大韓數學教育學會 論文集 第 8 卷 第 1 號
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
Vol. Ⅷ, No.1, 89-100. July 1998

우리 나라 초등학교 수학의 정체성에 관한 연구

박 교 식*

Ⅰ. 서론

초등학교에서 가르치고 배우는 여러 과목 중에 '수학'이라는 과목이 있다. 그리고, 학문으로서의 '수학'도 있다. 이 두 수학은 서로 같은가? 아니면 다른가? 아니면, 같은 부분도 있고, 다른 부분도 있는가? 본 논문에서, 관심을 갖는 것은 바로 이러한 문제이다. 이제, 이러한 질문에 답하기에 앞서, 위의 두 수학을 구별하기 위해, 전자의 수학을 '초등학교 수학(elementary school mathematics)'이라고 부르기로 한다. 초등학교 수학은, '학교 수학(school mathematics)'의 일부이다. 학교 수학이란, 간단히 말해, 초·중·고등학교에서 가르치고 배우는 수학 지식의 총체를 의미한다. 따라서, 이에 따르면, 초등학교 수학이란, 특히, 초등학교에서 가르치고 배우는 수학 지식의 총체를 의미한다는 것을 알 수 있다. 학문으로서의 수학은 잠정적으로 '학문 수학'이라고 부르기로 한다.[1)]

초등학교 수학의 이름이 '수학'이기 때문에, 흔히, 초등학교 수학과 학문 수학이 동일시되는 경향이 있는 것처럼 보인다. 또, 실제로 초등학교에서 가르치고 배우는 수학 지식의 면면을 볼 때, 그렇게 생각되는 것이 무리는 아니다. 그러나, 본 논문에서는, 초등학교 수학과 학문 수학이 동일시되어서는 안된다는 견해를 가지고 있다. 더 나아가, 초등학교 수학에는, 학문 수학과는 다른, 그 나름대로의 독자적인 위상(位相)이 주어져야 한다는 것을 주장하고자 한다.[2)] 초등학교 수학이 학문 수학의 일부라는 점은 분명하다. 그런 만큼, 초등학교 수학을 구성하는 지식과 학문 수학을 구성하는 지식은 본질적으로 다르지 않으며, 따라서 초등학교 수학과 학문 수학이 다르지 않다고 볼 수도 있다. 초등학교 수학이나 학문 수학이 외형적으로는 모두 참인 지식으로 구성된다는 점에서, 이러한 견해는 물론 옳다. 그러나, 본 논문에서는, 축적(蓄積)된 지식이라는 외형적 모습을 떠나, 그러한 지식이 참임을 보이는 것까지 감안하면, 초등학교 수학과 학문 수학에는 부분적으로 같지 않은 모습이 있다는 것을 알 수 있다는 견해를 가지고 있다.

이제 이러한 논의를 위해, 학문 수학의 의미를 분명하게 제시하는 것이 필요하다. 본 논문에서, 학문 수학이라는 용어를 사용하는 것은,

* 인천교육대학교

1) 여기서, '잠정적'이라고 한 것은, 이 용어를 이후 계속해서 사용하지는 않는다는 것을 의미한다. 즉, 이 용어는, 학교 수학과 학문으로서의 수학을 쉽게 구별하기 위해 일시적으로 사용하고 있는 용어일 뿐이다.

2) 본 논문에서는, 특히, 초등학교 수학에 한정해서 논의하고 있다. 그러나, 본 논문에서의 논의는 중등학교 수학(즉, 중학교 수학과 고등학교 수학)에까지 확장될 수 있을 것이다. 한편, 학교 수학이 나름대로 독자성(獨自性)이 있다는 것이 심정적(心情的)인 동의를 전혀 얻고 있지 못한 것은 아니다. 그러나, 지금까지는 구체적으로 어떤 독자성을 가지고 있는지가 명확하지 않았다고 할 수 있다. 그리고, 본 논문에서 추구하는 것이 바로 그러한 독자성을 밝히는 것이라고 할 수 있다.

학문으로서의 수학에 대한 정형적 관점이 어느 정도 존재한다고 보아, 그러한 관점에서 보는 수학을 나름대로 규정짓기 위해서이다. 그런데, 이미 수학을 보는 두 가지 관점이 후로이덴탈(Hans Freudental, 1973)에 의해 제시된 바 있다.[3] 수학을 연역적인 체계의 완성된 산물 그 자체로 보는 관점과, 그 완성된 산물에 이르기까지의 인간의 활동을 포함시키는 관점이 그것이다. 후로이덴탈은 전자의 관점에서 본 수학을 기성 수학(旣成 數學; ready made mathematics), 후자의 관점에서 본 수학을 실행 수학(實行 數學; acted out mathematics)이라 부르고 있다. 따라서, 기성 수학이란 대체로 정확하고, 엄밀하고, 그리고 연역적으로 제시된 수학을 의미한다. 반면에 실행 수학이라고 하면, 그것은 정확하지 않을 수도, 엄밀하지 않을 수도, 또는 연역적으로 제시되지 않을 수도 있는 수학을 의미한다.

흔히, 수학이라고 할 때, 그것은 사실상 대부분 이러한 기성 수학을 의미하는 것이었다. 이런 이유에서, 본 논문에서는, 학문으로서의 수학에 대한 정형적 관점에서 보는 수학이 바로 기성 수학이라고 보고 있다. 다시 말해, 학문 수학은 곧 기성 수학을 의미한다. 따라서 이 후의 논의에서는 학문 수학이라는 용어 대신 기성 수학이라는 용어를 사용하기로 한다. 폴리아, 후로이덴탈 등이 지적하고 있듯이, 기성 수학으로 만들어지기까지의 과정 그 자체가 정확하고, 엄밀하고, 그리고 연역적이었던 것은 결코 아니다. 그럼에도 불구하고, 오직 기성 수학만이 수학인 것처럼 보는 관점이 여전히 팽배하고 있음은 주지의 사실이다. 그렇기에 초등학교 수학을 기성 수학으로 간주하려는 경향이 있는 것이다. 이를테면, 대부분의 초등학교 교사들도 수학을 정확하고, 엄밀하고, 그리고 연역적인 것으로 받아들인다(박교식, 1996)[4]. 그러나, 본 논문에서는, 초등학교 수학을 학생들에게 제시할 때는, 기성 수학을 제시하는 것과는 다소 다르게 제시하는 부분도 있다는 것에 주목하고 있다. 즉, 부분적으로는 반드시 정확하지도, 엄밀하지도, 또는 연역적으로 제시되지 않는 부분이 있다는 것에 주목하고 있다. 그래서 더 나아가, 본 논문에서는, 그러한 부분이 있다는 것이 바로 초등학교 수학의 고유한 특성을 구성할 수 있다고 보고 있다.

