大韓數學教育學會 論文集 第 8 卷 第 2 號
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
Vol. Ⅷ, No.2, 475-484. December 1998

컴퓨터 환경에서 교수학적 변환의 가능성

이 종 영*

1. 서론 - 컴퓨터가 도입된 교수학적 상황

지금이 정보화 사회라고 하지만, 여전히 우리의 교실은 기존의 산업 사회의 산물이다. 산업·경제적인 목표와 민주주의 발달을 위해, 많은 사람들이 교육을 받아야 했던 기존 사회는 교육의 대상으로 많은 학생들을 동일한 장소에 모아놓고, 지식 사회의 대표자인 교사와 마주 보는 형태로 지식의 전수가 이루어져 왔다. 지식이 교사와 학생의 의사소통의 관심사이지만, 나중에는 쓸모가 있겠지만 학습하는 당시에는 아무런 쓸모가 없는 지식을 교사를 만족시키기 위하여 학생들은 구성한다. 이런 의사소통을 위해서는 지식의 올바른 의미를 학생들이 제대로 구성할 수 없다(Balacheff, 1991). 이러한 환경에서 교사와 학생 사이의 상호작용은 지식의 가치를 그 지식의 사용 가능성을 잃어버린 지식으로 바꾸어 버리는데, Brousseau는 이런 패러독스를 다음과 같이 묘사하고 있다.

> 교사가 학생들이 구성하기를 바라는 행동을 위해 기도하는 모든 활동은, 가르치려는 지식을 이해하고 학습하는데 필요한 조건을 앗아 가버린다. 교사가 학생들에게 자신이 원하는 바를 말하지만, 교사는 그것을 가질 수 없다.(Brousseau, 1986)

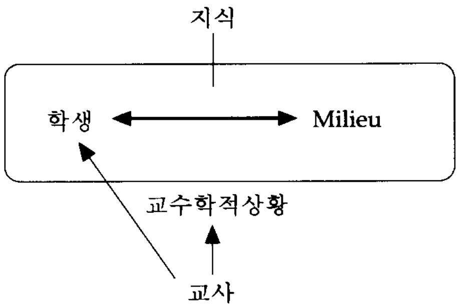
교사와 학생이 직접 상호작용함으로써 생기는 이러한 어려움을 극복하기 위해서는, 특별히 조직된 학습 자료를 학생에게 제공하여 주고, 이런 교수 자료와 학생 사이의 상호작용을 통하여 나타나는 특성이 교사가 지도하려는 지식이 되는 상황을 고안하는 것이다.[1] 이는 Brousseau가 개발한 교수학적 상황론을 의미있게 만들어 준다. 이는 특정 지식을 학생들이 구성할 수 있도록 고안된 환경(milieu)을 학생들에게 제공하여 주고, 학생과 교사 사이에 타협하는 하나의 '게임'이다. 여기서 중요한 것은, 학생과 milieu와의 상호작용이 교사와는 잠정적으로 고립되어 이루어져야 한다는 점이다.

이러한 교수학적 상황에서 교사는 학생과 학습 자료 사이의 상호작용을 조직하는데 핵심 역할을 수행하며, 학생들이 상호작용에 의미를 부여할 수 있는 맥락을 제공하고, 학생과 타협하는 등의 중요한 역할을 한다. 이를 도식으로 나타내면 <그림 1>과 같다. 지식은 교사가 교수학적 상황이라는 틀 속에 조직한 milieu와 학생들 사이의 상호작용의 결과이다.

이제 컴퓨터가 도입된 상황을 고려하여 보자. 컴퓨터와 관련된 기술이 급격히 발달함에 따라, 컴퓨터의 성능과 속도는 향상되고, 강력한 기능들이 추가되고 있지만, 컴퓨터의 가격은 점점 하락하고 있다. 그리고 소프트웨어

* 서울대 대학원

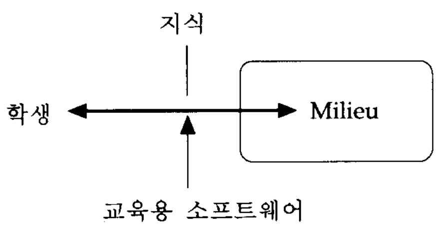
1) 학습에 관한 구성주의 이론은 이에 대한 이론적 토대가 될 수 있을 것이다.



<그림 1>

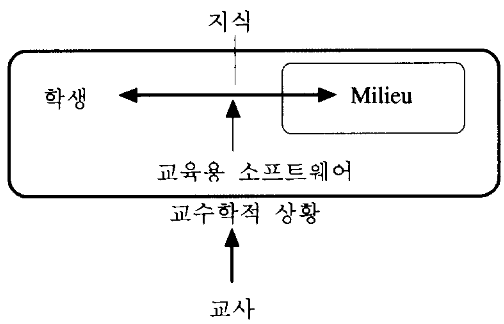
기술이 발전하면서, 인공지능의 연구 결과를 교육용 소프트웨어에 적용하면서, 학생과 컴퓨터 사이의 인터페이스에서는 교사와 같은 제 삼자의 역할이 줄어들고, 학생과 컴퓨터 사이의 상호작용에서 학생들이 범하게 되는 오류는 학생들에게 죄책감으로 이끌지는 않을 것이다. 따라서 학습자와 지식 사이의 거리를 훨씬 가깝게 할 수 있다는 생각도 하고 있다(Ballachef 1991).

