

국부전단변형을 고려한 복합샌드위치 평판의 해석

Analysis of Composite Sandwich Plates with a Local Shear Deformations

지 호 선¹⁾ · 장 석 윤²⁾
Ji, Hyo Seon · Chang, Suk Yoon

요 약 : 복합샌드위치평판은 복합재료를 갖고면서 강성이 있는 얇은 면재와 저밀도인 두꺼운 심재로 구성되어 있다. 본 연구에서는 국부전단변형을 고려한 복합면재를 갖는 샌드위치평판을 해석을 위한 지배방정식을 유도하였고, 해석적인 방법으로 해석을 하였다. 해석방법의 타당성을 확인하기 위하여 전체 전단변형을 고려한 일반 적층판 이론의 값과 비교하였다. 그리고 복합면재와 심재의 국부전단변형을 고려하였으므로 일반 적층판 해석에도 적용시킬 수 있음을 보였다.

ABSTRACT : The composite sandwich plate is constructed by combining two laminated facings with high strength and a thick core of light weight material. The governing equations for the analysis of bending of simply supported sandwich plates with laminated facings are derived and analysed using the analytical method including the local shear deformations. The accuracy of the approach is ascertained by comparing solutions from the sandwich plate theory with composite facings to the laminate plate theory. Since the present analysis considers the bending stiffness of the core and also the transverse shear deformations of the laminated facings, it is expected that the analysis is capable to analyze the general anisotropic laminated plates with global shear deformations.

해 실 용 어 : 복합재료, 복합샌드위치평판, 복합면재, 심재, 국부전단변형

KEYWORDS : composite materials, composite sandwichplates, laminated facings, core, local shear deformations

1) 정회원, 대원전문대학 토목과 전임강사
2) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 교수

본 논문에 대한 토의를 1998년 9월 30일까지 학회로 보내
주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

1. 서 론

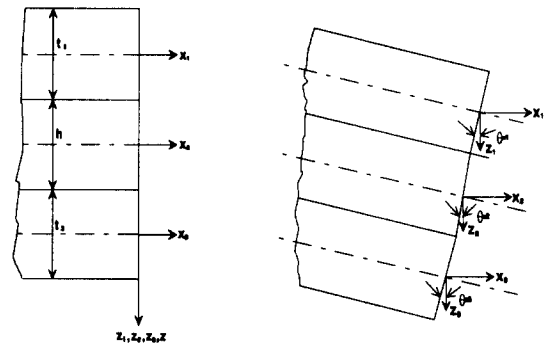
복합재료는 그 자체의 높은 비강성, 비강도와 내구성 등의 특징을 갖는 다양한 소재로 구성된 경우이며 중량에 비해 비휘강성이 크기 때문에 여러 분야에 많이 사용된다. 구조용 샌드위치는 토목, 건축, 조선, 항공분야에 이르기까지 널리 이용되고 있다. 샌드위치구조는 복합적층의 특수한 경우이며 여러 분야에 많이 사용된다. 샌드위치는 구조적 장점들을 이용하기 위해서 서로 다른 단층 또는 복합재료를 조합하고 결합시킨 구조물이라고 정의하고, 구조적, 환경적 요구조건에 맞도록 강성이 있는 면재와 저밀도인 심재로 구성되어 있으며 면재와 심재를 주로 접착제로 접착하여 사용된다.¹⁾ 특히 심재의 수직변형, 전단변형, 면재의 국부 휘강성과 재질의 비등방성, 면심재의 경계면에서의 적합조건, 복합면재의 경우 상하층면재의 중심면에 대한 대칭성 등을 다루는 방법에 따라 차이를 보인다. 일반적으로 샌드위치평판이론에서는 평판이론과 달리 심재의 전단강성이 매우 적으므로 심재에 대해서 전단변형을 고려한다. 그러므로 샌드위치 평판이론에서는 평판의 변형을 휨에 의한 변형과 전단력에 의한 전단변형의 합으로 표시한다.⁶⁾ 복합면재에 대한 관심이 증대되기 전까지 샌드위치 구조에 대한 발표논문 대다수가 직교이방성 면재와 심재를 가정하고 비등방성 연계성이 없는 문제를 다루었으나⁵⁾ 복합면재에 연구가 확장되어 비등방성 복합면재의 관한 연구가 활발히 진행되고 있다.²⁾⁴⁾ 해석적인 방법이 가능한 형태는 크로스-플라이 면재를 갖는 단순지지된 샌드위치평판의 경우이다. 지금까지는 복합재료면재를 갖는 비등방성 샌드위치평판의 해석시 심재에서는 휘강성을 고려하지 않았고, 전단변형 효과만을 고려하였으며³⁾ 면재에서는 전단변형을 고려하지 않았을 뿐만아니라 고려한 연계성도 인장-전단강성뿐이었다.²⁾⁴⁾ 본 연구에서는 지금까지 전체 전단변형을 고려하여 샌드위치평판 해석에서 면재에서 전단변형, 휘강성을 고려하고 심재에서도 전단변