한편, 초등학교 수학이 기성 수학으로서의 특성을 가진다는 점 또한 간과(看過)할 수 없다는 것을 분명히 할 필요가 있다. 다시 말해, 초등학교 수학에는 기성 수학적인 측면과 실행 수학적인 측면이 양립하고 있다. 본 논문에서는, 다만, 초등학교 수학이 지나치게 기성 수학의 측면에서만 받아들여지고 있다는 것을 경계할 뿐, 기성 수학적인 측면이 전혀 없다는 것을 주장하는 것은 아니다.

한편, 스켐프(Richard R. Skemp, 1996)의 관계적 수학과 도구적 수학 또한 초등학교 수학의 특성을 설명하는데 도움이 된다. 스켐프에 따르면, '수학'이라는 동일한 이름 아래, 서로 다른 2 개의 교과 즉, 관계적 수학과 도구적 수학이 있다. 관계적 수학이란, 간단히 말해, 잘 이해된 수학이며, 도구적 수학이란 그러한 이해 없이, 단지 기억된 수학이다. 스켐프 자신의 설명을 예로 들면, 이를테면, 직사각형의 넓

3) 폴리아(George Polya, 1986)도 수학을 보는 두 관점을 제시한 바 있다. 그러나, 후로이덴탈과 폴리아의 견해는 사실상 거의 같다. 본 논문에서는, 다만, 후로이덴탈이 그 두 관점에서 본 수학을 나름대로 명료하게 이름지어 제시하고 있다는 점에서 후로이덴탈의 견해를 인용하고 있다.

4) 많은 사람들이 기성수학만이 수학이라고 생각하게 된 것은, 사실상 거의 대부분이 학교 수학의 교수·학습 과정에서 그렇게 배워왔기 때문이라고 할 수 있다. 그러한 기성 수학이 학교 수학의 참 모습이 아님에도, 마치 그것이 학교 수학의 참모습인 것처럼 보여져 왔다는 것이, 기존 수학교육의 한 특징이라 할 수 있을 것이다.

이를 가로의 길이와 세로의 길이의 곱으로 구한다는 것을 설명하는 날, 어느 학생이 결석했다고 하자. 다음 날, 그 학생은 다른 학생들이 직사각형의 넓이를 공식에 의해 구하는 것을 보고, 그 공식을 사용하여 직사각형의 넓이를 구할 수 있다. 그러나, 이 학생의 경우 왜 그러한 공식이 만들어졌는지를 진정으로 이해하지는 못한다. 이때 이 학생에게 있어, 직사각형의 넓이 공식은 바로 도구적 수학인 것이다.

오늘날, 이러한 도구적 수학을 가르치는 것은 일반적으로 무용한 것으로 간주되고 있다. 물론, 그러한 견해는 옳다. 그러나, 초등학교 수학에서는 이러한 도구적 수학이 부분적으로는 필요한 경우가 있다. 초등학교 수학에서 정확하지도 않고, 엄밀하지도 않고, 또는 연역적으로 제시되지도 않는 부분이 있다고 했다. 그런데, 그러한 부분 중 실행 수학이라고 볼 수 없는 것이 있고, 그것이 바로 이 도구적 수학인 것이다.

초등학교 수학을 구성하는 구체적인 수학 지식은, 우리 나라의 경우, 교육과정으로 정해져 있다. 그래서, 현재, 우리 나라에서는 문서화된 제 6 차 초등학교 수학과 교육과정(1992, 교육부)에서 그 구체적인 수학 지식을 확인할 수 있다. 그러나, 이 교육과정에는, 다만, 초등학교 수학을 구성하는 수학 지식의 세세한 목록을 수록하고 있을 뿐이다. 즉, 그러한 수학 지식이 학생들에게 또는 교과서에 어떠한 모습으로 제시되어야 하는지에 대해서는 아무런 언급도 하고 있지 않다. 그래서, 본 논문에서는 수학 지식이 제시되고 있는 모습을, 주로 현재 사용되고 있는 초등 학교 수학 교과서에서 추출하고 있다.

본 논문에서는, 초등학교 수학에서 정확하지도 않고, 엄밀하지도 않고, 또는 연역적으로 제시되지도 않는 예를 몇 가지 제시하게 된다. 그리고, 그러한 예를 통해, 초등학교 수학의 정체성(正體性; identity)을 부분적으로나마 확립할 수 있음을 보이게 된다.

II. 초등학교 수학의 정체성 탐색: 6 개의 예

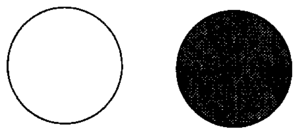
본 절에서는, 현재의 초등학교 수학 교과서에서 찾을 수 있는 6 개의 구체적인 예에서, 초등학교 수학이 정확하지 않게, 엄밀하지 않게, 또는 연역적으로 제시되고 있지 않는 모습을 확인하게 된다. 그리고, 이를 통해 초등학교 수학이 나름대로 그 정체성을 확보하고 있음을 보이게 된다. 한편, 여기서 연역적으로 제시되지 않는다는 것이, 귀납적으로 제시된다는 것을 의미하는 것은 아니다. 흔히, 연역에 대비되는 것으로 귀납을 생각하지만, 본 논문에서 연역적으로 제시되지 않는다는 것은, 다만, 어느 지식의 제시가 공리적(公利的)으로 그에 선행되는 지식의 도움을 받아, 계통적으로 제시되는 것이 아님을 의미한다. 따라서, 어떤 수학 지식이 아무런 선행 지식 없이 제시된다면, 그것은 연역적으로 제시되고 있는 것이 아니다.