교수 환경에서 컴퓨터를 도입한 컴퓨터 기반 교수-학습 환경은 <그림 1>을 <그림 2>처럼 변화시킬 것이다. <그림 2>에서 나타나는 상황은 CAL, CAI, CBT 등과 같이 다양하게 명칭이 붙으며, 여기에 인공지능 요소가 가미되면, ICAL, ICAI, ITS 등의 명칭으로 바뀐다.[2)]



<그림 2>

교사는 컴퓨터 소프트웨어와 학생의 만남을 조직하여야 하고, 언제 만남이 이루어져야 할지를 결정하여야 한다. 또한 교수학적 과정의 맥락에서, 그러한 만남이 왜 일어나야 하는지를 알고 있어야 한다. 교육용 소프트웨어와 학생 사이의 상호작용의 목적은 지식의 습득이다. 이 상황에서 학생들은 교육용 소프트웨어가 의도하는 것뿐만 아니라 교사의 의도를 여전히 파악하고 있어야 한다. 그러므로 교육용 소프트웨어는 교사가 교수학적 상황을 조직하는 수단이 되며, <그림 2>는 <그림 3>처럼 바뀔 것이다.



<그림 3>

교사가 컴퓨터를 수단으로 교수학적 상황을 조직하는 경우, 교사는 컴퓨터가 지식을 어떻게 표현하며, 정보를 어떻게 다루는지를 알아야 한다. 뿐만 아니라 학생들도 이에 대해 어느 정도 알고 있어야 컴퓨터와 상호작용을 위한 의사소통이 가능할 것이다.

컴퓨터의 독특한 한계로 인해, 컴퓨터 환경에서 다루려는 지식이 그 의미가 변화될 수 있다. 컴퓨터의 성능이 급격히 향상되고 있지만, 인간이 만든 기계로 제한점을 가지고 있다. 이런 제한점으로 인해 컴퓨터 상황에서 표현되는 수학

2) CAL: Computer Assisted Learning, CAI: Computer Assisted Instruction, CBT: computer Based Teaching, ICAL: Intelligent Computer Assisted Learning, ICAI: Intelligent Computer Assisted Instruction, ITS: Intelligent Tutoring System.

적 지식에 변화가 필연적인데, Balacheff (1991)은 이를 컴퓨터에 의한 교수학적 변환(computational transposition)이라고 하였다. 본고에서는 컴퓨터의 한계점에 대해 살펴보고, 컴퓨터에 의한 교수학적 변환에 대해서도 살펴볼 것이다.

학생들이 지식을 구성할 때, 컴퓨터라는 독특한 기계의 영향을 고려하여야 한다. 학생들 눈에는 컴퓨터가 인간과 같은 지적인 능력을 가진 비물질적인 존재로 보일 수 있다 (Balacheff 1991). 학생들의 이런 생각은 교사와의 직접적인 교수 상황에서 학생들의 학습이 교사의 기대에 부응하기 위해 이루어지는 것처럼, 컴퓨터의 의도에 부합하기 위한 학습으로 전락할 수 있다. 따라서 <그림 3>과 같은 교수학적 상황을 학생들에게 제공하였을 때, 학생과 컴퓨터 사이의 상호작용의 특성을 파악하는 것은, 효율적인 교수상황을 제공하는데 필수적인 선행조건일 것이다. 이에 대해서도 간략하게 살펴볼 것이다.