형, 휘강성을 고려한 국부전단변형을 고려한 복합재료 면재를 갖는 샌드위치 평판의 탄성해석을 수행하고 일반 적층판해석에도 적용시킬 수 있음을 제시하고자 한다. 해석방법으로서 면심재 전단변형 효과를 고려한 에너지방법을 이용하여⁷⁾ 지배방정식을 유도하고 그 해로써 Double Fourier series 를 이용한다. 수식화 과정과 해법의 타당성을 입증하기 위하여 참고문헌의 자료와 결과를 비교 검토하고자 한다.

2. 본 론

1) 기본이론

그림 2.1(a)에서 보는 바와 같이 면재와 심재의 각각 중심면이 x - y 평면에 놓여 있으며, 상층면재, 심재 및 하층면재의 두께는 $t1$, h , $t2$ 이다. 그림 2.1(b)는 면심재별 z - x 평면의 단면으로서 국부 전단변형효과를 고려한 변형형상이다. 각 면재, 심재에서의 전단변형을 고려하므로써 각 면심재에서 전단변형이 생긴다. 즉 각 면재와 심재의 중립축과 연직방향 사이에 θ_x , 만큼 회전각이 생긴다는 것이다. 마찬가지로 y - z 평면에서도 θ_y , 만큼의 회전각의 변위를 유추해 낼 수 있다. 여기서 첨자($i=1,2,3$)는 복합샌드위치평판의 상층면재, 심재, 하층면재를 나타낸다.



(a) 샌드위치평판의 기하구조 (b) 전단변형을 고려한 샌드위치 변형형상

그림 2.1. 복합면재를 갖는 샌드위치평판의 가정된 변형단면

복합 샌드위치 평판의 각 층별 전단변형을 고려하기 위하여 각 층의 중립면으로부터 거리가 $Z_i (i=1,2,3)$ 만큼 떨어져있는 임의 점 (x, y, z) 의 X 및 Y 축 방향의 변위 (u_i, v_i) 는 각 층 중립면의 X, Y 축 방향의 변위 u_0, v_0 와 두께 방향의 일차식을 합하여 나타내고, 각 층 중립면의 Z 축 방향 변위인 w_0 는 두께에 따라 일정하다고 가정하면 직교 좌표계를 갖는 심재와 상, 하층면재의 임의 점 (x, y, z) 에서의 변위와 심재와 면재사이 변위의 연속조건으로부터 상, 하층면재 및 심재의 변위식을 (2.1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u_0(x, y) + \frac{h}{2} \theta_{x2} + \frac{t_1}{2} \theta_{x1} - z_1 \theta_{x1} \\ v_1(x, y, z) &= v_0(x, y) + \frac{h}{2} \theta_{y2} + \frac{t_1}{2} \theta_{y1} - z_1 \theta_{y1} \\ w_1(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.1.a)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, y, z) &= u_0(x, y) - z_2 \theta_{x2} \\ v_2(x, y, z) &= v_0(x, y) - z_2 \theta_{y2} \\ w_2(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.1.b)$$

$$\begin{aligned} u_3(x, y, z) &= u_0(x, y) - \frac{h}{2} \theta_{x2} + \frac{t_2}{2} \theta_{x3} - z_3 \theta_{x3} \\ v_3(x, y, z) &= v_0(x, y) - \frac{h}{2} \theta_{y2} + \frac{t_2}{2} \theta_{y3} - z_3 \theta_{y3} \\ w_3(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.1.c)$$