본 논문에서는, 주로, 현재의 교과서에 제시된 현상적 모습을 확인하는 것을 목적으로 하고 있다. 그렇기 때문에, 교육과정 또는 교육과정 해설서에 제시되지 않은 이유에 관해 논의하는 것은, 엄밀히 말하자면, 본 논문의 목적과 부합되지는 않는다. 그럼에도 불구하고, 그러한 이유를 제시하는 것이, 본 논문의 주장을 정당화하는데는 도움이 될 수 있다. 그런 이유에서, 본 절에서는, 비록 부분적이기는 하지만, 나름대로 그 이유도 제시하고 있다.

1. 원

초등학교 수학에서도, 그리고 중학교 수학에

서도 모두 [그림 1]에서의 왼쪽과 같은 원을 취급한다. 그러나, 이 원의 정의는 학교급별로 다르다. 중학교 1 학년 수학에서는, 대개 평면에서 한 점으로부터 일정한 거리에 있는 점들의 집합을 원이라고 정의한다. 반면에, 초등학교 2 학년 수학에서는, 이를테면, 깡통의 밑부분과 같이 원의 모양을 가진 물체의 본을 뜨게 한 뒤, 그와 같이 본을 떠서 만들어진 모양을 원이라고 정의하고 있다. 그러나, 이 두 정의는 모두 [그림 1]의 왼쪽의 것을 대상으로 한다.



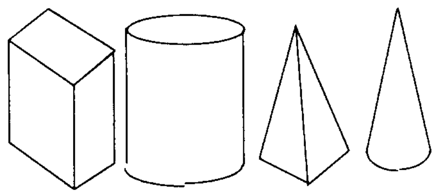
[그림 15]

초등학교 수학에서, 중학교 수학에서와 같은 방식의 정의를 하지 않는 이유는, 물론, 초등학교 수학에서 명시적으로 도형을 점들의 집합으로 간주하지 않기 때문이라고 할 수 있을 것이다. 그러나, 정확히 말하자면, 이렇게 깡통 밑부분의 본을 떴다고 해서, 그것이 원이라는 것을 보장해 주는 것은 아니다. 다만, 눈으로 보기에 원처럼 보일 뿐이다. 다시 말해, 추측일 뿐이다.

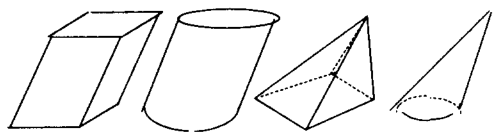
초등학교 수학에서의 이와 같은 원의 정의는, 기성 수학의 입장에서 보면 정확하거나 엄밀한 정의라고 할 수는 없다. 뿐만 아니라, 이러한 정의는 비연역적으로 제시되고 있기도 하다. 즉, 이 원을 정의하는데 아무런 선행 지식이 요구되지 않고 있다. 그러나, 이렇게 정확하지거나 엄밀하지 않은 정의만으로도, 원이 어떤 것인지를 초등학생들에게 분명하게 보여주고 있음은 사실이다. 즉, 중학교 수학에서의 정의와 논리적으로 동치(同値)인 정의는 아니지만, 초등학생들의 학습 수준(van Hiele, 1986)을 고려하면, 오히려, 적절한 정의일 수 있다는 것이 본 논문의 입장이다. 즉, 초등학교 수학에서 원의 정의를 중학교 수학에서와 같은 방식으로 하기 위해서는, 초등학생들이 '집합'이라는 개념은 물론, '한 점으로부터의 일정한 거리에 있다'는 표현의 의미를 이해할 수 있어야 한다. 그러나, 현재의 경우, 초등학교 2 학년생들이 이러한 것을 이해한다는 것은 어렵다.

위에서 초등학교 수학에서의 원은 원칙적으로 [그림 1]의 왼쪽의 것을 의미한다. 그러나, 실제로는 오른쪽의 것이기도 한다. 다시 말해, 원이라고 할 때 그것은 [그림 1]의 왼쪽, 오른쪽을 모두 의미할 수 있다. 이에 대해서는, '3. 다각형'에서 다시 논의하기로 한다.

2. 기둥과 뿔



[그림 2]



[그림 17]

초등학교 수학에서 취급되고 있는 각기둥, 원기둥, 각뿔, 원뿔은 이를테면, [그림 2]에서 볼 수 있듯이, 실제로는 각각 직각기둥, 직원기둥, 직각뿔, 직원뿔만을 의미한다. 그러나, 초등학교 수학에서는 직각기둥, 직원기둥, 직각뿔, 직원뿔이라는 용어를 전혀 사용하지 않는다. 그 대신, 단지 각기둥, 원기둥, 각뿔, 원뿔이라는 용어로 언제나 각각 직각기둥, 직원기둥, 직각뿔, 직원뿔을 의미하게 하고 있다. 그러나, 각기둥, 원기둥, 각뿔, 원뿔이라고 할 때, 각각 직각기둥, 직원기둥, 직각뿔, 직원뿔만 있는 것

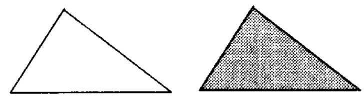
만은 아니다. 실제로는, [그림 3]과 같은 빗각기둥, 빗원기둥, 빗각뿔, 직원뿔도 있다. 그러나, 초등학교 수학에서는 이러한 빗각기둥, 빗원기둥, 빗각뿔, 빗원뿔을 전혀 취급하지 않는다.

위의 예에서, 이를테면, 각기둥으로 빗각기둥과 직각기둥 모두를 의미하는 대신, 직각기둥만을 의미하게 한다면, 그것은 기성 수학의 입장에서만 보면, 정확한 것일 수 없다. 그러나, 초등학교 수학의 입장에서 보면, 틀렸다고 할 수 없다는 것이 본 논문의 입장이다.