2. 컴퓨터의 한계

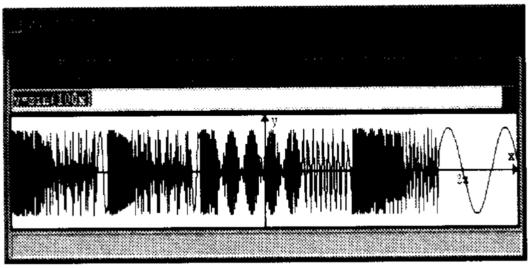
(1) 하드웨어의 한계

컴퓨터를 이용한 수학 교수·학습용 소프트웨어를 제작하기 위해서는 먼저 사용할 컴퓨터의 성능 - 처리 속도, 메모리 용량, 정보 저장 용량, 운영체제, 지원하는 프로그래밍 언어의 종류 -과 사용 가능한 프로그래밍 언어의 특성 등을 고려하여야 한다. 프로그래밍 언어의 종류에 따라 실수의 정밀도가 다르다. 초기의 로고 언어는 소수점 아래 두 자리까지만 표현이 가능하고, 보통의 수학 교과서에서는 분수 표현을 많이 사용하나 컴퓨터 환경에서는 분수 표현이 용이하지 않고, 보통 소수 표현을 많이 사용한다. 아울러, 컴퓨터 환경에서는 무리수를 나타내기 어려워, 무리수의 참값 대신에 그 근사값을 다룰 수밖에 없다. 보통의 수학 교실에서는 원주율 π의 참값이 무엇인지 그리고 그 근사값이 무엇인지 몰라도 되며, 계산과정에서 π는 하나의 문자로 생각하여 계산한다. 매스매티카나 메이플 등과 같은 수학 기호나 문자를 처리할 수 있는 프로그램에서는 π를 문자로서 계산이 가능하지만 다른 소프트웨어에서는 그렇지 못하고, 3.141592 등의 근사값을 가지고 계산할 수밖에 없다.[3)]

또 컴퓨터 환경에서, 수학적 대상이 표현되는 화면은 보통 800×600의 픽셀로 이루어져있는데, 이런 화면에서 직선은 직선이 아니라 굴곡이 있는 직선으로 보일 수 있으며, 미분 가능한 함수의 그래프도 부드럽지 못한 그래프로 보일 수 있으며, 미분 불가능한 함수의 그래프가 부드러운 곡선으로 보일 수도 있다. 또한 컴퓨터 환경에서 정사각형을 그렸어도, 화면을 통해 우리에게 지각되는 대상은 정사각형이 아니라 직사각형으로 보일 수도 있다. 원의 접선은 그 원과 한 점에서 만나는 것이 아니라 여러 점에서 만나는 것으로 보일 수가 있다. $y=\sin(kx)$의 그래프를 컴퓨터 화면에 그리는 경우를 생각하여 보자. k의 값이 작은 경우에는 문제가 없으나 k의 값이 클 때, 컴퓨터 화면에 보여지는 그래프는 <그림 4>처럼 우리가 생각하는 것과 매우 상이할 수

3) Maple, Mathematica같은 CAS(Computer Algebra System)에서는 원주율 값 π를 pi로 표현한다. 그리고 보통의 프로그래밍 언어보다 사용하는 실수의 정밀도가 상당히 크다. 이것은 컴퓨터(프로그래밍 언어)에서 제공하는 수의 정밀도의 한계를 소프트웨어적으로 극복한 것으로, 이렇게 함으로써 소프트웨어의 크기는 엄청 커지게 된다.

있다.[4)]

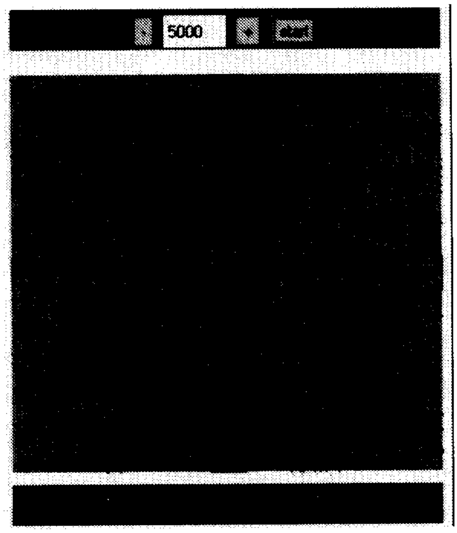


<그림 4> 컴퓨터 화면상에 보여지는 $y=\sin(100x)$ 의 그래프

(2) 소프트웨어(알고리즘)의 문제

컴퓨터 환경에서 모의실험을 하기 위해서는 난수를 발생시키는 컴퓨터 기능이 필수적인데, 컴퓨터 환경에서 난수 발생은 여러 수학적인 알고리즘에 의해 생성할 수 있는데, 이런 알고리즘은 그 프로그램을 작성한 사람을 이미 알고있기에 진정한 난수라고 할 수 없다. 그래서 이를 의사난수(pseudo-random number)라고 한다. 컴퓨터의 난수 발생 기능을 이용한 모의실험을 생각하여 보자. 수학의 기하학적 확률을 이용하여 미지의 값을 근사적으로 구하는 방법을 몬테칼로 방법이라고 한다. 다음과 같이 난수를 발생시켜 원주율(π)의 근사값을 구하는 상황을 생각하여 보자. <그림 5>

한 변의 길이가 40인 정사각형 모양의 과녁에 반지름의 길이가 20인 원이 내접하고



<그림 5>

있다. 이 과녁에 임의의 점을 찍을 N번 찍을 때, 원안에 S개의 점이 찍혔다고 하자. 임의의 한 점이 원안에 찍힐 확률은 기하학적 확률로

$$\frac{\text{원의 넓이}(400\pi)}{\text{사각형의 넓이}(1600)}=\frac{\pi}{4}$$

가 되고, N이 점점 커질수록 $\frac{S}{N}$는 이 확률값에 가까워질 것이다. $\frac{4S}{N}$는 π의 값에 가까워질 것이다. 이런 관계를 이용하여 컴퓨터의 난수 발생 기능을 이용하여 모의실험할 때 생각할 수 있는 문제는, 정말로 참인 난수는 우리가 주사위나 정이십면체를 던져서 밖에 얻을 수 없다는 점이다. 컴퓨터에서 난수는 참인 난수가 아닌 의사 난수이며, 이 난수는 사용된

