 것이다(Piaget & Garcia, 1989, pp. 155).

대수 방정식에 대한 연구에 있어서 마지막 단계는 19세기 후반에 이루어졌다. 이 과정에서 근본적인 것은 변수의 재해석이다. Gauss는 수가 직접적으로 관련되지 않은 연산을 처음으로 구성하였고 다양한 차수의 다항식을 연구하는 데 있어서 근본적인 질문을 수정하여 대수에서의 진보를 이룩하였다. 이제 방정식과 그것의 해를 연구하던 시기가 끝나고 구조가 지배하는 시기인 초조작적 단계가 되며 이 단계는 구조의 발달로 특징지을 수 있다. 이 시기는 수학에서 군을 최초로 주제화한 Galois와 함께 시작된다. 문제는 더 이상 어떤 종류의 수가 다항식의 성질이나 근을 결정하는가가 아니라, 고려해야 할 수의 성질은 무엇인가이다. 그러한 수의 성질은 매우 일반적인 것이며, 수의 특성만을 구성하지 않는다는 것이다. 원소들을 포함하는 수많은 집합들은 수가 갖는 것과 똑같은 성질을 갖는다. 따라서 원소들을 포함하는 유목에 공통되는 성질은 수학적 대상에 대해서만 특별히 정의되는 것이 아니라, 다른 것들에도 공통되는 구조를 정의하는 것이다. 이러한 구조를 연구했던 사람은 바로 Dedekind였고 그가 그것에 체(field)라고 명명하였다. 체란 유리수 전체, 실수 전체, 복소수 전체 등과 같이 그 범위 내에서 0으로 나누는 것을 제외한 모든 사칙연산이 가능하도록 정의된 집합을 말한다. 따라서 다항식과 대수 방정식을 연구하는 데 있어서 수로부터 추상화할 수 있다. 정수, 유리수, 실수 또는 복소수가 아니더라도 많은 실재하는 것들은 체의 법칙을 만족하며, 이들이 체를 구성한다는 사실을 입증할 수 있다. 다항식에서도 역시 항등원이 존재하며, 배분법칙이 성립하며 다항식도 체를 구성한다. Dedekind에 의하여 정의되고, 명명되었던 체의 개념은 이미 Abel과 Galois에 의해서 사용된 적

이 있다. 그러나 집합으로서의 체에 관한 생각은 Abel의 연구나 Galois의 연구에서는 나타나지 않는다. 그들은 둘 다 집합의 원소를 고려했고 그것을 정의하였다. 그러나 집합 자체는 그들의 연구 대상에서 제외되었다. Galois는 대수 방정식에 대한 해의 진보에 관련하는 한에서 초조작적 단계를 도입하였지만 군에 관한 시각에서 보면 관련된 관계는 내조작적이었다. 그 후에 그 자체가 군의 구성요소를 나타내는 사영변환과 같이, 구성적인 역할을 하는 변환군이 나타난다. 벡터공간에서 작용하는 것과 같은 임의의 유목에 관련되어 추상적인 군의 개념이 정교화되는 초조작적 단계가 된다. Dedekind가 대수적 체에 대한 구조를 확인하고 그것을 연구하였을 때 초조작적 단계로 향할 수 있었다(Piaget & Garcia, 1989, pp. 156-159).

IV. 결론

이상에서 Piaget의 반영적 추상화와 개념 발달의 메커니즘과 그 틀에 의하여 대수의 역사를 분석한 것에 대하여 살펴보았다. Piaget의 이론대로 심리발생에서 나타나는 메커니즘이 역사발생에서의 메커니즘과 동일하다고 보았을 때, 이러한 논의가 대수 학습에서 학생들이 갖는 어려움을 이해하는 데 도움을 줄 수 있다.