현재의 교과서에 직각기둥만이 도입되고 있는 이유가, 현재의 교육과정(1992) 또는 교육과정 해설서(1994)에 분명하게 제시되어 있는 것은 아니다. 그러나, 나름대로 짐작을 해 보면, 빗각기둥이 학생들에게 친숙하지 않다는 것이 그 한 가지 이유일 수 있을 것이다. 직각기둥의 경우, 상자 등과 같은 구체적인 물리적 예를 쉽게 찾을 수 있다. 그러나, 빗각기둥의 경우, 그 구체적인 물리적 예를 찾기가 쉽지 않다. 따라서, 이러한 빗각기둥의 학습은 초등학생들에게 어려울 수 있다. 또, 직각기둥의 구조를 파악하기 위해, 직각기둥의 전개도를 학습하게 되는데, 직각기둥의 전개도는 상자 등의 구체적인 물리적 예로부터 쉽게 이해될 수 있다. 그러나, 빗각기둥의 전개도의 경우는 그렇게 간단하지가 않다. 여기에서 알 수 있듯이, 초등학생들에게 빗각기둥을 의미 있게 설명하는 것이 불가능하기 때문에, 학생들의 학습 수준을 고려하면, 직각기둥으로 한정하는 것이 오히려 정당할 수 있다. 빗원기둥, 빗각뿔, 빗원뿔의 경우도 이와 유사하다고 할 수 있다.

3. 다각형

초등학교 수학에서 다각형은, 기성 수학의 입장에서 볼 때는, 다소 모호하게 취급되고 있다. 이를테면 삼각형의 경우, [그림 4]의 두 가지 모두 삼각형으로 간주된다. 왼쪽은 내부를 포함하지 않는 것이고, 오른쪽은 내부를 포함하는 것이다. 기성 수학의 입장에서 보면, 삼각형은 물론 왼쪽의 것이라고 해야 한다. 현재의 교과서에서도 그렇게 정의되고 있다. 그러나, 초등학교 수학에서 실제로 그런 것만을 삼각형으로 취급하는 것은 아니다. 흔히, 종이로 삼각형을 만든다고 할 때, 그것은 실제로는, 오른쪽과 같이 내부를 포함하고 있는 것이다. 초등학교 수학에서, 이와 같이 혼용(混用)하는 것은, 삼각형이라는 것이, 세 선분으로 둘러싸인 내부를 포함하지는 않으며, 단지 이어진 세 선분 자체 만이라고 설명함으로써, 삼각형을 전자에 한정하는 것 자체가 결코 쉽지 않으며, 오히려 혼란을 가중시킬 수 있기 때문이다. 그렇기 때문에, 이와 같이 방임(放任)하는 것이, 학생들을 위해서는 오히려 좋은 방법일 수도 있는 것이다. 그러나, 현재의 교육과정(1992) 또는 교육과정 해설서(1994)에, 삼각형을 이와 같이 방임적으로 취급한다는 것이 명시적으로 제시되어 있는 것은 아니다. 사각형과 원의 경우도 마찬가지이다.

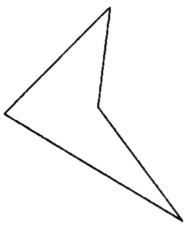


[그림 18]

위의 예 역시, 기성 수학의 입장에서 보면, 결코 정확한 것이 아니라고 할 수 있다. 그러나, 초등학교 수학의 입장에서 보면, 이 역시 정당하다고 할 수 있다는 것이 본 논문의 견해이다. 삼각형이라는 것이 어떤 물리적인 실재(實在; entity)가 아니라, 관념적인 실재이기 때문에, 사실상 그것을 물리적인 세계에서 가시적(可視的)으로 보여주는 것은 불가능하다. 그러나, 초등학교에서 손 조작 활동을 가능하게 하기 위해서는, 삼각형을 물리적인 세계에서

가시화(可視化)하는 것이 필요하다. 그리고 이를 가능하게 하는 것이 바로 오른쪽의 삼각형이다. 삼각형을 이렇게 가시화할 경우, 이를테면 색종이로 삼각형을 만드는 것이 가능하고, 그렇게 만든 삼각형을 접거나 자르는 것이 가능해 진다. 그리고 그것이 결국은 학생들이 삼각형을 이해하는데 많은 도움을 준다.

한편, 초등학교 수학에서는 볼록 다각형만 다루고 있다. 현재의 교과서에 있는 사각형의 정의에 따르면, 실제로는, 이를테면, [그림 5]와 같은 것도 사각형에 해당한다고 할 수 있다.

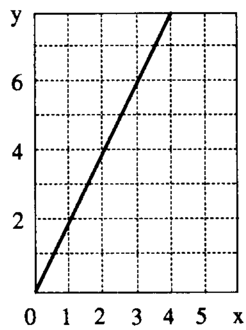


[그림 19]

그러나, 현재의 초등학교 수학에서, 이와 같은 오목 사각형은 취급되지 않고 있다. 다시 말해, 사각형이라고 할 때, 그것은 언제나 볼록 사각형을 의미한다. 실제로는 볼록 사각형이라는 용어도 전혀 사용되지 않으며, 사각형이라는 용어 자체가 볼록 사각형을 의미하는 용어로 사용되고 있다. 현재의 교육과정(1992) 또는 교육과정 해설서(1994)에는, 초등학교 수학에서 오목 다각형을 취급하지 않는 이유를 명확하게 제시하고 있지는 않다. 그러나, 나름대로 짐작을 해 보면, 대각선을 그리는 경우, 볼록 다각형과는 다르게, 다각형의 외부에 대각선이 그려지게 된다는 것이 그 한 이유가 될 수 있을 것이다.

4. 함수의 그래프

초등학교 수학에서는 영(0)과 양의 유리수 전체의 집합에서 간단한 함수의 그래프를 제 1 사분면에 한정해서 그리게 된다. 그래서, 이를테면, 함수 $y=2x$의 그래프는 [그림 6]에서 볼 수 있듯이 원점에서 출발하는 반직선으로 나타나게 된다. 초등학교 수학에서는, 제 1 사분면에 한정해서 함수의 그래프를 그리지만, 중학교 수학에서는 선행 지식인 좌표 평면을 취급함에 따라, 함수의 그래프를 좌표평면 전체로 확장해서 그리게 된다. 초등학교 수학에서, 함수의 그래프를 이와 같이 제 1 사분면으로 한정하는 한 가지 이유로, 5 학년에서는 음의 정수를 학습하지 않는다는 것을, 그리고 6 학년에서는 음의 정수를 학습하기는 하지만, (양의 정수)×(음의 정수)를 학습하지 않는다는 것을 들 수 있을 것이다.