식 (2.1.a), (2.1.b), (2.1.c)는 각각 상층면재, 심재, 하층면재의 변위 u_i, v_i, w_i 에 대한 식이다. u_i, v_i, w_i 는 복합샌드위치판의 각 층별 임의점 (x, y, z) 에서의 X, Y, Z 축 방향의 변위이고 θ_{xi}, θ_{yi} 는 중립면에 수직인 성분의 X 축 및 Y 축 방향의 각층별 회전각으로 그림 2.1(b)와 같다.

미소변형이론에 의하여 3차원 탄성체의 변형도-변위 관계식에서 고차항을 무시하고 '판의 두께는 변의 길이에 비하여 매우 작다'는 기본 가정에 의하여 판에 수직인 변형도를 무시하면 식

(2-2)과 같은 판의 변형도-변위 관계식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \epsilon_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.2)$$

국부 전단변형을 고려하여 가정된 변위인 식 (2.1)을 판의 변형도-변위 관계식인 식 (2.2)에 대입하여 적합방정식을 구하면 식 (2-3)와 같다.

변형도-변위 관계식인 식 (2.3)를 변형도 벡터 ϵ_i 으로 표시하면 식 (2.3.a), (2.3.b) 같이 나타나며, $(\epsilon^{mb})_i$ 는 식 (2.3.c)와 같다.

$$\begin{pmatrix} \epsilon \\ \epsilon_s \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \epsilon_o \\ \epsilon_s \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} \epsilon^{mb} \\ 0 \end{pmatrix}_i + z_i \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix}_i, \quad (\epsilon^o)_i = \begin{pmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{pmatrix} \quad (2.3.a)$$

$$(K)_i = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \theta_{xi}}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_{yi}}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_{xi}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{yi}}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (2.3.b)$$

$$(\epsilon^{mb})_1 = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \frac{\partial \theta_{x2}}{\partial x} + \frac{t_1}{2} \frac{\partial \theta_{x1}}{\partial x} \\ \frac{h}{2} \frac{\partial \theta_{y2}}{\partial y} + \frac{t_1}{2} \frac{\partial \theta_{y1}}{\partial y} \\ \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \theta_{x2}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{y2}}{\partial x} \right) + \frac{t_1}{2} \left(\frac{\partial \theta_{x1}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{y1}}{\partial x} \right) \end{pmatrix}$$

$$(\epsilon^{mb})_2 = 0$$

$$(\epsilon^s)_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_{xi} \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_{yi} \end{pmatrix}$$

$$(\epsilon^{mb})_3 = \begin{pmatrix} -\left(\frac{h}{2} \frac{\partial \theta_{x2}}{\partial x} + \frac{t_2}{2} \frac{\partial \theta_{x3}}{\partial x}\right) \\ -\left(\frac{h}{2} \frac{\partial \theta_{y2}}{\partial y} + \frac{t_2}{2} \frac{\partial \theta_{y3}}{\partial y}\right) \\ -\left[\frac{h}{2} \left(\frac{\partial \theta_{x2}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{y2}}{\partial x}\right) + \frac{t_2}{2} \left(\frac{\partial \theta_{x3}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_{y3}}{\partial x}\right)\right] \end{pmatrix} \quad (2.3.c)$$

복합샌드위치평판에 있어서 면재는 적층판으로서 각 층의 재료축을 화이버 방향과 화이버의 직각 방향으로 1축 및 2축을 정의하면 1축이 X축과 θ 만큼 기울어져 있을 때의 재료축의 정의는 그림 2.2에 나타내었으며, 재료축에 대한 응력-변형도 관계식은 식 (2.4)과 같다.

