

# 대수적 언어 학습으로서의 문자식의 지도

## - 중학교 1학년 문자와 식 단원의 지도 계획안 구성 및 수업 사례 -

김 남 희\*

### 1. 머리말

대수는 일종의 형식적인 언어체계로서 그 내용 전개나 문제 해결 과정에 있어서 문자를 사용한 식을 주로 다루고 있다. 문자를 사용한 식(이하, 문자식<sup>1)</sup>이라 칭함)의 도입은 대수의 형식적 언어 사용의 출발로서 대수는 이러한 문자식의 조작으로 설명될 수 있다. 나아가 문자식은 기하와 해석을 포함한 모든 수학의 언어로서 수학을 학습하기 위해 없어서는 안되는 기초가 되는 물론이고 수학을 이용하는 다른 제 분야의 학습의 기초가 되는 매우 중요한 내용이다. 그러나 지금까지의 연구 결과는 중학교 1학년 수학의 주요한 학습내용인 문자식의 학습이 만족스럽게 이루어지지 못함으로써 그 이후의 학습에 부정적인 영향을 미치고 있음을 지적해 왔다(우정호, 1998, pp.238-239).

대수의 형식적인 언어인 문자식이 본격적으로 도입되기 시작하는 중학교 수학은 대수 학습의 기초로서 보다 신중하고 의식적인 교수학적 노력이 요망되는 부분으로서 학생들이 여러 가지 수량 사이의 관계를 문자를 사용하여 간결하게 나타내고 문자식이 갖는 일반성과 문자 사용의 유연성을 이해할 수 있도록 지도하는 것이 필요하지만 그에 대한 이해의 결여 속

에서 중학교 수학의 중요한 목표 즉, 문자식에 관한 여러 가지 기본적인 규약과 변수 개념을 이해하도록 하고 문자식의 변형과 계산을 익힘으로써 그 이후의 수학 학습을 위한 기초를 마련하도록 하는 것이 실제로는 만족스럽게 달성되지 못하고 있는 것이다.

본 논문은 위와 같은 문제의식에서 출발, 대수의 형식적 언어사용의 출발이 되는 문자식의 도입 내용을 논의의 대상으로하여 대수 학습을 보다 의미있게 해 나가기 위한 교수-학습의 문제에 대하여 생각해 보고자 한다.

이를 위해 문헌연구를 통해 학교수학의 문자식 지도를 위한 함의점을 도출하고 문자식의 의미 및 문자식의 구성과 조작에 대한 학생들의 이해를 피하기 위한 지도 계획안을 구성해 보고자 한다. 또한 본 논문에서 고안된 문자식의 지도 계획안을 바탕으로 중학교 1학년 학생들을 대상으로 실제 수업을 실시해 보고 문자식에 대한 학생들의 이해도의 변화를 분석, 그 결과를 통해 학교수학에서 다루어질 문자식 지도에 관한 시사점을 얻고자 한다.

### 2. 학교수학에서의 문자식의 지도

Wagner(1983)는 대수에서의 문자 사용이 학

\* 문성중학교

1) 문자식은 수와 문자를 계산기호, 관계기호 또는 괄호와 결합시켜 수학적 관계를 나타내는 식이며 다항식, 분수식, 방정식, 부등식, 공식, 계산법칙 등의 여러 가지가 있다.

생들에게 문제를 야기시킬 만큼 어려운 것인가 하는 문제에 대하여 문자를 사용하기는 쉬우나 이해하기는 어렵도록 만드는 몇 가지 요인들을 규명하여서 그 요인들을 다음과 같이 설명하고 있다. 즉, 문자는 수와 유사한 성질을 가지고 일상언어와도 유사한 성질을 가지고 있지만 여전히 그 자체만이 유일하게 갖는 독특한 성질을 가지고 있다는 것이다.

문자만이 갖는 독특한 성질은 수학언어에 일반성, 유연성, 정확성을 부여하는 것으로서 학생들이 수학의 내용을 학습해 나감에 따라 점점 더 다양하고 더 강력한 방식으로 문자를 다룰 수 있기 위해서는 수학 언어로서 문자가 갖는 독특한 성질에 대한 이해가 필수적이다.

### (1) 문자 사용의 일반성에 대한 이해

수학언어로서 사용되는 문자가 일반성을 갖는다는 것은 다음의 두 가지로 설명가능하다 (표 1 참조).

첫째는 문자와 ‘수’와의 차이점에 대한 설명으로, 수는 단일한 하나의 수를 표현하지만 문자는  $0 < n < 20$ ,  $y = 3x + 2$ 와 같이 동시에(그러나, 개별적으로) 많은 수를 표현할 수 있다는 것이다. 이를 문자가 갖는 ‘동시 표현의 성질’이라고 부른다. 문자가 갖는 동시 표현의 성질로부터 수학에서의 정의, 공리, 정리, 공식 등은 간결하고 분명한 형태로 표현될 수 있으며 나아가 일반적인 진술이 가능하게 되는 것이다.

둘째는 문자와 ‘일상언어’와의 차이점에 대한 설명으로, 일상 언어에는 명시적으로 또는 암묵적으로 처음부터 저절로 부과된 의미가 있기 마련이지만 문자는 고정된 의미의 집합에 연결되어 있지 않다는 것이다. 따라서 대부분의 문자가 나타내는 범위의 한계를 우리가 원

하는 방식으로 자유롭게 정할 수 있게 되는데 이를 문자가 갖는 ‘한계 결정의 자유성(freedom of delimitation property)’라고 부른다(Wagner, 1983, p.477). 문자가 갖는 ‘한계 결정의 자유성’이 곧 수학의 언어에 일반성을 부여하게 된다.

### (2) 문자 사용의 유연성에 대한 이해

수학언어로서 사용되는 문자가 유연성을 갖는다는 것은 문자와 ‘일상언어’와의 차이점으로 설명가능하다.

일상적인 언어표현에서는 어떤 집합 내에 있는 원소들의 본질적인 특성이 그 집합을 언급하기 위해 사용하게 되는 단어나 구의 범위를 명확하게 제한하게 된다. 결과적으로 언어표현이 변화하면 그 언어가 나타내는 대상의 변화가 거의 항상 일어나게 된다.

수학 언어에서는 주어진 대상을 지칭하기 위해서 거의 아무거나 임의로 문자를 선택할 자유가 있는데 이를 ‘문자 선택의 자유성(freedom of choice property)’이라고 부른다(Wagner, 1983, p.477). 문자가 갖는 ‘선택의 자유성’은 바로 수학의 언어에 유연성을 부여하는 것이 된다. 수학에서는 주어진 임의의 대상을 표현하기 위하여 자유롭게 교환할 수 있는 많은 종류의 문자가 있다는 사실은 문자의 변화가 반드시 그것이 나타내는 대상의 변화를 수반하는 것이 아님을 의미하는 것이다.