4) 이런 일이 벌어지는 것은 컴퓨터에서 기본적으로 사용하는 그래픽 알고리즘이 고정점 실수(정수)를 사용하며, 곱셈보다는 덧셈을 이용하여 근사적으로 점의 위치를 구하기 때문이다. 정밀도가 높은 부동점 실수를 사용하던가 곱셈을 사용하면, 컴퓨터의 계산 속도는 상당히 느려진다. NCTM(1989) 에서는 이산 수학에 대한 규준에서 다항식에 대한 알고리즘 접근 방식을 소개하고 있다.
$p(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ 와 $p(x)=(((a_0x+a_1)x+a_2)x+a_3)x+a_4$의 두 다항식을 계산할 때, 요구되는 연산의 수를 비교하여 알고리즘의 효율성에 대한 토론을 제안하고 있는데, 앞의 다항식은 계산을 위해 곱셈이 11번이 필요하지만, 뒤의 다항식은 4번만 필요하다. 그 만큼 컴퓨터는 훨씬 빠르게 계산할 수 있다. 그리고 이렇게 곱셈을 적게 사용하는 알고리즘은 곱셈을 수행함으로써 생기는 계산의 오차를 그 만큼 줄일 수 있다.

알고리즘에 따라 우리가 원하는 결과를 얻지 못할 수 있다[5]. 그리고 정사각형 모양의 과녁에 한 점을 찍을 때, 그 점이 원주 위에 있게 될 확률은 0이다. 원주의 넓이는 0이기 때문이다. 그러나 컴퓨터를 이용하여 실험할 때는 점이 원주 위에 있을 수 있는데, 이 점을 어떻게 고려해야 하는가가 문제가 된다. 그러나 이런 문제에 대한 토론은 학생들의 확률에 대한 개념을 심화시키는 것으로 이끌 수도 있을 것이다.

(3) 수식 표현과 관련된 문제

수학이 문명 사회 건설에 결정적으로 기여해온 주된 측면은 기계적인 기호 조작 체계로서의 알고리즘이며, 수학교육은 기호체계에 대한 의미있는 자동 조작을 가능하도록 노력하고 있다. 수리철학자 화이트헤드는 훌륭한 기호체계의 중요성을 다음과 같이 기술하고 있다.

> "기호 체계의 도움으로 단지 보는 것만으로 거의 기계적인 추론을 진행시킬 수 있는 데, 이 경우 기호체계가 없었더라면 고도의 두뇌활동이 필요할 것이다. 매사 우리가 하고 있는 것을 생각해 보는 습관을 길러야 한다고 많은 저명한 인사들이 거듭 주장하고 있지만 사실은 그렇지 않다. 문명은 우리가 생각지 않고도 수행할 수 있는 중요한 조작의 수가 늘어남에 따라 발전한다. 사고 조작은 전투에서 기병대의 돌격과 같은 것으로 그 수가 엄격히 제한되며 힘찬 말들이 필요하고 결정적인 순간에만 행해지는 것이다"(Whitehead, 1911, p.61).

따라서 수학 학습이 효율적으로 진행되려면, 수식 조작의 초보적인 과정이 자동화되어 일일이 그에 주의를 집중하지 않도록 되어야 한다. 우리가 지필을 사용할 때는 수식 하나 하나에 주의를 기울이지 않고도 수학적 사고를 진행시켜 나갈 수 있다. 그러나 기본적으로 컴퓨터 환경에서는 수식 표현이 쉽지 않거나 우리가 수학에서 사용하는 것과 상이할 수 있다. 그리고 수학과 같은 수식 표현이 가능하더라도, 수식 하나 하나에 주의를 집중하지 않고서는 정확한 수식 표현이 불가능하다. 이렇게 수식에 주의를 기울이는 것은 수식에서 연산 순서나 수식의 의미를 이해하는데는 도움이 될 수 있지만, 수식에 대한 자동성이 성취되어 그런 주의가 필요 없을 때도 수식 하나 하나에 주의를 집중시켜야 한다는 것은 곤혹이며 생산적 사고를 행하는데 방해 요인이 될 것이다. 학생들이 컴퓨터 환경에서의 수식 표현에 숙달되면, 이런 것이 큰 문제가 되지 않을 수도 있다. 하지만 학교 대수의 수식 표현과 그것의 조작에도 익숙하지 않은 상태에서 새로운 수식