[그림 20]

또한, 이 예에서 특히 주목해야 하는 것은, 함수 $y=2x$의 그래프를 제 1 사분면에서 실선(real line)으로 나타내고 있다는 사실이다. 초등학교 수학에서는 실수를 취급하지 않기 때문에, 실제로는 함수 $y=2x$의 그래프가 실선으로 나타날 수 없다. 뿐만 아니라, 영(0)과 양의 유리수 범위에서 함수 $y=2x$의 그래프를 가시적으로 그리는 것조차도 불가능하다. 그렇기 때문에, 초등학교 수학에서 이와 같이 하는 것은, 기성 수학의 입장에서 보면 명백히 틀린 것이라 할 수 있다[5].

이와 같이, 수학적으로 명백히 틀렸음에도 불구하고, 함수 $y=2x$의 그래프를 실선으로 그

5) 여기서, 초등학교 수학에서 함수의 그래프를 실선으로 그리는 것이 잘못된 것이므로, 먼저 실수를 취급해야 한다고 주장할 수 있다. 또는, 초등학교 수학에서 실수를 취급하지 않으므로, 함수의 그래프를 취급하지 말아야 한다고 주장할 수도 있다. 그러나, 어떤 수학 지식을 취급할 것인가 또는 취급하지 말아야 할 것인가에 관한 논의는 본 논문의 범위를 넘는다. 본 논문에서는, 원칙적으로, 어떤 수학 지식을 취급한다고 할 때, 그것을 어떻게 취급하고 있는지에 주로 초점을 맞추고 있기 때문이다.

리는 것이, 말하자면, 초등학교 수학의 한 특성이라 할 수 있다. 실수를 취급한 다음에, 비로소 함수의 그래프를 실선으로 그린다고 하면, 그것이 바로 연역적으로 접근하는 방식을 보여준다. 그러나, 현재의 초등학교 수학에서는 그렇게 하고 있지 않다는 점에서, 함수의 그래프는 연역적으로 제시되고 있는 것이 아니라고 할 수 있다. 그래서, 이와 같이, 기성 수학의 입장에서는 때때로 틀린 것처럼 보이는 것도, 초등학교 수학의 입장에서 보면, 틀리지 않았다고 할 수 있는 것이다.

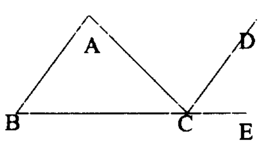
5. 삼각형의 내각의 크기의 합

평면에서, 삼각형의 내각의 크기의 합이 180°라는 사실은, 초등학교에서도 그리고 중학교에서도 모두 학습하게 된다. 그러나, 이 지식은, 학교급별에 따라 두 가지 서로 다른 방식으로 제시된다.

첫째는, 평행선의 성질을 이용하는 방식이다. 이 방식은 중학생들에게 사용될 수 있다. 이를테면, [그림 7]에서, 선분 AB와 선분 CD가 평행하다고 하자. 평행선이 한 직선과 만나서 생기는 동위각과 엇각의 크기는 각각 같으므로,

$\angle ABC = \angle DCE$

$\angle BAC = \angle DCA$

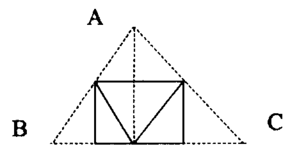


[그림 21]

이다. 그런데, $\angle ACB + \angle DCA + \angle DCE = 180^\circ$이므로, $\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 180^\circ$이다. 따라서, $\triangle ABC$의 내각의 크기의 합은 180°이다.

이와 같은 방식은, 삼각형의 내각의 크기의 합이 180°라는 것을 설명하기 위해, 평행선이 한 직선과 만나서 생기는 동위각과 엇각의 크기는 각각 같다는 선행 지식을 이용한다는 점에서, 대체로 연역적이라고 할 수 있다.

둘째는, 삼각형의 세 꼭지점이 밑변의 어느 한 점에서 일직선으로 모이도록, 삼각형을 접는 방식이다. 이 방식은, 초등학생들에게 사용될 수 있다. 이를테면, [그림 8]에서 삼각형의 세 꼭지점 A, B, C가 밑변 BC의 한 점에 모이도록 접는다. 그러면 세 꼭지각이 일직선을 이룬다는 것을 가시적으로 확인할 수 있다. 그래서, 결국 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°임을 알 수 있다.



[그림 22]

이런 방식의 설명은, 이를테면, 평행선이 한 직선과 만나서 생기는 동위각과 엇각의 크기는 각각 같다는 선행 지식을 이용하고 있지 않다는 점에서 연역적이라고 할 수 없다. 직관적으로 보면, 이와 같은 설명에는 아무런 무리가 없다고 할 수 있다. 더욱이, 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180°임을 가시적으로 보여준다는 점에서 초등학생들에게는 매우 좋은 설명 방법으로 받아들여지고 있는 것으로 보인다. 그러나, 기성 수학의 입장에서 보면 이러한 설명 방법이 옳다고 할 수는 없다. 삼각형을 접는다고 해서, 세 꼭지점이 한 점에 모이고, 더욱이 일직선을 이룬다는 것이 분명한 것은 아니다. 다만, 눈으로 보았을 때, 그렇게 보일 뿐이다. 다시 말해, 그것은 추측에 불과하다. 그렇기 때문에, 이와 같은 설명 방식은 기성 수학의 입장에서 보면 틀린 것이라 할 수 있다. 그러나, 위에서 중학생들을 대상으로 했던 방식을 통해, 연역적으로 이미 세 내각의 크기의 합이 180°임을 확인하고 있기에, 이와 같이 접어서 설명하는 방식의 설명이 가능한 것이다.