<표 1> 수학언어로서의 문자의 특징

구분	문자의 본질적 성질	수학언어로서의 특징
‘수’와의 차이점	동시표현의 성질	문자 사용의 일반성
‘일상언어’와의 차이점	한계 결정의 자유성	
	문자 선택의 자유성	문자 사용의 유연성

### (3) 문자식 지도를 위한 함의

수학학습에서 문자식의 구성과 그 의미에 대한 올바른 이해를 위해 학생들에게 지도되어야 할 필요성이 있는 문자의 본질적인 특징들은 그 동안 학교수학에서 간과되어왔다(졸고, 1992, pp.94-95; 졸고, 1997, p.54, p.48). 대수 나아가 수학학습을 보다 의미있게 해 나가기 위한 교수-학습의 문제를 생각해 볼 때, 대수의 형식적 언어 사용의 출발이 되는 문자를 사용한 식의 도입 부분에 대한 적절한 지도는 무엇보다도 중요한 것이라고 생각한다. 이에 따라 본 절에서는 특히 수학언어로서 문자의 본질적인 특성에 대한 이해를 위해 교사가 의식적으로 기술하여야 하는 교수학적인 노력이 무엇인가에 대해 생각해 보고자 한다. 이에 대한 논의를 위해 중학교 1학년 학생들이 문자식 학습에서 보이는 대표적인 오류들을 살펴보면 다음과 같다.

오류 1:

문자식 계산에서  $2a+3$ 을 무리하게 간단히 하여  $5a$ 로 답하는 경우

오류 2:

$(3+a)+(a-3)=3a+(-3a)$ 와 같이 괄호로 둘러싸인 부분은 어떠한 경우라도 먼저 계산을 하지 않으면 안 된다고 생각하는 경우

오류 3:

$y=3x$  와  $d=3t$ 는 다른 식(또는, 다른 함수)이라고 생각하는 경우

오류 4:

문자는 특정한 값을 대신하고 있다고 생각하면서  $x+y=y+x$  에서처럼 문자  $x, y$ 가 임의의 수를 일반적으로 나타내고 있다는 사실에 익숙지 않은 경우

오류 1, 2를 초래하는 원인을 지적해주는

것은 문자식 학습에 혼란을 방지하는데 도움이 될 수 있다. 즉, 수의 계산 법칙이 문자식의 계산에도 적용될 수 있음을 이해시키면서 수의 조작 가운데 문자식에 적용 가능한 것과 그렇지 않은 것을 식별할 수 있도록 지도하는 것이 바람직하다. 또한 계산기호는 두 수나 식의 계산을 나타내면서 동시에 그 결과를 나타내고 있으며 수의 경우와는 달리 문자식의 경우에는 결과의 식에 계산기호가 포함되는 경우도 있고 그렇지 않은 경우도 있으므로 계산기호를 ‘계산하여라’는 명령으로만 생각하고 계산결과가 식이 되어서는 안된다고 생각하여 무리하게 식을 간단히 하는 오류를 범할 수 있다는 것을 지적해주는 것이 좋다.

오류 3은 문자 선택의 자유성 즉, 문자 사용의 유연성에 대한 이해가 결여된 경우이다. 문자의 ‘선택의 자유성’은 학생들이 그것을 완전히 내면화하는 데는 오랜 시간이 걸리는 것으로 파악되게 때문에 이에 대한 보다 의식적인 교수학적 노력이 필요하다고 생각된다(우정호, 1998, p.237; 졸고, 1995, p.192). 같은 것을 나타내기 위해 다른 문자를 사용될 수 있음을 아는 학생들도 종종 다른 문자는 다른 대상을 나타내어야 만 한다고 믿는 경향이 있다. 예를 들어, 방정식에서 문자로 된 미지수가 변하는 것은 해의 변화를 의미한다고 생각하는 것이 그것인데 이런 오개념을 바로잡기 위한 방법은 대수과정에서 결합법칙이나 분배법칙처럼 수의 성질에 대해서 수치를 대입하여 설명을 하게 될 때, 다른 문자가 같은 값을 가지는 몇 가지 예를 사용해 보는 것이다(예를 들어,  $a(b+c)=ab+ac$ 를 확인하기 위해  $a, b, c$  모두에 2를 대입해 보는 것). 또한 집합 표현에서  $\{x|p(x)\}$ 에서  $x$ 는 ‘꼭두각시’ 변수(dummy variable)로서 다른 문자를 사용해도 된다는 점을 명확히 이해하도록 지도해야 할 것이다. 문자를 선택하는데 있

어서 관습적으로 사용되어 온 암묵적인 규약이 있다는 것을 설명하는 것도 잊어서는 안될 사항이다.

오류 4는 문자 사용의 일반성에 대한 이해가 결여된 경우라고 볼 수 있다. 학생들로 하여금 때때로 문자가 서로 다른 많은 수를 표현하기 위해 사용될 수 있다는 것을 인식시키기 위해서는 일상언어와 문자사이의 유사성인 자리지기 성질을 생각해 보도록 하는 것이 도움이 될 수 있다. 즉, 문자는 어떤 집합의 원소를 임의적으로 동시에 표현하는 多價명사로 임의

의 수가 대신 들어갈 수 있는 자리를 나타내고 있다는 사실을 이해시키는 것이다. 다시 말해 다가적으로 사용되는 문자는 일상언어에서 사용되는 대명사와 유사성이 있는 것으로서 점  $P$ , 함수  $f$  라고 표현할 때와 같이 어떤 종류의 일반적인 원소를 나타내는 기호로 사용된다는 것을 설명해주는 것이 바람직하다. 또한 문자가 나타내는 대상은 우리가 원하는 대로 선택할 수 있어서 문자가 나타내는 값의 범위를 자유롭게 한정할 수 있다는 것을 말해주어야 한다.

### 3. 문자식 지도를 위한 수업 계획안 구성

대영역	수와 식	중영역	식	소영역	문자의 사용
지도의 흐름	지도 내용의 전개 (1)				학습내용
문자식 도입을 위한 문제 제시	<p>문제 1. 한 시간에 4km씩 걷는 사람이 1 시간, 2 시간, 3 시간 걸었을 때 각각 몇 km씩 걷는지 구하여 보자.</p> <p>1 시간에는 (km) 2 시간에는 (km) 3 시간에는 (km)</p> <p>문제 2. 한 시간에 4km씩 걷는 사람이 일정한 시간 만큼을 걸었다. 그가 걸은 시간 동안에 걷게 된 거리를 구할 수 있는 표현을 만들어 보아라<sup>(2)</sup>. (가능하면 가장 간단하게 나타낼 수 있는 방법을 사용하여라)</p>				문자 사용의 필요성
다양한 문제해결 설명	<p>학생들이 답안을 낸 후, 위의 문제에 대한 자신의 답안을 아래의 문제 해결의 예와 비교해 보도록 하고 각 풀이 방법의 장단점에 대하여 생각해보도록 한다.</p> <p>아래의 예를 통해 위의 문제에 답하는 방법은 다양하게 있을 수 있음을 보여준다<sup>(3)</sup>.</p> <p>&lt;문제해결의 예 1&gt; 문제의 구조를 <u>그림으로 나타내어 표현</u></p> <p>예를들면, 수직선을 이용한 그림으로 나타낸 경우</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>또는 시간에 따른 거리 변화의 규칙성을 보여주는 다양한 그림들</p>				