---

5) 컴퓨터를 가지고 난수를 발생하는 알고리즘은 Mid-square 방법, Mid-product 방법, Lehmer-congruence 방법 등 3가지가 있다.
가장 일반적으로 사용하는 방법은 Lehmer-congruence 방법으로 두 수 k, m이 주어져 있고, 초기값이 x_0이면, 점화 $x_{n+1} = kx_n \pmod{m}$ 으로 구한다.
Mid-square 방법은 두자시 수로부터 시작하여, 그 수를 제곱한 다음, 백의 자리와 십의 자리 두 숫자를 가지고 두자리 수를 만든 다음 이를 다시 제곱하여 다음 수들을 계속 얻는 것이다. 그런데 처음 수 x_0를 75로 잡으면,

$$\begin{array}{ll} x_0^2 = 5625 & x_1 = 62 \\ x_1^2 = 3844 & x_2 = 84 \\ x_2^2 = 7056 & x_3 = 05 \\ x_3^2 = 0025 & x_4 = 02 \\ x_4^2 = 0004 & x_5 = 00 \\ \multicolumn{2}{c}{x_6 = x_7 = x_8 = \cdots = 00} \end{array}$$

가 되어 난수가 비정상적으로 발생한다.(Oldknow, et al, 1983, pp.117-118)

표현 방법을 학습한다는 것은 학생들에게 커다란 부담이 될 것이다.

3. 컴퓨터 환경에서 교수학적 변환

(1) 교수학적 변환의 의미

일단 어떤 지식이 가르칠 대상으로 선정되면, 이 대상에 일련의 적절한 변환 과정을 적용하여, 그 대상을 다른 가르칠 대상들 속으로 배열하게 된다. 이렇게 지식을 교수학적 대상으로 변환시키는 과정을 교수학적 변환이라고 부른다(Chevallard 1985). 이런 변환 과정은 그 지식의 의미를 보존하면서, 단지 가르치려는 지식의 복잡성을 완하시키는 단순화 과정이 아니다. 이 새로운 교수 대상을 기존의 교수 대상과의 사이에 새로 설정하는 관계 때문에 그리고 그 대상을 가르치는 것이 가능하게 하기 위해, 그 것을 단계 지우는 활동 때문에 교수학적 변환은 지식의 의미를 변화시키게 된다 (Ballacheff, 1991).

이런 과정만이 가르치려는 내용을 변화시키는 것이 아니다. 가르칠 지식이 교실에 도달할 때, 그것은 교사의 의해 발생하는 새로운 교수학적 변환 과정의 대상이 되어, 교수 학습에 관한 교사 자신의 신념, 수학에 대한 철학 등에 의해, 그 지식을 변환시켜 자기 교실에서 가르치게 될 것이다. 또한 교과서 저자도 자신들의 신념에 의해 수학적 지식을 변환시킬 것이다. 강완은 수학 교과서에 나타나는 교수학적 변환을 규명한 바 있고(Kang & Kilpatrick, 1992), 이경화는 확률 개념의 교수학적 변환에 관해 연구하였다(이경화, 1996).

(2) 컴퓨터에 의한 교수학적 변환

컴퓨터가 도입된 환경에서, 컴퓨터는 지식 변환의 새로운 원천이 된다. 컴퓨터에 의한 교수학적 변환은 앞에서 살펴 본 컴퓨터의 한계에 의해서 이루어지지만, 소프트웨어를 고안하는 사람 신념에 의해서도 이루어지며, 동일한 수학 내용을 가르치기 위한 소프트웨어도 어떤 알고리즘을 사용하고 지도하려는 초점에 따라 다른 표현 양식을 가질 수 있다. 이제 Ballacheff(1991, 1996)가 언급한 컴퓨터에 의한 교수학적 변환의 예에 대해 살펴보자.

CABRI-GEOMETRY(이하 CABRI)에서 주어진 한 선분 위의 점을 아무런 제약없이 잡을 수 있다. 이렇게 아무런 제약없이 잡은 점을 "임의의 점"이라고 하자. "임의의"라는 말을 쓴 것은, 점을 랜덤하게 잡았다는 의미를 보존하기 위해서이다. 선분의 한 끝점을 마우스를 이용하여 드래그하면, 이 "임의의 점"도 이동하여야 한다. 그러나 CABRI에서 이 "임의의 점"은 그 선분을 동일한 비율로 분할하는 제약을 갖고 있다. "임의의 점"이 처음 선분을 m : n으로 내분하는 위치에 있었다면, 선분의 양 끝점을 드래그하여 선분의 길이를 변화시켜도, 이 "임의의 점"이 선분을 내분하는 비율은 변하지 않는다. 따라서 이 "임의의 점"은 더 이상 임의의 점이 아니다.