학생들이 대수를 학습하면서 겪는 어려움 중의 하나는 대수적인 기호에 대한 이해가 부족한 것에서 기인한다. 대수에서 나타나는 학생들의 어려움은 부분적으로 산술에서의 개념과 대수에서의 개념 차이에서 비롯된다. 학교에서는 보통 문자 x, z, a, b, c는 수를 나타내는 것이라고 배운다. 그러나 문자는 어떤 면에서는 수보다는 선분, 넓이, 부피에 훨씬 더 가깝다. 두 수를 서로 더하면 그 결과는 전혀 새로운 기호에 의하여 기호화되는 새로운 수이다. 처음의 두 수는 그 과정에서 사라진다. 기하학적 양에 있어서는 다르다. 두 선분을 이으면 새로운 선분이 된다. 이 새로운 선분의 표상으로 실제 직선을 사용하면 그것은 처음의 두 선분의 표상을 그 안에 갖고 있다. 문자를 사용하면, 새로운 선분을 나타내는 문자는 그 자체로는 의미를 갖지 않으며 따라서 처음의 선분을 특별히 언급하지 않고는 해석될 수 없다.

학생들이 중학교 과정에서 문자가 도입되고 그것을 다루는 것을 어려워하는 이유를 Piaget가 말하는 내조작적 시기와 관련지어 생각해 볼 수 있다. Viète 이전에는 거의 대수라고 할 수 없으며 수사적인 형태로 문제를 풀거나 간단한 약호를 사용하는 정도에 지나지 않았고 Viète와 Descartes에 의하여 수의 개념으로부터 일반적인 기호로의 이행이 가능해지게 되었다. 고대인들이 실현할 수 없었던 것이 새로운 학문인 대수에 의하여 수행되었다. Viète의 대수의 힘은 문자에 대한 연산이 의미론적이 아니라 연산적으로 정의된다는 사실에서 나온다. 그러한 문자 곧 기호와 기호의 연산을 학생들이 쉽게 받아들인다는 것은 사실상 어렵다. 역사적으로 오랜 시기 동안 구체적인 수 개념에 머물러 있고 일반적인 기호로 이행하기가 쉽지 않았고 또 산술이 발달하였던 많은 문화권에서 그런 이행이 나타나지 않았기에 대수가 나타날 수 없었다는 사실에 비추어 생각해 볼 때 학생들이 그러한 내용을 쉽게 학습하기는 어렵다.

관계를 기호적으로 표시한다는 의미에서 대수적 추상화가 수학의 핵심이라면 변수 개념은 대수의 핵심이라고 할 수 있다. 대수는 관계를 다루는 주요한 수단이며 관계를 다루는 것은 다른 것에 관련되는 대상을 다루는 것을

의미한다. 방정식을 세우고 푸는 것과 함수를 학습하는 것에 있어서의 변수의 개념은 중요하지만 많은 학생들은 변수의 의미를 잘 모른다. 대수를 학습할 때 학생들은 처음 변수 개념에 접하게 되는데 오늘날은 변수를 단순히 어떤 대상을 대신하는 기호로써 생각하는 경향이 있다. 변수 개념은 다면적인 개념이지만 Usiskin에 의하면 많은 학생들은 변수를 단지 수를 대신하는 문자로 생각한다(NCTM, 1988).

대수가 처음으로 독립적인 학문으로 성립되었을 때 그 중심적인 주제는 방정식의 해였다. 초기의 매우 오랜 시기 동안 유일한 관심은 특정한 방정식에 대한 해를 찾는 것이었다. 사용된 방법은 매우 경험적이었고 시행착오적이었다. 각 방정식은 별개의 대상으로 다루어졌다. 수학자들이 보다 일반적인 방법을 찾고 더 중요하게는 해의 존재 유무에 관한 일반적인 문제를 형식화하기 시작한 것은 18세기에 이르러서였다. 간조작적 단계에서 볼 수 있는 판별식이나 문자의 치환과 변환의 개념을 학교대수에서는 방정식, 함수와 관련하여 중요하게 다루고 있지만 많은 학생들이 어려워하는 것을 볼 수 있다. 많은 학생들의 사고가 간조작적 단계로 쉽게 이행하지 못하고 있음을 알 수 있다.