- 2) 기존의 교과서 지도내용에서처럼 문제에 문자를 이미 제시하여 문자식을 곧바로 도출시키는 것이 아니라 학생들로 하여금 문제 상황의 표현을 위해 문자 사용의 필요성을 느끼게 하는 과정을 거치는 것을 목적으로 하고 있다.
- 3) 첫 번째 수직선을 이용한 그림으로 나타낸 표현에서는 거리가 시간에 따라 같은 양 만큼 늘어난다는 규칙성의 생각이 반영되면서 걸은 시간 수가 1 시간, 2 시간, 3 시간...과 같이 자연수로 표현되는 경우만을 제한적으로 나타내게 되는 경우가 많다. 두 번째 말로 나타낸 표현에서는 언어적인 이해 수준이 낮은 학생들에게는 문제의 구조가 분명하게 파악되지 않는 현상이 나타날 수 있다. 특히, 보다 복잡한 문제에서는 이렇게 말로 된 표현이 기호 표현에 비해서 문제의 구조를 비교적 명확하게 드러내지 못하는 단점을 보인다.

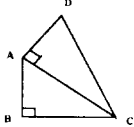

대영역	수와 식	중영역	식	소영역	문자의 사용										
지도의 흐름	<b>지도 내용의 전개 (2)</b>				학습내용										
다양한 문제 해결 설명	<p><b>&lt;문제 해결의 예 2&gt; 문제의 구조를 말로 표현</b>  “그가 걸은 시간 수에 4를 곱하면 된다.”  이 단계에서  (거리)=(속도)×(시간)의 식을 이용하여 비교적 간단하게 식으로 나타내는 방법도 있음을 이해시킨다.  아래의 예 3과 같이 걸은 시간 수가 아직 정해져 있지 않기에 걸은 시간 수를 □, △, ○ 등의 기호로 간단하게 나타낼 수도 있음을 설명한다(또한, 이러한 표현은 이미 초등학교때 학습하였음을 언급한다.)  <b>&lt;문제 해결의 예 3&gt;</b>  <b>문제의 구조를 간단한 기호를 사용한 식으로 표현</b>  <math>4 \times \square</math> (km), <math>4 \times \triangle</math> (km), <math>4 \times \circ</math> (km), 등  위의 표현에서 걸은 시간 수에 대하여 □, △, ○ 등의 기호를 사용하는 대신 문자 <math>x</math>, <math>y</math>, <math>t</math> 등을 도입하게 된다(그 이유는 위의 예와 비교하는 다음의 설명에서 제시된다).  <b>&lt;문제 해결의 예 4&gt; 문제의 구조를 문자를 사용한 식으로 표현</b>  <math>4 \times x</math> (km), <math>4 \times y</math> (km), <math>4 \times t</math> (km)</p>				문자 사용의 필요성/ 유연성/ 수량을 문자로 표현										
적절한 문제 해결의 탐색	<p>어느 경우의 표현이든 동일한 결과를 나타내고 있기는 하지만 문자나 기호를 이용한 식의 표현이 문제의 구조를 보다 간결, 명확하게 나타내고 있어서 문제의 뜻을 쉽게 파악할 수 있게 할 뿐만 아니라 문제의 해를 구하기 위한 형식적인 처리 즉, 계산 조작을 쉽게 할 수 있게 하는 장점이 있음을 이해시킨다.  (그러나 &lt;예 3&gt;과 같이 문제의 구조를 간단한 기호를 사용한 식으로 표현하는 데에도 한계가 있음을 이해시킬 수 있다. 그것은 수학에서는 □, △, ○ 등의 몇 가지 기호만으로는 서로 다른 다양한 종류의 대상을 모두 구별하여 나타내기 어려운 문제 상황이 있을 수 있는 것이다. 수학적으로 구별되어야 할 다양한 대상을 지칭하기 위해서는 많은 수의 기호가 필요하다. 따라서 수학에서는 알파벳 문자를 사용한 식의 표현을 사용함을 설명한다.)</p>														
지도의 흐름	<b>지도 내용의 전개 (3)</b>				학습내용										
문자를 사용한 식의 도입	<p>위 문제를 문자식을 사용한 식을 이용해 해결하는 방법을 설명함</p> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">1 시간에는</td> <td style="padding: 5px;"><math>4 \times 1</math> (km)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">2 시간에는</td> <td style="padding: 5px;"><math>4 \times 2</math> (km)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">3 시간에는</td> <td style="padding: 5px;"><math>4 \times 3</math> (km)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px; text-align: center;">↓</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">... ↓</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">□ 시간에는</td> <td style="padding: 5px;"><math>4 \times \square</math> (km)</td> </tr> </table> </div>				1 시간에는	$4 \times 1$ (km)	2 시간에는	$4 \times 2$ (km)	3 시간에는	$4 \times 3$ (km)	↓	... ↓	□ 시간에는	$4 \times \square$ (km)	문자 사용의 유연성
1 시간에는	$4 \times 1$ (km)														
2 시간에는	$4 \times 2$ (km)														
3 시간에는	$4 \times 3$ (km)														
↓	... ↓														
□ 시간에는	$4 \times \square$ (km)														