지필 환경에서 도형을 그릴 때, 그 순서는 커다란 문제가 되지않는다. 그러나 CABRI에서는 이런 순서가 중요하다. 다음 예를 들어 보자. 정삼각형은 한변의 길이가 주어지는 것으로 완전하게 정의할 수 있다. CABRI에서는 두 원을 이용한 전통적인 작도 방법을 따라서 매크로 작성으로 정의할 수 있다. 이 매크로 작성에서 문제가 되는 것은 선분의 양 끝점이다. 이 매크로에는 두 개의 점을 입력하여야 하는데 이 두점을 입력하는 순서가 달라지면, 작도되는 삼각형의 방향이 달라진다.

이런 순서의 도입은 기하학적인 마이크로 월드를 역학적인 마이크로월드로 변화시킨다. 일단 도형이 작도되면, 그것이 작도된 방식과 관련된 몇가지 특성을 가지게 된다. 이 도형을 이루는 기본 점들이 드래그 되면, 이런 특성은 분명해진다. 이런 드래그에 의해, 몇몇 점들 혹은 그 도형을 이루는 일부 요소는 결합 조건에 따라서 나타나거나 사라질 수 있다.

소프트웨어를 구현할 때 컴퓨터에 의해 생기는 변환의 다른 예로 Ballacheff(1991, p.151)는 대수식의 표현을 들고 있다. 대수에서 다루는 대수식을 컴퓨터에 표현하기 위한 방법에는 두가지가 있다. 하나는 대수식을 문자열(선형 구조)로 보는 것이고, 다른 방법은 트리구조를 대수식을 표현하는 것이다. 그러나 이렇게 대수식을 컴퓨터에 내적으로 표현하는 방법은 시스템의 인터페이스 상에서 가능한 조작의 종류를 고정시킨다. 만약 트리 구조가 선택된다면, 학습자의 대수식 조작은 가능하지 않다. 가령 $5x+2x$ 는 $5x+2x(x-3)$ 에서 뺄 수가 없다. 혹은 $5+3x \rightarrow 8x$ 와 같은 변환은 의미를 갖지 못한다. 반면에 선형 구조를 선택하면 이러한 조작이 가능해진다. 그래서 기초적인 대수식의 조작에 대한 학생들이 성공했는지 실패했는지를 판가름할 수 있다. 프랑스의 Nicaud가 개발한 APLUSIX는 대수식의 내부 표현을 선형리스트로 구현하여 다항식의 인수 분해 등 조작을 위한 것이고, PIXIE는 대수식의 내적 표현으로 트리 구조를 선택하여 대수식의 구조에 대한 학습을 위한 프로그램이다(Vivet et. al. 1993).

컴퓨터에 지식을 모델링하는 혹은 표현하는 방법의 선택은 교수학적 변환의 그것과 유사한 과정을 통하여 지식의 의미를 변화시킨다. 그래서 어느 정도 학습자의 의미 구성에 영향을 미칠 것 같다. 이런 문제와 현상은 지식을 컴퓨터 환경에 이식하는 과정에 따른 일반적인 제약의 결과이다. 이렇게 하나의 지식 모델을 컴퓨터 환경에 구현하는 과정을 컴퓨터에 의한 교수학적 변환이라고 한다(Balacheff 1991).

이에 해당하는 하나의 예를 더 들어 보자. 기하학적 대상을 표현하는 수단과 그것을 조작하는 도구 등의 차이점은 기하학적인 의미를 변화시킬 수 있다. LOGO 언어와 CABRI에서 원의 의미에 대해 살펴보자. LOGO의 경우 원은 매우 많은 변을 가진 정다각형으로 정의된다. 이렇게 정의되었을 때, 이 원은 곡선의 굽는 정도가 일정하다는 의미에서 미분기하학적인 원이 된다. CABRI에서 원은 고전적인 원의 개념과 일치하는데, 원의 중심과 원주 상의 한 점으로, 우리가 콤파스를 가지고 작도하는 것과 동일한 것으로 정의된다.

4. 컴퓨터와 학생 사이의 상호작용

교육용 소프트웨어를 분류하는 준거는, 그것이 교수 방향을 어느 정도 미리 정해져 놓았는지와 학생에게 학습 주도권을 어느 정도 허용하느냐이다. 컴퓨터 보조 학습(CAL)이나 컴퓨터 보조 교수(CAI)는 학생들이 할 수 있는 반응, 입력 내용 등이 이미 정해져 있어 학생의 주도권은 매우 낮은 편이다. 반면에 마이크로월드는 학생에게 학습의 주도권이 거의 완전히 주어져, 무엇을 학습하게 될지는 학생에게 달려있다. 이렇게 학생의 주도권을 고려하여 교육용 소프트웨어를 살펴보면, 학생의 주도권이 전혀 없는 것에서 부터, 완전히 열려있는 환경까지 연속적인 계열 속에 들어 있게 된다.