6. 양의 정수와 음의 정수

초등학교 수학에서는, 수학 지식을 나타내는 표기 방법에서도 기성 수학과 다른 점을 찾을 수 있다. 양의 정수와 음의 정수를 나타내는 표기 방법이 그 대표적이다. 초등학교 수학에서는 양의 정수와 음의 정수를 각각

$$^{+}1,\ ^{+}2,\ ^{+}3,\ ^{+}4,\ ^{+}5,\ ^{+}6,\ ^{+}7, \ldots$$
$$^{-}1,\ ^{-}2,\ ^{-}3,\ ^{-}4,\ ^{-}5,\ ^{-}6,\ ^{-}7, \ldots$$

과 같이 나타낸다. 중학교 수학에서는, 양의 정수와 음의 정수를

$$+1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5,\ +6,\ +7,\ \ldots$$
$$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6,\ -7,\ \ldots$$

와 같이 나타낸다. 초등학교 수학에서, 이를테면 기성 수학에서 관례적으로 사용되는 $+3$, -3 대신 각각 $^{+}3$, $^{-}3$을 사용하는 것은, 더하기 기호 $+$와 빼기 기호$-$와의 구별을 위해서이다. 이런 점에서 볼 때, 각각 양의 정수와 음의 정수를 나타내기 위해 사용하는 $^{+}$, $^{-}$라는 기호의 사용은, 기성 수학의 입장에서 보면, 정확하다고는 할 수는 없을 것이다. 그러나, 초등학교 수학의 입장에서 보면, 관례적인 기호의 사용에 앞서 일시적으로 사용할 수 있는 이와 같은 기호의 사용은, 초등학생들의 수준을 고려할 때 오히려 정당할 수 있다는 것이 본 논문의 견해이다. 이를테면, 양의 정수끼리의 덧셈에서, 양의 정수 5와 양의 정수 7을 더하는 것을, 관례적인 기호를 사용하여, $(+5)+(+7)$로 나타낼 수 있다. 그러나, 초등학생들에게는 괄호 ( )의 처리 방법이 쉽게 이해되지 않는다. 반면, 이와는 다르게 임시적인 기호를 사용하여 $^{+}5 + {}^{+}7$로 나타낼 수 있는데, 여기서는 괄호의 처리와 같은 복잡한 문제점이 발생되지 않기 때문에, 관례적인 기호를 사용했을 때보다 쉽게 계산할 수 있는 것이다.

III. 초등학교 수학의 현상적 특성과 그 근거

지금까지 초등학교 수학 교과서에서 6 개의 구체적인 예를 통해, 초등학교 수학이 정확하지 않게, 엄밀하지 않게, 또는 연역적으로 제시되고 있지 않는 현상적 모습을 확인하였다. 이제 본 절에서는, 이 6 개의 예를 바탕으로, 초등학교 수학의 정체성을, 학생들에게 초등학교 수학이 어떻게 제시되고 있는지에 초점을 맞추어 나름대로 정립해 보고자 한다. 우선, 위의 예에서 확인할 수 있는 초등학교 수학의 제시 방법의 현상적 특성을 다음 네 가지로 정리할 수 있을 것이다.

첫째, 어떤 수학 개념의 경우, 그 개념의 외연(外延)을 의도적으로 축소하고 있다. 위에서, 여기에 해당하는 것으로, 각기둥, 원기둥, 각뿔, 원뿔, 다각형, 함수의 그래프라고 하는 개념을 예로 들었다. 이와 같이, 어느 수학 개념의 외연 전체를 취급하는 대신, 일부분만을 한정적으로 취급하는 것은 초등학교 수학에서 자주 볼 수 있다. 물론, 이런 경우는, 대개 외연 전체를 취급하기 위한 선행 지식을 취급하는 것이 어렵거나, 외연 전체를 취급하는 것 자체가 어렵거나, 또는 그것을 바탕으로 하는 후속 학습이 어렵기 때문이라고 할 수 있다. 그래서, 외연 전체를 취급하는 대신, 어느 일부분으로 한정하여 취급하게 된다.[1)]

1) 이와 같이 수학 개념의 외연 전체를 취급하는 대신, 어느 일부분으로 한정하여 취급하는 것이 초등학교 수학에서만 있는 것은 아니다. 실제로는, 중학교와 고등학교 수학에서도 나타난다. 이를테면, 현재 중학교

둘째, 어떤 수학 개념의 경우, 그 개념으로, 실제로는 그 개념의 외연에 포함되지 않는 것까지를 의미할 수 있다는 것을 방임하고 있다. 위에서, 여기에 해당하는 것으로, 삼각형, 사각형, 원 등의 다각형의 개념을 예로 들었다. 이와 같이, 어느 수학 개념이 실제로는, 그 개념의 외연에 포함되지 않는 것까지를 의미하게 되는 경우는, 그러한 것을 외연 전체와 구별하는 것이 현실적으로 어렵거나, 또는 구별하지 않는 것이 오히려 후속 학습을 위해 필요하기 때문이다.

셋째, 어떤 수학 개념의 경우, 비연역적으로 제시될 수도 있다. 위에서, 여기에 해당하는 것으로, 원의 정의, 함수의 그래프와 삼각형의 내각의 크기의 합이 180°임을 설명하는 방법을 예로 들었다.[2] 이와 같이, 비연역적인 제시를 하는 것은, 이와 같이, 어떤 지식이 선행 지식이 요구됨에도 불구하고, 그러한 선행 지식의 제시 없이 비연역적으로 제시되는 것은, 대개, 그러한 지식이 어떤 목적을 위해 학생들에게 반드시 필요한 것이기는 하지만, 그러한 선행 지식의 학습이 결코 쉽지 않기 때문이다. 그러나, 이러한 지식의 교수 · 학습에서, 선행 지식을 이용할 수 없으므로, 교사들은 당연히 연역적인 설명을 할 수 없으며, 따라서, 어물쩍 넘어가고 만다. 그래서, 대개 이러한 지식은, 지적(知的) 학습 대신 습관적 학습(스켐프, 1996)이 요구되는 것의 하나일 수밖에 없다.

넷째, 초등학교 수학에서는 관례적인 표기 방법 대신 임시적인 표기 방법을 사용할 수도 있다. 위에서 여기에 해당하는 것으로 양의 정수와 음의 정수의 표기 방법을 예로 들고 있다. 초등학교 수학에서 이와 같이 관례적인 기호의 사용을 배제하고, 대신 임시적인 기호를 사용하는 것은, 학생들의 관례적인 기호의 사용법을 이해하기가 어렵기 때문이다.