대영역	수와 식	중영역	식	소영역	문자의 사용
지도의 흐름	지도 내용의 전개 (3)				학습내용
문자를 사용한 식의 도입	<p>여기서, 위의 <math>4 \times x</math> 와 같이, 문자를 사용하여 어떤 수량을 나타내는 식을 간단히 문자를 사용한 식이라고 말해주고, 앞으로는 나타내고자 하는 수량의 값이 아직 정해져 있지 않은 문제를 해결하기 위해서는 문자를 사용한 식을 이용할 수 있음을 언급한다. 이 때, 아직 정해져 있지 않은 수량을 나타내기 위해 사용되는 문자는 <math>x, y, a, b, \dots</math> 등 어떤 문자를 사용해도 무방하다는 것 단, 사용된 문자가 어떤 대상을 지칭하는 것인가를 분명히 제시해 놓아야 한다는 사실을 언급할 필요가 있다(4).</p> <p>▷보충설명(앞으로의 학습을 위한 안내)</p> <p>일반적으로 <math>x, y, z</math> 등은 변하는 미지의 수를, <math>a, b, c, \dots</math> 등은 그 값이 이미 정해져 있기는 하지만 아직 알려져 있지 않은 상수를 나타내는 경우에 사용되는 경우가 많다(5)(<math>y = ax + b</math>.함수단원과 연결)</p>				문자가 지시하는 대상의 관계결정/ 문자사용의 전통적 규약/ 유연성
지도의 흐름	지도 내용의 전개 (4)				학습내용
문자식 구성의 일반적인 과정 설명	<p>수량 사이의 관계를 문자 식으로 나타내는 방법을 살펴나간다.</p> <p>[문제] 회견이는 과일가게에 가서 1개에 300원인 사과를 몇 개 샀다. 과일 값을 계산하려고 5000원을 내니, 가게 아주머니께서 거스름돈으로 얼마를 내 주셨다. 회견이가 받은 거스름돈을 문자를 사용한 식으로 나타내보자.</p>				수량사이의 관계를 문자식으로
문자식 구성의 일반적인 과정 설명	<p><b>[학생들과 함께 문제를 해결해 나간다]</b></p> <p>먼저, 1개에 300원인 사과를 몇 개 사고 5000원을 내었을 때의 거스름돈을 계산하는 식을 말로 만들어 보면</p> <p>(거스름돈) = (지불한 돈) - (구입한 사과의 값)</p> <p>이 된다. 위의 식에서 (지불한 돈)은 문제에 5000 원으로 나와있지만, (구입한 사과의 값)은 사과를 몇 개 샀는지 문제에 제시되어 있지 않다. 이와 같이 나타내고자 하는 수량의 값이 아직 정해져 있지 않은 문제를 해결하기 위해서는 문자를 사용하게 됨을 설명한다.</p> <p>회견이가 산 사과의 개수를 <math>a</math>라고 놓자<sup>(6)</sup>. 그러면 사과 한 개에 300원 씩이므로, 회견이가 산 사과의 값은 <math>300 \times a</math>(원)이 된다.</p> <p>이제 위의 식에서 말로 된 부분을 수나 문자로 다음과 같이 바꿀 수 있다.</p> <p>(거스름돈) = <math>5000 - 300 \times a</math></p> <p>따라서 회견이가 받은 거스름돈을 문자를 사용한 식으로 나타내보면 <math>(5000 - 300 \times a)</math> (원)이 된다.</p>				수량사이의 관계를 문자 식으로 구성해 나가는 일반적인 과정

- 4) 문자를 사용한 식을 제시하여야 할 문제상황에서 문자  $x, y, z$  등을 사용할 것인가, 문자  $a, b, c$  등을 사용할 것인가에 대해 교사는 충분한 고민을 할 필요가 있다.
- 5) 이 때 문자사용이 구별되는 '변하는 미지의 값', '고정되어 있지만 알고 있지 못한 값'의 구체적인 예들을 실생활에서 구별하여 제시해 주는 것도 도움이 될 것이다. 예를들면 변하는 시간, 변하는 기온, 떨어지는 물의 양, 점점 길어지는 낮의 길이 등 실제로 변하는 것들에 대해서는 문자  $x, y, \dots$ 를, 문방구에서 파는 연필 한 개의 값, 우리 학급의 인원 수 등 이미 고정되어 있지만 현재 정확히 그 값을 모르는 것들에 대해서는 문자  $a, b, \dots$  등을 사용하는 경우가 많다는 것이다. 또한 문자 사용에 있어서 나타나는 또 하나의 관례는 대상을 지칭하기 위한 문자를 선택할 때 대상이름의 머리글자(영문의 첫글자)를 이용하는 경우가 많다는 것이다.
- 6)  $a$  뿐 만 아니라  $b, c, \dots$  등도 가능함을 언급할 수 있다.

대영역	수와 식	중영역	식	소영역	문자의 사용
지도의 흐름	<b>지도 내용의 전개 (5)</b>				학습내용
문자식 표현 방법의 지도	<p>여기서 문자를 사용한 식에서 곱이나 몫을 나타낼 때에는 일정한 약속사항에 따라 식을 더욱 간단하게 정리할 수 있다. 곱을 나타내는 방법과 몫을 나타내는 방법은 기존의 교과서에 제시되어 있는데로 소개하되 그 방법이 적용된 예를 많이 다룬다<sup>(7)</sup>.</p> <p>제시된 방법에 따라 위 문제에서의 거스름돈을 나타내는 문자식은 <math>(5000 - 300a)</math> (원)으로 간단하게 나타내어질 수 있음을 보여준다.</p> <p>곱과 몫을 나타내는 방법을 지도하여 문자식을 간단히 정리할 수 있음을 설명한다.</p>				문자를사용한식을간단히하는방법
문자식 구성의 일반적인 과정 설명	<p>일반적으로 수량 사이의 사이의 관계를 문자를 사용한 식으로 표현하는 방법을 다음과 같이 소개한다.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 먼저 '말로 된 식'을 만들어 본다</li> <li>2. 아직 정해져 있지는 않지만 나타내어야 하는 수량의 값을 찾고 이를 대신 나타낼 문자를 결정한다.</li> <li>3. 문제에 제시된 조건을 이용하여 말로 된 부분을 문자나 수로 바꾸어 놓는다.</li> <li>4. 문자를 사용한 식을 간단하게 나타낸다.</li> </ol>				문장해결에서문자식을구성하는방법
문자식 이해 증진을 위한 학습 문제 제시 <sup>(8)</sup>	<p><b>[학습문제 1]</b></p> <p>앞의 도입문제에서 한 시간에 4km씩 걷는 사람이 일정한 시간 동안 걷고 난 후에 그가 걷은 거리는 그가 걷은 시간 수를 <math>x</math>로 하여 <math>4 \times x</math> (km)로 나타내어졌다.</p> <p>(1) 식 <math>4 \times x</math> 와 같은 식으로 표현될 수 있는 문제상황을 만들어 보아라<sup>(9)</sup>.</p> <p>(2) (1)에 대해 선생님 또는 동료들이 낸 답안을 보고 여러 가지 형태의 답이 나올 수 있음을 확인하여라<sup>(10)</sup>.</p>				문자사용의일반성/유연성

- 7) 곱과 몫을 나타내는 방법에 대해 학생들이 혼란을 느끼지 않도록 가능하면 다양한 예를 제시하여 주는 것이 좋겠다.
- 8) 여기서 제시된 문제는 문자를 사용한 식의 학습에서 다루어져야 할 필요성이 있는 문제들의 대표적인 유형을 제시하였다.
- 9) 기존의 교과서에 제시된 문제를 보면 수학적인 문제상황을 문자를 사용한 식으로 바꾸는 문제만이 제시되어 있다. 여기서는 수학적인 표현으로 해석될 수 있는 실제 문제 상황을 만들어 보게 함으로써 주변에서 발견될 수 있는 실생활의 문제 상황이 수학적인 문제 구조와 동일함을 이해시키려고 하였다. 식  $4 \times x$  로 표현될 수 있는 주변의 여러 가지 문제상황을 만들어 보게 한 후, 동료들의 답안을 서로 볼 수 있도록 하여  $4 \times x$  와 같은 하나의 간단한 식이지만 그 구조에 주목하면 실제로 다양한 문제 상황의 구조를 일반적으로 나타내는 표현이 될 수 있음을 인식시킨다.
- 10) 주변에서 흔히 나타날 수 있는 다양한 형태(그러나 같은 구조를 갖는)의 문제상황이 간단한 하나의 수학적 식으로 표현 가능함을 이해시키고, 교사는 문자를 사용한 식을 이용해 여러 가지 문제상황을 해결할 수 있음을 인식시킨다.