개인교수형 시스템(tutoring system)은 학생에게 학습의 주도권을 거의 주지 않는다. GEOMETRY TUTUOR는 인공지능적인 개인교

수형 시스템의 전형적인 예이다. 그것은 "학생들이 완전한 시간을 갖고, 학습하려는 영역을 가장 잘 알고 있는 교사와 학습할 때가 학생들이 자신이 문제를 해결하여야 하는 보통의 교실에서 학습할 때보다 효율적으로 학습한다는 아이디어를 기반으로 고안되었다. 그래서 GEOMETRY TUTOR는 기하 문제 해결에 대한 수학적인 증명 과정을 안내하고 피드백을 제공하며, 분명한 힌트를 제공하고, 학습자가 실패하였을 때나 방향을 상실했을 때 도움을 준다.

개인교수형 시스템은 개인 교사가 행동하리라 예견되는 방식의 인터페이스 상에서 학생들의 행동을 밀접하게 추적한다. 그래서 학생과 시스템 사이의 밀접한 상호작용은 학생들이 뭔가의 학습을 보장할 수 있다. 그러나 그 이면에 들어 있는 의미의 본질을 이해하는 것은 보장하지 못한다. 그 한가지 이유가 학습자가 그 속에 들어 있는 지식에 대한 학생들의 견해를 표현할 수 없다는 것이다. 또 다른 이유는 이 시스템의 피드백은 학습이, 주어진 문제나 과제를 해결할 수 있는 힌트나 도움을 얻는 방법에 대한 학습으로 변질될 수 있다는 것이다. 다른 말로 표현하면, 학습자는 과제가 전달하여 주려는 지식을 얻는 대신에 피드백의 사용을 효율적으로 이용하는 방법을 학습할 수 있다는 것이다(Balacehff 1991).

마이크로월드는 마이크로월드 표현상의 문법적인 것에 기인하는 제약이 있지만, 가능한 많은 주도권을 학생에게 부여한다.

로고는 마이크로월드의 전형적인 예이다. 몇가지 단순한 기본 명령어를 가지고 출발해서, 학습자는 보다 정교한 대상을 구성할 수 있으며, 앞으로의 탐구 활동을 위해 복잡한 많은 도구를 정의할 수 있다. 마이크로월드는 학습자의 지식이 증가함에 따라 발전한다. 이것은 마이크로월드의 핵심적인 특징으로, 시뮬레이션 환경과의 차이점이다. 대부분의 시뮬레이션은 변수를 학습자가 입력하는 식으로 구성되어 있고, 학생들은 자기가 입력한 변수에 대한 영향을 관찰할 수 있다. 그러나 학습자의 학습이 진전됨에 따라, 초기 시뮬레이션 모델은 발전할 수 없다.

어떤 마이크로월드는 일종의 시뮬레이션으로 고려할 수 있는데, CABRI는 이러한 마이크로월드이다. 그것은 몇 개의 기본적인 명령어로부터 출발하여, 매크로 작성을 통하여 학습자가 새로운 대상과 도구를 마이크로월드 속에서 구성할 수 있게 해주는 기하에 대한 하나의 시뮬레이션 환경이다.

CABRI는 기본 대상(점, 직선, 선분, 원 등)으로부터 하나의 도형을 작도하는 것을 가능하게 해주며, 메뉴를 사용하여 사용자가 명기하는 관계(중점, 수직선, 평행성 등)를 구성할 수 있게 해준다. 일단 도형이 그려지면, 그것은 그것의 기본 점들을 움직이는 것이 가능하고 그런 다음에 화면상에 나타나는 도형의 변화를 관찰할 수 있다. 그림의 모든 부분은 부드럽게 연속적으로 움직인다. 사용자가 명기한 모든 기하학적인 제약은 화면상의 점들이 이동할 때 보존된다. 이것은 화면상의 도형의 특성에 대한 타당성을 검토하는 도구로 사용될 수도 있다(Laborde 1995).

학생들이 기하에 대해 더 많은 것들을 배우게 되면서, 그들은 보다 정교한 문제 해결 도구를 구성할 가능성을 가진다. 그래서 CABRI는 학생들이 매크로 구성을 통하여 마이크로월드에 익숙해지게 해준다. 이런 매크로 구성은 팝업 메뉴상에 하나의 새로운 항목으로 나타난다. 그래서 기하학적 작도의 특성에 대한 열린 탐구의 가능성을 제공하여 주면서, 계속하여 강력의 도구의 작성 가능성을 제공하여 준다.

그러나 마이크로월드의 자유분방한 탐구는

학습자에게 풍부한 경험을 제공하지만, 교사가 원하는 특정한 지식의 학습이 일어난다는 보장을 하기 어렵다(Balacheff 1996). 그래서 마이크로월드는 교사에 의해 조직된 milieu 속에 편입되어야 할 것이다. 그러기 위해선, 교사는 CABRI의 경우에 메뉴 항목을 몇가지 없애거나 새로운 항목을 구성함으로써 마이크로월드를 통제할 수 있어 한다. 이는 CABRI의 매크로 작성 기능을 사용하여 가능할 것이다.