대수의 역사적 발달 과정에서 발견되는 발달의 유형은 변환의 체계가 변환이 본질적인 변화를 이루는 전체적인 구조와 관련될 수 있기 위해서는 오랜 기간이 필요하다는 것을 보여준다. 군 구조와 같은 구조에 관심을 갖게 되는 것은 그보다 훨씬 더 이후이다. 학교에서는 비록 군이나 체라는 용어에 강조를 두지는 않지만 집합에서 연산이 정의되고 그 연산에 대한 항등원과 역원을 가르치는 내용을 비교적 일찍 가르치지만 이것을 학생들이 잘 학습한다는 것은 어렵다. 기계적으로 풀 수 있게 할 수는 있을지 모르나 왜 그러한 구조에 대하여 배워야 하는지 이해하는 학생은 거의 없을 것이다. 역사적으로 볼 때 변환의 개념을 이해한 후에야 초조작적 단계에서 도달할 수 있었던 것을 그러한 의미를 이해할 수 없는 학생들에게 형식적으로 제시함으로 어려움을 야기하게 된다.

심리발생과 역사발생에 있어서의 Piaget의 개념 발달의 메커니즘에 의하면 학생들이 대수를 학습하면서 갖게 되는 어려움은 당연한 것이라고 볼 수 있다. 물론 지식의 사회학적인 측면에서 볼 때 Piaget의 이론에 대하여 비판을 할 수 있다. 지식은 자연적인 발달의 테두리 안에서 이루어지는 것이 아니라 사회문화적 발달 내에서 이루어지는 것이기에 단순히 학생의 심리발생과 역사적 발달 과정을 대응시킨다는 것은 무리라고 볼 수 있다(Radford, 1997). 그러나 학생들이 문자와 그 연산과 변수의 개념과 방정식을 푸는 것에 담겨있는 분석적 사고를 이해하고 군 구조와 같은 수의 구조를 이해하는 것에서의 어려움에 대하여 Piaget의 개념 발달의 메커니즘을 통하여 이해할 수 있다.

대수의 발달에서 대부분의 사람들이 도달할 수 없었던 수준으로 발달하기 위해서는 내조작적 단계에서는 Viète, Descartes, 간조작적 단계에서는 Lagrange, Gauss, 그리고 초조작적 단계에서는Galois, Dedekind의 도약이 필요하였던 것처럼 학생들이 스스로는 거의 대부분 도달할 수 없는 수준으로 발달하게 하기 위해서는 교재 내용과 지도 방법에 대한 연구가 필요하다.

참고문헌

오혜영, 허민(역). 수학의 위대한 순간들(Eves, Great Moments in Mathematics). 경문사. 1994

Brousseau, G.(1983). Les Obstacles Epistemologiques et les Problemes en Mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 4(2), 165-198

Charbonneau, L.(1996). From Euclid to Descartes : Algebra and its relation to geometry. In Bednarz, Kieran, C., & Lee, L.(Eds.), *Approaches to Algebra.* Kluwer Academic Publishers.

NCTM.(1988). *The ideals of algebra k-12 Reston, VA:Authon.*

Piaget, J., & Garcia, R.(1989). *Psychogenesis and the history of science.* New York: Columbia University Press.

Radford, L.(1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mahemics : Towards a socio-cultural history of mathe- matics. *For the Learning of Mahemaics,* 17, 26-33

Piaget's Mechanism of the Development of Concepts and the History of Algebra

Min, Se Young

This study is on the theory of Piaget's reflective abstraction and the mechanism of the development of knowledge and the history of algebra and its application to understand the difficulties that many students have in learning algebra. Piaget considers the development of knowledge as a linear process. The stages in the construction of different forms of knowledge are sequential and each stage begins with reorganization. The reorganization consists of the projection onto a higher level from the lower level and the reflection which reconstructs and reorganizes within a lager system what is transferred by projection. Piaget shows that the mechanisms mediating transitions from one historical period to the next are analogous to those mediating the transition from one psychogenetic stage to the next and characterizes the mechanism as the intra, inter, trans sequence. The historical development of algebra is characterized by three periods, which are intra-, inter-, transoperational. The analysis of the history of algebra by the mechanism explains why the difficulties that students have in learning algebra occur and shows that the roles of teachers are important to help students to overcome the difficulties.