대영역	수와 식	중영역	식	소영역	문자의 사용
지도의 흐름	<b>지도 내용의 전개 (6)</b>				학습내용
문자식 이해 증진을 위한 학습문제 제시	<p>[학습문제 2] 다음 수량을 문자를 사용한 식으로 간단하게 나타내어라(11). (1) 매 시 <math>v</math> km의 속력으로 <math>t</math> 시간 갈 때 간 거리(12) (2) 십의 자리 숫자가 <math>a</math>, 일의 자리 숫자가 <math>b</math>인 자연수(13) (3) 아래 그림의 사각형 ABCD의 넓이를 구하고자 한다.</p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>넓이를 구하는데 필요한 변의 길이에 대해 적당한 문자를 사용하여 사각형 ABCD의 넓 이를 구하는 식을 만들어라(14).</p> </div> </div> <p>[학습문제 3] 아래의 그림과 같이 물통의 물의 높이가 매 분 일정한 양만큼 높아지도록 물을 넣고 있다.</p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>물통의 물의 높이가 매분 3cm씩 높아지도록 물을 넣을 때, 물을 넣기 시작하여 일정한 시간이 지난 후의 물통의 물의 높이를 구하 는 식을 만들어 보아라(15).</p> </div> </div>				문자사용의 일반성/ 유연성
	<p>[학습문제 4](15) 다음의 갑과 을의 ‘수 맞추기 놀이’의 대화를 보자 갑: “오늘이 서기 1998년 8월 10일 이지?” 을: “응. 그런데 그게 어쨌기에?” 갑: “이 숫자들을 한 줄로 배열해서 7자리의 수 1998810을 만드는 거 야” 을: “?.....” 갑: “이 7자리 수를 3배하여 15를 더해볼래?” 을: “나보고 그걸 계산하라고?” 갑: “응. 그래” 을: “잠깐만, 3배를 하여...15를 더하라고 했지...” 갑: “그래, 그리고 그 답을 3으로 나누어서 처음의 7자리 수를 빼는 거야. 그러면 얼마가 되겠니?” 을: “아이, 그렇게 금방 계산이 되니?” 갑: “그래? 난 벌써 답이 나왔는걸” 을: “어머. 그렇게 빨리?” 갑: “답은 5야. 어때 맞았지?” 갑이 그렇게 계산을 빨리 할 수 있었던 이유는 무엇일까 생각해보고 문제를 쉽게 해결하는 방법을 알아보아라</p>				문자 사용의 필요성/ 유연성/ 일반성

11) 기존 교과서를 보면 문자식을 제시해 놓고 간단히 하라는 문제로 곱과 몫을 나타내는 방법을 훈련시키는 문제를 따로 제시하고 있는 경우가 많다. 곱과 몫을 나타내는 방법의 훈련이 문제해결의 과정에서 그 필요성에 의해 도입되고 있는 것이 아니라 단지 기계적인 훈련을 위해 독립적인 문제로 다루어지고 있는 듯하다. 여기서는 곱과 몫을 나타내는 방법을 ‘문제상황의 간단한 표현’이라는 그 필요성에 입각해서 다루려고 한다. 따라서 구체적인 문제상황을 문자를 사용해 표현하는 과정 속에서 곱과 몫의 표현 방법을 자연스럽게 훈련시키고자 한다.

12) 문자가 왜 특별히  $v$ ,  $t$ 로 선택되어졌는지에 대한 언급을 해 줄 수 있다.

13) 교사는, 십진법의 전개식에서 다른 내용을 이용해 (십의 자리 숫자)×10 + (일의 자리 숫자)라는 말로 된 식을 먼저 유도시킨다.



#### 4. 지도 계획안에 따른 수업 및 결과

본 장에서는 앞에서 제시된 지도 계획안에 따라 문자식을 지도하였을 때 문자식에 대한 학생들의 이해상태의 변화를 알아보고자 한다.

##### (1) 분석을 위한 예비 조사

수업 후 결과와의 비교를 위해 이미 문자와 식 단원을 학습한 학생들을 대상으로 그 이해 수준을 진단해 보았다. '문자와 식' 단원이 본격적으로 도입되는 중학교 1학년 수학을 학습하는 학생들을 조사 대상으로 하였다. 본 연구자가 재직하고 있는 서울 소재 문성중학교 중학교 1학년 12개 반 중에서 임의로 두 반을 선정하였다. 각 반 모두 남, 녀 합하여 34명으로 구성되어있다. 따라서 본 조사의 대상학생은 총 68명이다. 조사는 1998년 8월 마지막 주에 실시하였다.

문자식 이해도에 관한 예비 조사를 위해

학생들에게는 다음의 3가지 문제가 제시되었다. 제시된 문제는 본 논문의 지도 계획안에 있는 학습문제 중 문자 사용의 필요성, 문자 사용의 유연성, 문자 사용의 일반성이 함의되어 있는 문제로 다음과 같다.

예비조사문제1 : 문자식 도입을 위해 제시된 문제 2,

예비조사문제2 : 학습문제 2(3),

예비조사문제3 : 학습문제 1(1) (식  $2 \times x$ 로 제시)

조사는 해당학급의 2학기 첫 수학시간에 문제를 칠판에 제시하고 학생들이 연습장에 풀이과정을 기록하여 답안을 제출하는 방식으로 진행하였다. 진행 시간은 총 40분이었다. 예비조사에 대한 결과는 아래에 제시될 수업 후 조사 결과와 비교하여 다를 것이다.