5. 요약 및 결론

컴퓨터의 성능이 향상되고 있지만, 메모리 용량, 정보저장 용량, 화면의 그래픽 표현 등의 하드웨어에 의한 한계가 있으며, 수학적 지식을 구현하는 소프트웨어(알고리즘)의 한계로 인해, 지식의 의미가 변화될 수 있음을 살펴보았다. 컴퓨터 환경에서 지식을 모델링하는 혹은 표현하는 방법의 선택은 교수학적 변환과 유사한 과정을 통하여 지식의 의미를 변화시킬 수 있다. 이를 Balacheff(1991)는 컴퓨터에 의한 교수학적 변환이라고 하였다.

학생들 눈에는 컴퓨터가 인간과 같은 지적인 능력을 가진 비물질적인 존재로 보일 수 있다(Balacheff 1991). 학생들의 이런 생각은 교사와의 직접적인 교수 상황에서, 학생들의 학습이 교사의 기대에 부응하기 위해 이루어지는 것처럼, 컴퓨터의 의도에 부합하기 위한 학습으로 전락할 수 있다. 학생의 주도권이 거의 없는 개인교수형 시스템에서, 학생들이 무엇인가를 학습할 것이라는 사실은 보장하지만, 그 이면에 들어있는 의미의 본질을 이해하는 것까지는 보장하지 못할 수 있음도 아울러 살펴보았다. 또한 이런 환경에서 주어지는 피드백은 학생들이 주어진 문제나 과제를 해결할 수 있는 힌트나 도움을 얻는 방법에 대한 학습으로, 학생들의 학습을 변질 시킬 수 있음도 살펴보았다. 즉, 과제가 전달해 주려고 의도하는 지식을 학습하는 대신에 피드백의 사용을 효율적으로 이용하는 방법에 대해 학습할 수 있다는 것이다. 또한 학생이 완전한 학습 주도권을 갖게 되는 마이크로월드 환경에서, 학생들은 풍부한 경험을 할 수 있지만, 교사가 원하는 특정한 지식에 대한 학습이 일어날 것이라고 보장하기 어려움을 살펴보았다. 이런 목적을 위해, 마이크로월드는 교사에 의해 조직된 교수학적 상황 속에 편입되어야 할 필요가 있다.

컴퓨터 환경에서 생길 수 있는 책임은 전적으로 교사의 것이다. 학생들은 교사의 의도, 교육용 소프트웨어 제작자의 의도와는 전혀 다른 경험을 컴퓨터 환경에서 할 수 있고, 이런 환경에서 다루어지는 수학적 지식이 우리가 가르치려는 지식과 동떨어진 것일 수 있다. 따라서 교사는 컴퓨터와 교육용 소프트웨어에서 사용하는 수학적 지식의 한계를 이해하여 교수학적 상황을 제공할 때, 이를 적절히 통제할 수 있어야 한다. 그리고 컴퓨터 환경에서 다루어지는 수학적 지식에 대해 항상 경계를 하여야 한다. 이는 교사에게 주어진, 컴퓨터 환경에서의 커다란 역할이 될 것이다.

참고 문헌

이경화(1996). 확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Balacheff, N.(1991). *Artificial intelligence and real teaching', learning from computers: Mmathematics education and technology,* Springer-Verlag.

Balacheff, N.(1996). Advanced educational technology: knowlede revisited. In t. lio(Ed.), Advanced educational technology : research issues and future potential. Springer-Verlag.

Brousseau, G.(1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recheres en didactique des mathématiques,* 7(2), 33-115.

Chevallard, Y.(1985). *La transpostion didactique: Du savior savant au saviour enseigné.* La Pensée Sauvage.

Kwang, W., & Kilpatrick, J.(1992). Didactical transposition in mathematics textbooks. *For the Learning of Mathematics*, 12(1), 2-7.

Laborde, C.(1995). Designing tasks for learning geometry in computer-based environment. In L. Burton & B. Jaworski (Eds.), *Technology in mahtematics teaching.* Chartwell-Bratt.

NCTM(1988). Curriculum and evaluation standards for school mahtematics.Reston, VA:Author.

Oldknow, A. J., & Smith, D. V.(1983). Learning mathematics with micros. Ellis Horwood Limited.

Vivet, M., Delozanne, E., & Carriere, E.(1993). Intelligent tutoring systems and mathematics: A Survey of what's going on in france. In D. ferguson (Ed.), *Advanced educational technologies for mathematics and Science.* Springer-Verlag.

Whitehead, A. N.(1911). An introduction to mathematics. Williams & Norgate.

Possibility of the Didactical Transposition in Computer-based Environment for Mathematics

Lee, Chong Young

In this paper, we give descriptions that the choices made in the Knowledge modelling or representation in Computer Evironments can modify the meaning of this knowledge through a process similar to that of the didactical transpostion. Thus, they are likely to have effects on learning. These problems and phenomena are consequences of general constraints of computer and an algorithms built-in computers. Students may not learn the knowledge intended by teacher. Teacher is always on the alert for the changable mathematical knowledge in computer-based environments. It is an important role of teachers in new teaching and learning environment.