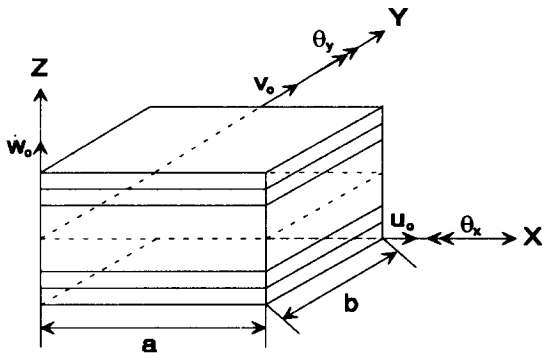


그림 2.2. 임의 각도로 배열된 복합면재를 갖는 샌드위치평판의 재료축

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{66} & 0 & 0 \\ & & & Q_{44} & 0 \\ & SYM. & & & Q_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

여기서, Q_{ij} 는 화이버 보강방향이 재료축에 일치된 경우의 적층판 탄성계수이다. Q_{ij} 를 공학상수로 표시하면 식 (2.5)과 같다.

$$\begin{aligned} Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} & Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \\ Q_{44} &= G_{23}, & Q_{55} &= G_{13}, & Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.5)$$

여기서, $E1$ 및 $E2$ 는 단층(Lamina)의 1방향과 2방향의 탄성계수이고, ν_{12} 및 ν_{21} 은 포아송비이고, $G12$, $G23$, $G13$ 는 단층(Lamina)의 전단탄성계수이다. 재료축에 대한 응력 관계식 (2.4)을 구조축에 대한 응력-변형도 관계로 변환하면 식 (2.6)과 같다.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

여기서, \bar{Q}_{ij} 는 구조 좌표계에 대한 적층판의 탄성계수이며 그 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{12} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{66} - 2Q_{66}) \\ &\quad \sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)\end{aligned}$$

$$\bar{Q}_{44} = Q_{44}\cos^2\theta + Q_{55}\sin^2\theta$$

$$\bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})\sin\theta\cos\theta$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{55}\cos^2\theta + Q_{44}\sin^2\theta \text{ 이다.}$$

면심재별로 임의의 두께를 갖는 복합샌드위치 평판의 면내력은 각 응력을 두께에 대하여 적분하여 구하며 식 (2.7)과 같다. 두께방향의 적분항을 소거하기 위하여 식 (2.8)과 같이 복합샌드위치 평판의 비등방성 강성을 정의한다.

$$\begin{aligned}(N_x, N_y, N_{xy}, N_{yz}, N_{xz})_i \\ = \int_{h/2}^i (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})_1 dz \\ + \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})_2 dz \\ + \int_{t_2}^{-h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})_3 dz\end{aligned} \quad (2.7a)$$

$$\begin{aligned}(M_x, M_y, M_{xy}) \\ = \int_{h/2}^i (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})_1 z dz \\ + \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})_2 z dz \\ + \int_{t_2}^{-h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})_3 z dz\end{aligned} \quad (2.7.b)$$

$$\begin{aligned}A_{ij}^{(i)} = A_{ij}^{(1)} + A_{ij}^{(2)} + A_{ij}^{(3)} = \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \bar{Q}_{mij} dz \\ (ij = 1, 2, 6) \quad (2.8.a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{kl}^{(i)} = A_{kl}^{(1)} + A_{kl}^{(2)} + A_{kl}^{(3)} = K_i K_j \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \bar{Q}_{mij} dz \\ (k, l = 4, 5) \quad (2.8.b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_{ij}^{(i)} = B_{ij}^{(1)} + B_{ij}^{(2)} + B_{ij}^{(3)} = \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} z \bar{Q}_{mij} dz \\ (ij = 1, 2, 6) \quad (2.8.c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{ij}^{(i)} = D_{ij}^{(1)} + D_{ij}^{(2)} + D_{ij}^{(3)} = \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} z^2 \bar{Q}_{mij} dz \\ (ij = 1, 2, 6) \quad (2.8.d)\end{aligned}$$

여기서, $A_{ij}^{(i)}$: 면내력 강도
 $B_{ij}^{(i)}$: 휨-면내력 복합강도
 $D_{ij}^{(i)}$: 휨 강도
 K_i, K_j : 전단보정계수이다.

식 (2.7)에 응력-변형도 관계식인 식 (2.6)과 변형도-변위 관계식인 식 (2.3)를 대입하여 정리하면 식 (2.9)과 같이 단면력-변위 관계식으로 표시할 수 있으며, 식 (2.9)을 간략하게 표현하면 식 (2.10)와 같다.