##### (2) 지도 계획안의 시행

- 14) 이와같이 넓이를 구하는 문제에 대해 기존에 제시된 문제들을 보면 흔히  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$  중의 일부는 그 길이를 수로 제시해주고 나머지는 그 길이를 문자로( $a, b$ , 등을 이용해)지정해 놓고 문제를 해결하도록 하고 있다. 이런 유형의 문제는 이미 지정되어 있는 길이를 넓이 공식에 대입하여 적용하는 연습에 불과하다. 여기서는 문제가 학생들의 의도에 따라 다양한 형태로 답해질 수 있음을 보이고자 한다. 즉, 학생들은  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$  중의 몇 개의 변의 길이만을(경우에 따라서 학생들을 실제로 변의 길이를 자로 측정하여 답을 제시할 수도 있다).  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$ 의 길이를 각각  $a, b, c, d$ 로 놓는다면 사각형 ABCD의 넓이는  $\frac{1}{2}(ab+cd)$ 가 될 것이고, 문자의 지정 순서를 달리한다면 또는 다른 문자를 사용한다면 결과적으로 넓이를 나타내는 식은 다르게 표현될 것이다. 그러나 식의 구조는 어느 경우에도 동일하게 나타난다. 이 문제는 측도 영역에서의 지도내용과도 연결된다. 즉, 원하는 값을 구하기 위해 측정되어야 할 길이가 어떤 것인가를 선택해야 하는 문제를 동시에 다루고 있는 것이다.
- 15) 물을 넣은 시간을 문자로 표현하여 식을 쓰게 하는 문제인데, 문제에 일정한 시간을 문자  $x$ 로 제시하지 않은 것은 학생들에게 문자 선택의 여지를 남기기 위한 것이다. 그리고 문자의 선택이 비록 다를지라도 문제의 구조는 동일함을 인식할 수 있다.
- 16) 위의 문제상황에서 처음에 주어진 199810이라는 7자리의 수는 사실 다른 어떤 수로 바뀌어도 상관없이 답은 5가 된다. 이 문제는 학생들로 하여금 주어진 조건을 문자를 사용하여 식으로 나타내면 말로 표현된 문장 속에 숨겨져 있는 비밀이 눈에 보이듯 뚜렷이 드러나게 된다는 사실을 인식시키는데 도움을 줄 수 있다. 즉, 문자를 사용한 식을 통해 학생들은 복잡해 보이는 문제가 비교적 쉽게 해결되는 경우를 경험할 수 있다. 처음에 주어진 수를 (모르니까) 문자를 사용해서 나타내면 가령, 문자  $a$ 를 사용하는 경우 이것을 3 배하여 15를 더하게 되니까  $a \times 3 + 15$ 이 된다. 이 답을 3으로 나누어 본래의 수  $a$ 를 빼면  $(a \times 3 + 15) \div 3 - a$ 를 계산하는 것이 된다.  $(a \times 3 + 15) \div 3 - a = (3a + 15) \div 3 - a = a + 5 - a = 5$ .

문자식 이해도 진단을 위한 조사 후 조사 대상인 중 1개 반을 임의로 선택하여 고안된 지도 계획안에 따른 수업 구성의 순서에 따라 연구자가 직접 수업을 실시하여 보았다<sup>17)</sup>. 수업 진행방식은 기본적으로 강의식 방법을 선택하였지만 학생들의 활동 및 발표, 질문을 위한 시간을 할당하여 학습자 주도아래 수업이 진행될 수 있도록 노력하였다. 고안된 지도 계획안을 2차시 분 수업으로 구성하여 진행하였다.

고안된 수업계획을 가지고 2차시 분의 수업을 실시한 후, 다음 차시 수업에서 학습문제를 다룸으로써 문자식 학습에 있어서 그들에게 나타난 이해의 변화상태를 관찰하여 보았다. 학생들에게 지도 계획안에 제시되어 있는 학습문제 중 3가지를 제시하여 학생들에게서 나타나는 문제 해결 과정을 살펴보고 예비 조사 결과와 비교하여 보았다. 조사문제는 다음과 같다.

- 조사문제 1 학습문제 3(1)
- 조사문제 2 학습문제 2(3)(그림 변형) ,
- 조사문제 3 학습문제 4

예비 조사의 결과와 비교하여 본 조사 결과에서 특히 주목된 사실을 다음의 몇가지로 정리하여 보았다<sup>18)</sup>.

첫째, 예비조사 때와 비교하여 문자를 사용한 식으로 문제를 해결하고 있는 학생의 수가 많아졌음을 확인할 수 있다. 문자를 사용한 문자식의 표현으로 문제를 해결하는 답안이 예비 조사 결과에 비해서 수업 후 조사 결과에서 더욱 많이 발견된다. 예비 조사 때에는 문제 해결의 과정을 다양하게 표현하고는 있지만 문자

를 사용한 식을 사용하지 않았다가 수업 후 조사에서는 문자식으로 간단하게 문제를 해결하고 있음이 관찰된다. 예비 조사 문제 2에서 도형의 넓이를 구할 때에 변의 길이에 대해 구체적인 수치를 넣어 답을 했던 학생이 수업 후 조사에서는 넓이를 구하는 식을 일반적으로 나타내기 위해 문자식을 올바르게 구성하고 있는 답안도 있다. 수업을 통해 문제 해결에서 문자 사용의 필요성에 대한 이해가 형성되어 학생들은 문자를 사용하여 문제를 해결하는 것이 가장 간결하고 명확하다는 것을 인식한 것으로 보인다. 문자 사용의 필요성에 대한 이해가 진전되었음을 보여주는 결과라고 생각된다. 학생들이 사용하고 있는 문자는 주로  $x$ 이지만 아래에서 언급되고 있듯이 다양한 문자 또는 기호를 사용하는 답안도 눈이 띈다.

둘째, 학생들이 문제 해결에서 문자식을 표현하기 위해 문자를 선택할 때의 사고가 상당히 유연해졌음을 알 수 있었다. 예비 조사 결과에서 문자식을 쓴 학생 답안을 보면 거의 대부분 문자  $x$ 를 사용하고 있음을 알 수 있지만 수업 후 조사 결과에서의 문자식 표현을 살펴보면 여전히 문자  $x$ 가 많이 사용되고 있기는 하지만 예비 조사 때와 달리  $t, k, h, c$  등의  $x$  이외의 문자를 사용한 답안을 자주 발견할 수 있고 □와 같은 간단한 기호가 사용된 답안도 눈에 띈다. 조사문제 1(학습문제 3(1))에 대한 학생들의 답안에서 풀이 과정만을 기록하거나 옳지 않은 답안을 쓴 문제 등에 개의치 않고 학생들의 문자 선택에만 주목하여 보면 그 변화를 쉽게 관찰 할 수 있었다(사례 학생의 예; 허재범, 최유정, 홍준택, 이성원, 손지민, 전정

17) 지도 계획안에서 마지막 부분의 학습문제는 수업 후의 이해도 조사에 사용되므로 수업시간에는 다루지 않았다.

18) 양쪽 모두 올바르게 답하거나, 그르게 답한 답안은 제외하고 예비조사에서의 응답과 수업 후 조사에서의 응답 사이에 변화가 눈에 띄는 답안을 논의의 대상으로 한다. 답안의 내용 중에서 특히 문자 사용 부분을 주목하여 관찰하였기 때문에 다른 부분에서의 오류를 보이는 내용은 언급하지 않는다.