이제, 초등학교 수학은 어떠한 이유에서 이러한 현상적 특성을 보이게 되었는지에 대해 논의할 차례이다. 이를테면, 초등학교 수학 교과서의 저자들은 무엇을 근거로, 정확하지 않은, 엄밀하지 않은, 또는 비연역적인 제시를 하게 되었을까? 그러한 근거가 실제로 있기는 한 것인가? 사실상, 초등학교 수학에서 정확하지 않은, 엄밀하지 않은, 또는 비연역적인 제시를 하게 하고 있는 명확한 근거가 제시되어 있는 것은 아니다. 그러나, 또한 아무런 근거 없이 그와 같은 제시를 하고 있다고 보기도 어렵다. 그래서, 본 논문에서는, 어떤 묵시적 근거가 있다고 보며, 그리고 위에서 살펴본 초등학교 수학의 네 가지 특성은 적어도 그와 같은 묵시적 근거에 바탕을 두고 있다고 보고 있다. 그리하여, 본 논문에서는 그러한 묵시적 근거를 나름대로 제시하고자 한다.

먼저, 위에서 제시한 네 가지 특성을 볼 때, 그것은 대체로 초등학생들의 직관적 이해를 도모하는 것에서 기인한다는 것을 짐작할 수 있다. 다시 말해, 이러한 묵시적 근거가 있으리라고 생각하게 해 주는 것은, 무엇보다도 초등학생들 그 자체라고 할 수 있다. 다시 말해, 초등학생들에게는, 기성 수학에서 볼 수 있는 정확하고 엄밀한, 그리고 연역적인 제시가 불가능하다는 것이, 어느 정도 가정되고 있다고 할 수 있다. 그렇기 때문에 가능한 한 직관적인 이해를 도모하고 있는 것이다.

학의 경우, 0°에서 90°까지의 삼각비의 값을 구하는 것이 대표적이다. 또, 고등학교 수학의 경우, 고차방정식을 사실상 인수 정리와 나머지 정리를 사용해서 풀 수 있는 것만 취급하고 있는 것이 대표적이다.

2) 흔히, 중학교 3 학년 수학에서 수직선은 실수에 대응하는 점들로 메워져 있음이 알려져 있다고 진술하는 것도 여기에 해당한다고 할 수 있다.

한편, 이러한 묵시적 근거는, 초등학생들의 심리적 구조라는 용어로 설명할 수 있다. 다시 말해, 초등학생들만의 독특한 심리적인 구조가 있다고 볼 수 있는데, 그러한 구조는, 말하자면 때때로, 기성 수학에서 볼 수 있는 정확하고 엄밀한, 그리고 연역적인 제시를 이해하지 못하는 구조인 것이다. 본 논문에서, 초등학생들에게는 이러한 고유한 심리적인 구조가 있고, 그리고 초등학생들은 그러한 구조에 입각해서 사고하게 된다고 인정하는 것이, 작금(昨今)의 구성주의(構成主義, constructivism 또는 constructivist view; von Glasersfeld, 1991)와도 부합된다고 본다. 왜냐하면, 초등학교 수학교육에서 구성주의에 따른다는 것이 바로, 초등학생들이 수학 지식을 학습(즉, 구성)하는 나름대로의 스타일을 가지고 있으며, 그리고 수학교육자는 초등학생들의 그러한 학습 스타일을 최대로 존중해서 학습이 이루어지도록 해야 한다는 것을 시사하기 때문이다. 지금까지의 논의는, 그러한 묵시적 근거가 구성주의와 관련이 있다는 것으로 요약할 수 있다. 그러나, 본 논문에서, 초등학교 수학을 그와 같이 정확하지도, 엄밀하지도, 또는 연역적이지도 않게 제시한 사람들이, 구성주의에 근거를 두어 그렇게 했다고 주장하는 것은 아니다. 다만, 그 사람들이 그렇게 제시했을 때에 염두에 두었던 신념들이, 그들이 자신들의 그러한 신념이 구성주의와 유사하다는 것은 알고 있었던 것은 결코 아니지만, 말하자면, 총체적으로 구성주의에 유사하다는 것을 의미한다. 이것은 마치, 스켐프(1996)가, 훗날 구성주의를 접하고는, 그 자신이 결국은 수십년 동안 그러한 구성주의를 주장해 왔던 것이라고 진술한 것과 같은 맥락이다.

이러한 묵시적 근거에 구성주의 사상이 깔려 있는 것만은 아니다. 또 다른 것도 있다. 앞에서 교과서 저자들은 초등학생들의 직관적인 이해를 도모한다고 했다. 그들은, 이러한 직관적인 이해를 도모하기 위해, 관념적인 물체를 구체적인 물체로 가시화한다. 그리고, 연역적인 증명을 도모하는 대신, 시각적인 확인을 도모한다. 본 논문에서 관심을 갖고자 하는 것은, 그들이 이렇게 하는 밑바탕에 깔려 있는 신념이다. 본 논문에서는, 그들이 기성 수학의 관점이 아닌 대체로 실행 수학의 관점을 가지고 있다고 보고 있다. 즉, 그들은 현재의 수학은, 수학 지식 그 자체를 기록해 두는데는 유용하지만, 수학 지식을 학습하는데는 유용하다고 보고 있지 않다고 가정한다. 그래서, 그들은 수학을 학습하기 위한 나름대로의 스타일을 제시하고 있는 것이다. 그런데, 이러한 스타일은 사실상 수학 지식이 발달해 온 역사적 과정과 무관하지 않음을 찾을 수 있다. 수학이란 것도 사실상 무수한 시행 착오의 과정을 거쳐서 발달해 온 것이기 때문이다. 다시 말해, 대개의 수학 개념은, 그러한 개념의 구체적인 사례로부터 그럴듯한 추측을 거쳐, 그리고 마침내 연역적인 증명을 통해 이루어진 것이다. 앞에서 제시한 예에서, 바로 이 그럴듯한 추측을 하게 하기 위한 예를 찾을 수 있다.

위의 근거는 후로이덴탈(1983)의 교수현상학(Didactical Phenomenology)으로 설명할 수 있다. 교수현상학에 따르면, 수학 개념으로 조직될 수 있는 구체적인 현상들이 있고, 그리고 그러한 현상으로부터 수학 개념이 조직된다. 그러나, 이러한 조직이 물론 저절로 이루어지는 것은 아니다. 후로이덴탈에 의하면, 그러한 조직의 메커니즘이 바로 수학화이다. 이러한 수학화는 역사발생적인 과정에 따른다. 다시 말해, 수학의 개념이 역사적으로 발달해 온 과정은 일련의 수학화로 이루어지고 있는 것이다. 지금까지의 논의는, 묵시적 근거가 또한 교수현상학과 관련이 있다는 것으로 요약할 수

있다. 그러나, 본 논문에서, 초등학교 수학을 그와 같이 정확하지도, 엄밀하지도, 또는 연역적이지도 않게 제시한 사람들이, 교수현상학에 근거를 두어 그렇게 했다고 주장하는 것은 아니다. 다만, 그 사람들이 그렇게 제시했을 때에 염두에 두었던 신념들이, 그들이 그 신념이 교수현상학과 유사하다는 것은 알고 있었던 것은 결코 아니지만, 말하자면, 총체적으로 교수현상학과 유사하다는 것을 의미한다.