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix}_i = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xi}^o + \epsilon_i^{mb} \\ \epsilon_{yi}^o + \epsilon_i^{mb} \\ \epsilon_{xyi}^o + \epsilon_i^{mb} \\ x_{xi}^o \\ x_{yi}^o \\ x_{xyi}^o \end{pmatrix}_i$$

$$\begin{pmatrix} N_{xy} \\ N_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^{(i)} & A_{45}^{(i)} \\ A_{54}^{(i)} & A_{55}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix},$$

$$= (A_{kl}^{(i)}) \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\begin{pmatrix} N \\ - \\ M \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & B \\ - & - & - \\ B & | & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_o \\ - \\ x_o \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

복합재료 면재를 갖는 복합샌드위치평판의 구조계 전체에 대한 포텐셜에너지 Π 는 각 구성재의 변형에너지라는 내적 포텐셜과 외력에 의해 발생하는 외적 포텐셜의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \int \int_A [(\epsilon^o + \epsilon^{mb})_i]^T [A^{(i)}] (\epsilon^o + \epsilon^{mb})_i \\ & + 2(\epsilon^o + \epsilon^{mb})_i^T [B^{(i)}] (K)_i + (K)_i^T [D^{(i)}] (K)_i \\ & - (\epsilon^s)_i^T [A_{kl}] (\epsilon^s)_i dx dy \\ & - \int \int_A P(x, y) w dx dy \\ & - \frac{1}{2} \int \int_A \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + 2N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (2.11)$$

전체포텐셜 에너지 식 (2.11)에 대해 1차 변분을 취하면

$$\delta \Pi = 0 \quad (2.12)$$

이 된다. 식 (2.12)를 부분적분하여 정리하면 변위를 나타내는 9개의 지배방정식을 얻을 수 있다.

2) 해석적인 방법에 의한 해법

복합면재를 갖는 샌드위치평판의 외부경계조건이 단순지지 상태일 경우는 해석적인 방법으로 해

를 구할 수 있다. 즉 변위 및 하중을 경계조건에 맞는 이중삼각함수 형태의 푸리에급수로 변환하여 지배방정식에 대입하여 해를 구하는 방법으로 이 방법은 해석적인 방법의 하나로 매우 정확한 결과를 나타내지만 하중이 판에 직각으로 작용하는 외부 경계조건이 단순지지인 경우에만 해석이 가능하고, 복합면재의 경우 크로스-플라이인 경우나 역대칭 앵글-플라이(Antisymmetric Angle ply)인 경우만 가능하다. 평판에 작용하는 하중을 중조화 함수의 급수형태로 가정하면 식 (2.13), (2.14)과 같이 표시된다. 이때 Q_{mn} 을 하중형태에 따라 구하면 표 2.1과 같이 나타난다.

$$p_z = \sum_{m,n=1}^{\infty} Q_{mn} \cdot \sin \alpha x \cdot \sin \beta y \quad (2.13)$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \cdot \sin \alpha x \cdot \sin \beta y dx dy \quad (2.14)$$

여기서, $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$ 이다.

표 2.1. 하중형태에 따른 하중계수, Q_{mn}

하중 형태	하중계수 Q_{mn}	
등분포하중 q	$\left(\frac{4q}{mn\pi^2} \right) \cdot (1 - \cos m\pi) \cdot (1 - \cos n\pi)$	
	$\frac{16q}{mn\pi^2}$: for odd m,n	0 : for even m,n
집중하중 $P(\xi, \eta)$	$\left(\frac{16P}{ab} \right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right)$	
등분포하중 $\left\{ q(\xi, \eta) \mid -\frac{a}{2} < \xi < \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} < \eta < \frac{b}{2} \right\}$	$\left(\frac{16P}{\pi^2 mnab} \right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right) \cdot \left(\frac{n\pi}{2b} \right)$	

0° 와 90° 방향으로 보강되어 있는 크로스 플라이 면재를 갖는 샌드위치평판의 연계성중 $A16=A26=A45=B16=B26=D16=D26=0$