구 등). 예비 조사 때에는 문제 해결의 과정을 다양하게 표현하고는 있지만 문자를 사용한 식을 쓰지 못하였다가 수업 후 조사에서 문자  $x$ 를 사용한 문자식을 바르게 쓴 학생들도 있고 예비조사 때와 마찬가지로 여전히 문자  $x$ 를 사용한 문자식을 바르게 표현하고 학생들도 많이 있었다. 이러한 학생들 중에는 문자 사용의 유연성을 이해하면서  $x$ 를 사용한 학생들도 있을 것이고 그렇지 않은 학생들도 있을 것이다 (사례 학생의 예; 안혜미, 김창희, 고유리, 임도경, 전운진 등). 그러나 비록 많은 수는 아니지만 예비 조사때와 비교해 볼 때  $t, k, h, c$  등의 다양한 문자 또는 기호를 사용하는 답안이 자주 보이는 것은 학생들이 문자를 선택하는데 있어서 사고가 상당히 유연해 졌음을 보여주는 현상이라 파악된다. 특히 물의 높이(height)를 나타내기 위해 문자  $h$ 를 선택한 학생은 문자 사용의 암묵적 규약(또는 관례)의 하나인 문자를 사용할 때 대상 이름의 머리글자를 선택하는 경우를 인식하고 있는 것으로 보인다. 여러 가지 비교 결과에 의해서 학생들이 문자는 반드시  $x$ 만을 사용한다는 고정된 사고에서 어느 정도 벗어났음을 알 수 있었다. 이 결과로부터 우리는 학생들이 앞으로 문자를 사용할 때 반드시 문자  $x$ 이외에 다양한 문자를 사용할 것이라고 해석하는 것은 옳지 않다. 오히려 학생들이 수학에서 어떤 대상을 지칭하기 위해 사용되는 문자가 임의로 선택되었다는 사실, 수학에서 지극히 자주 사용되고 있는 문자  $x$ 가 다른 문자로 사용되어도 무방하다는 사실을 깨닫게 되었다는 것으로 해석하는 것이 자연스럽다.

셋째, 주어진 대상을 대신하여 문자를 사용할 때 변수 지정을 명확히 설정하는 학생의 수가 예비조사의 결과에 비해서 많아졌음을 확인할 수 있었다. 즉, 변수인 문자가 나타내는 대

상이 무엇인지를 명확히 제시하는 경우를 많이 발견할 수 있었다. 예비 조사에서의 결과에 비해서 문자가 대신하고 있는 대상이 무엇인지를 명확히 규정해 놓고 문제를 해결하는 학생들이 많아졌음을 알 수 있었다. 본 논문의 지도 계획안에 따른 수업이 문자가 지시하는 대상을 명확히 규정하는 습관의 형성에 다소나마 도움을 줄 수 있었다고 생각된다. 수업 후 조사 문제의 결과에서 변수인 문자가 대신하는 대상을 명확히 지정하여 제시하고 있는 답안을 눈에 띄게 자주 발견할 수 있었다. 특히, 수업 후 조사 문제 1에서 대한 답안의 내용을 살펴보면

일정한 시간  $x$ , 분  $x$ , 시간= $x$ , 몇 분 후  $\rightarrow x$ ,  $x$ =시간(즉, 분)

시간  $h$ , 시간을  $c$ 라 했을 때, 매 분을 □로 놓는다

등의 표현을 발견 할 수 있는데, 완전하게 혹은 불완전하게나마 변수를 명확히 지정하여 표현임을 알 수 있다(사례 학생의 예; 전정구, 최순규, 김혜경, 신철현, 김영선 등). 사례학생들은 예비 조사의 문제에서는 변수 지정을 전혀 하지 않았던 것으로 보아 수업 후에 주어진 대상을 대신하여 문자를 사용할 때는 그것이 대신하는 대상이 무엇인지를 명확히 설정하여야 한다는 인식이 자리잡은 것으로 파악된다. 또한 예비 조사 문제 2에서도 문자식을 사용하지 않거나, 잘못된 문자식을 쓰거나, 사용된 문자가 대신하는 변의 길이가 무엇인지에 대한 설명을 하지 않았던 학생들이 수업 후 조사문제 2(학습문제2(3)의 그림 변형)에서는 문제 해결에 사용되는 선분의 길이에 대하여 제시된 그림에 직접 문자를 지정해 놓거나, "...을  $a$ 로, ...을  $b$ 로" 하는 식의 말로 변수 지정을 해 놓거나, 선분의 길이에  $\Delta$ ,  $\bigcirc$ ,  $\square$  등의 기호를 표

시<sup>19)</sup>를 하기도 하면서 문제의 답을 문자식으로 표현하고 있는 것을 발견할 수 있다(사례 학생의 예; 손지민, 김승아 등)

문자가 대신하는 대상을 명확히 설정하지 않은 학생들이 자주 보이는 오류는 서로 다른 대상에 같은 문자를 사용하고 있는 것이다. 또한 문자를 선택하는데 있어서도 문자  $x$ 만을 사용함으로써 서로 다른 대상에 모두 같은 문자  $x$ 가 사용되는 것이다. 이러한 예를 예비조사 결과에서 발견할 수 있었다(사례 학생의 예; 옥정현, 홍준택 등)

넷째, 문자가 임의의 수를 일반적으로 나타낼 수 있다는 사실 즉, 문자 사용의 일반성에 대한 이해가 진전되었음을 확인할 수 있었다. 이러한 사실은 예비 조사에서는 문자가 특정한 값을 대신하고 있다고 생각하는 것으로 보이는 답안을 내었다가 수업 후 조사에서는 문자를 사용하여 문제를 일반적으로 해결할 수 있는 식을 만들어 내고 있는 학생의 답안을 살펴보면 쉽게 알 수 있다. 예비 조사문제 2에서 변의 길이가 주어지지 않은 도형의 넓이를 구하는 식으로 변의 길이에 구체적인 수치를 넣어 답을 했던 학생이 수업 후 조사에서는 변의 길이를 일반적으로 나타내는 문자를 사용하여 문제해결의 방법을 문자식으로 일반적으로 구성해 낸 학생들이 눈에 띈다(사례 학생의 예; 안혜미, 전윤진 등). 또한 여러 가지 문제 상황 그러나 문제의 구조가 동일한 상황을 해결하기 위해서 문자식을 사용함을 인식함으로써 문자 사용의 일반성에 대한 이해가 보다 진전되었다고 생각된다. 학생들이 조사문제3(학습문제4)에 대해서 문자식으로 문제를 해결하는 것이 가장 일반적인 방법임을 이해하고 있음을 느낄 수 있었다. 조사 문제 3에 대하여는 구체적으로

답안을 작성하지는 않고 학생들의 의견을 발표하도록 하였는데, 여러 가지 수치의 예에 대하여 같은 결과가 나오는 예를 확인하고는 문제의 결과가 항상 동일하다는 것을 문자를 사용해서 표현할 수 있다는 사실에 많은 학생들이 동의하였다. 이 때 문자  $x$ 이외의 다양한 문자 예를들면,  $k, a, t$  등의 문자 사용도 무방하다는 설명을 이해하였다.