IV. 결론

본 논문에서는, 초등학교 수학이 그 나름대로의 정체성을 가지고 있다는 것을 즉, 초등학교 수학만의 고유한 특성이 있다는 것을 주장하고 있다. 특히, 초등학교 수학의 특성을 명확하게 파악하기 위한 하나의 시도로서, 초등학교 수학이 현재 학생들에게 어떻게 제시되고 있는지에 주로 초점을 맞추어, 그 특성을 추출하고 있다. 그런데, 여기서 이 정체성은 학문으로서의 수학의 특성에 기인하는 것을 의미하는 것은 아니다. 실제로는, 일반적으로, 정확하고, 엄밀하고, 그리고 연역적으로 제시된다고 볼 수 있는 학문으로서의 수학의 특성과는 반대이다. 초등학교 수학에서 정확하지도, 엄밀하지도, 또는 연역적으로 제시되지도 않은 부분을 찾을 수 있는 바, 그것 또한 초등학교 수학의 특성으로 보아야 한다는 것이 본 논문의 견해이다. 그러나, 초등학교 수학과 학문으로서의 수학이 완전히 다르다는 것은 아니다. 다만, 여기서는, 초등학교 수학과 학문으로서의 수학에서, 일부의 속성은 서로 공유하지 않는다는 것을 강조하는 것이다.

본 논문에서는, 현재의 초등학교 수학 교과서에서 찾을 수 있는, 초등학교 수학의 현상적 특성으로, 다음의 네 가지를 들고 있다. 첫째, 어떤 수학 개념의 경우, 그 개념의 외연(外延)을 의도적으로 축소하고 있다. 둘째, 어떤 수학 개념의 경우, 그 개념으로, 실제로는 그 개념의 외연에 포함되지 않는 것까지를 의미할 수 있다는 것을 방임하고 있다. 셋째, 어떤 수학 개념의 경우, 비연역적으로 제시될 수도 있다. 넷째, 초등학교 수학에서는 관례적인 표기 방법 대신 임시적인 표기 방법을 사용할 수도 있다. 그러나, 이러한 네 가지 현상적 특성은, 현재의 초등학교 수학 교과서에서 찾은 잠정적인 특성이다. 여기서는, 이렇게 찾은 잠정적인 특성이 나름대로 어떤 근거에 바탕을 두고 있다고 보고 있다. 그러나, 그러한 근거가 명시적으로 제시된 적이 없기에, 본 논문에서는 이를 묵시적 근거라 하고 있다. 다시 말해, 현재의 초등학교 수학 교과서에서 정확하지도 않고, 엄밀하지도 않고, 또는 연역적이지도 않은 제시가 이루어지고 있는 것은, 나름대로 그 어떤 공통적인 가정을 묵시적으로 받아들이고 있기 때문이라고 보고 있다. 그리고, 묵시적으로 받아들여지고 있는 그 공통적인 가정이, 말하자면, 구성주의 및 교수현상학과 연결될 수 있다고 보고 있다.

본 논문에서는, 주로, 현재의 초등학교 수학 교과서에 제시된 수학 지식의 모습에서 초등학교 수학의 특징이라고 할 수 있을 만한 것을 현상적으로 확인하는데 초점을 맞추고 있다. 그런 만큼, 여기서 확인하고 있는 초등학교 수학의 특징은 다분히 시안적(試案的)인 것이라고 할 수 있다. 그러나, 비록 시안적인 정도의 연구일지라도, 이 연구는 초등학교 수학을 단지 수학의 관점에서만 볼 수 없음을 분명히 말해 준다고 할 수 있다.

초등학교에서 수학을 어떻게 가르치고 배워야 하는지에 관한 연구는 상당히 많이 있다.

그러나, 초등학교 수학의 정체성 확립에 관한 연구는 거의 없다. 이런 점에서, 본 논문에서의 이러한 연구는, 초등학교 수학의 정체성 확립을 위한 논의의 기초를 제공한다는 점에서도 의의가 있다고 할 수 있다.

참고 문헌

교육부(1992), 제 6 차 초등학교 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

교육부(1994), 제 6 차 초등학교 교육과정 해설서 I, 서울: 대한교과서주식회사.

교육부(1997), 초등학교 수학 교과서 (1-6 학년), 서울: 국정교과서.

교육부(1997), 초등학교 수학 익힘책 (1-6 학년), 서울: 국정교과서.

교육부(1997), 초등학교 수학 지도서 (1-6 학년), 서울: 국정교과서.

박교식(1996), 우리 나라 초등학교의 수학 교수·학습에서 볼 수 있는 몇 가지 특징, 대한수학교육학회 논문집 제 6 권 제 2 호, pp. 99-113.

Freudenthal, H.(1973), Mathematics as an Educational Task, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H.(1983), Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Polya, G.(1986), 우정호 역, 어떻게 문제를 풀 것인가(How to Solve It), 서울: 천재교육.

Skemp, R. R.(1996), 김판수, 박성택 공역, 초등수학교육(Mathematics in the Primary School), 서울: 교우사.

van Hiele, P. M.(1986), Structure and Insight: A theory of Mathematics Education, Orlando, FL.; Academic Press.

von Glasersfeld, E.(1991), Radical Constructivism in Mathematics Education, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

A Study on Identity of Elementary School Mathematics in Korea

Park, Kyosik

In this paper, it is insisted that elementary school mathematics has its own identity. Since it can be found out that is not precisely, rigidly, or deductively developed in elementary school mathematics, it must be regarded as a property of elementary school mathematics. But, elementary school mathematics and mathematics as a discipline are not different totally. In this paper, it is stressed that they do not share some attributes of each other.