다섯째, 수학에서 암묵적으로 인정되고 있는 문자 사용의 규약을 인식하여 그 사실을 문제 해결에 적용하고 있음을 알 수 있었다. 예비조사문제 2에서의 답안에 비해서 수업 후 조사문제 2에서 문자를 사용하여 문제를 해결하는 답안을 많이 발견할 수 있었다. 그 중에는 선분의 길이를 대신하여 사용하는 문자들이 기존에는 기껏해야 문자  $x$  이거나 변의 이름을 그대로 부르는 것(예를 들면  $AB, BC, AC, AD$  등으로)이 주로 발견되지만 수업 후 조사 문제에서는 문자  $x$  또는 변의 이름을 그대로 칭하는 것 대신에 보다는  $a, b, c$ (간혹  $e, f, g$  도 발견된다) 등의 알파벳 소문자를 쓰는 학생들을 많이 발견할 수 있었다. 이는 학생들이 수학에서는 변의 길이에 대해 주로 알파벳 소문자를 사용한다는 것을 인식한 것으로 보이며 특히 문자  $x, y$  등을 사용하지 않는 것으로 보아 수학에서는 실제로 변하는 것이 아니라 '고정되어 있지만 알지 못한 값' 즉, 이미 고정되어 있지만 현재는 그 값을 모르는 대상에 대해서 문자  $x, y$  대신에 문자  $a, b, c$  등을 사용하는 경우가 일반적이라는 사실을 나름대로 인식하고 있음을 확인하게 해 주는 예이다. 또한 앞에서 언급되었듯이 수업 후 조사 문제 1에서 물의 높이를 나타내기 위해 대상이름의 머리글자를 선택하고 있는 답안도 눈에 띈다 (사례 학생의

19) 다양한 문자와 기호를 사용한 답안이기 때문에 문자 사용의 유연성에 대한 이해의 설명도 가능한 부분이다.

예; 허재범, 최유정, 진정구, 안혜미, 김창희, 최순규, 김혜경 등)

## 5. 맺음말

본 논문에서는 대수의 형식적 언어사용의 출발이 되는 문자식의 도입 내용을 논의의 대상으로 하여 중학교 1학년 문자와 식 단원의 교수-학습의 문제에 대하여 다루었다. 문헌연구를 통해 학교 수학에서 대수적 언어 학습-지도의 중요성을 확인하고 중학교 1학년 수학에서 다루어지는 문자식 지도에서 중요시하여야 할 사항들을 살펴보았다. 이를 바탕으로 문자식의 의미 및 문자식의 구성과 조작에 대한 이해를 위한 지도 계획안을 구성하였다. 문자식 지도에 있어서 중요하게 고려한 사항은 학생들로 하여금 문자 사용의 필요성과 유연성, 일반성을 경험할 수 있는 학습을 유도한다는 것이었다. 고안된 지도 계획안을 바탕으로 중학교 1학년 학생들을 대상으로 실제 수업을 실시한 후 문자식에 대한 학생들의 이해도의 변화를 분석해 보았다.

그 결과 문자식에 대한 학생들의 이해상태가 바람직한 방향으로 변화되었다는 사실을 확인하였다. 비록 그러한 이해의 변화가 많은 수의 학생들에게서 나타난 것이 아니라 하더라도 그리고 그 변화의 결과가 모두 뚜렷하게 드러난 것은 아니라 하더라도 수학에서의 문자 사용에 대한 인식이 분명하지 않았던 학생들이 문자식 지도 계획에 따른 수업 후에 그에 대한 이해 상태가 바람직한 방향으로 변화되었음을 보여주는 조사 결과는 수학을 지도하는 입장에 있는 교사들에게 시사하는 바가 있다.

연구자는 교사의 교재 연구와 이를 바탕으로 한 충실한 수업, 즉, 수학 내용에 대한 교사

의 적절한 안내와 지도에 따라서 문자식 학습에 있어서 학생들의 이해 상태의 변화 가능성을 경험하였다. 사실상, 본 연구에서 수업 후의 이해도 변화에 대한 분석은 연구 대상 집단의 대표성의 문제, 조사 대상의 표본의 크기 문제 등의 여러 요인 때문에 그 결과를 일반화하여 받아들이기 어려운 점이 있으나 하나의 경험적인 사실로서 문자식 학습의 바람직한 지도 방법을 모색해 나가는 기초 작업으로서의 역할을 할 수 있다고 생각한다. 연구자는 교사의 연구와 그에 따른 지도 방법상의 개선을 통해 수학교사인 우리가 문자식 단원에서 학생들이 학습 하길 바라는 몇 가지 측면들을 이해시키는데 어느 정도의 효과를 거둘 수 있었음을 확인하였다. 앞으로 이와 같은 사례 연구가 거듭 보완되고 개선되면서 여러 수학 교사들을 통해 계속적으로 진행되고 그 결과가 종합되어 수학교수-학습의 실제에 반영될 수 있다면 문자식 학습에 대한 학생들의 이해를 꾀하는 교수-학습 과정이 보다 바람직한 방향에서 이루어질 수 있으리라 생각한다.

## 참고문헌

- 박두일, 신동선, 강영환(1995). 중학교 수학 1 교사용 지도서.
- 우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.
- 졸고(1992). 변수 개념과 대수식의 이해에 관한 연구. 교육학 석사학위 논문. 서울대학교 대학원.
- 졸고(1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 교육학 박사학위 논문. 서울대학교 대학원.
- 졸고(1995). 수학에서 나타나는 문자의 성질과 그

- 다양한 의미. 대한수학교육 학회 논문집, 5(1).
- Richard, N.(1986). Constructing a conceptual framework for elementary through LOGO programming. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 338
- Wagner, S.(1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal of Researach in Mathematics Education*, 12, 107-118.
- Wagner, S.(1983). What are these things called variables? *Mathematics teacher*, 76(7), 474-479.

## On The Learning of Algebraic Language: the Teaching of literal Expressions

Kim, Nam Hee

In this Study, I concerned the learning-teaching of the use of letters in algebra. Our Study can be summarized as follows; First, I tried to establish the theoretical Foundation necessary for the learning-teaching of the use of letters in literal expressions. Second, Imade a course of study that leads to the understanding of the meaning and the use of literals in algebraic expressions. Third, Based on this course of study, I held classes on First-grade students in middle school and I carried on an investigation their understanding of the meaning and the use of literals in algebraic expressions. Finally, I made an analysis of findings in this investigation and identified student's a better understanding of the meaning and the use of literals in algebraic expressions.