이 되며, 9개의 지배방정식은 부록 1과 같다. 지배방정식을 해석하기 위하여 복합샌드위치평판의 변위 및 하중은 경계조건을 고려하여 이중삼각함수 형태의 푸리에급수로 변환하여 해를 구할 수 있다. 복합샌드위치평판의 X축 및 Y축 방향의 변위를 각각 a , b 라고 하면, 판의 경계조건은 표 2.2와 같다. 샌드위치평판의 변위는 표 2.2의 경계조건을 만족하는 이중삼각함수의 급수형태로 식 (2.27)과 같이 가정하며, 가정된 변위 및 하중함수를 부록1의 9개의 지배방정식에 대입하여 행렬방정식 형태로 표시하면 식 (2.16)와 같다.

표 2.2 크로스-플라이 면재를 갖는 샌드위치평판의 경계조건

경계면	경계조건
$x=0, a$	$W = M_x = \theta_{y1} = \theta_{y2} = \theta_{y3} = 0$
$y=0, b$	$W = M_y = \theta_{x1} = \theta_{x2} = \theta_{x3} = 0$

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}^1 \cos ax \sin by, \\
 v_0 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}^2 \sin ax \cos by \\
 w_0 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}^3 \sin ax \sin by, \\
 \theta_{x1} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}^4 \cos ax \sin by \\
 \theta_{y1} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}^5 \sin ax \cos by, \\
 \theta_{x2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}^6 \cos ax \sin by \\
 \theta_{y2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}^7 \sin ax \cos by, \\
 \theta_{x3} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}^8 \cos ax \sin by \\
 \theta_{y3} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn}^9 \sin ax \cos by \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

여기서, $\alpha = \frac{m\pi}{a}$, $\beta = \frac{n\pi}{b}$ 이다.

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (2.16)$$

여기서, $[K]$ 는 9×9 의 계수행렬이며, $\{\delta\}$ 는 일반화 좌표벡터이며, $\{F\}$ 는 일반화 하중벡터이며, 식 (2.16)의 계수행렬 $[K]$ 벡터의 각 요소는 부록 2에 나타내었다.

3) 수치해석에 및 결과분석

본 연구는 복합면재, 심재에 대해서 휨강성, 전단변형효과를 모두 고려했으며, 상하층면재의 두께가 다른 경우도 해석할 수 있는 비대칭 비등방성 복합면재를 갖는 비균형 복합샌드위치평판에 대해 해석을 할 수가 있다. 복합면재는 동일한 두께의 여러개의 층으로 구성되어 있고 각층의 재료축이 구조축과 서로다른 각도를 이루면서 나타나는 비등방성 성질에 따라 제한적으로 해석적인 방법으로 해석이 가능한데 본 연구에서는 크로스-플라이 복합면재를 갖는 샌드위치평판의 변위를 분석하였다. 이와 같은 복합면재를 갖는 샌드위치평판에 하중이 중립면에 수직으로 작용하고 외부 경계조건이 단순지지되어 있으며, 복합샌드위치평판의 재료적 성질은 표 3.1과 같다.

표 3.1 복합면재를 갖는 샌드위치평판의 해석모델에 대한 심재, 면재의 재료적 성질 (Gpa)

FACE	E1	E2	V12	G12
(Graphite/epoxy)	2070	5.17	0.25	5.17
CORE	Ez	Gx	Gy	Ex=Ey=Gxy
(Glass fabric honeycomb)	0.300	0.241	0.117	0

또한 본 연구의 해석방법은 심재, 면재의 휨강성과 국부 전단변형 효과를 고려한 해석으로서 일반 적층판에 적용시켜 해법의 타당성을 확인하였다. 크로스-플라이인 경우를 예로 하였을 때 각 재료축이 이루는 각도가 $[0/90]$ 이고 재료의 역학적 성질이 $E1/E2 = 40$, $G12/E2 = G13/E2 = 0.5$, $G23/E2 = 0.6$, $V12 = V13 = 0.25$ 이

며, 네변이 단순지지되어 있을 때 적층판의 길이-두께비(a/h)에 따라 중앙점의 처짐값을 무차원하여 표 3.2에 나타내었다. 국부 전단변형효과를 고려한 본 연구 해석방법의 결과 일반 적층판이론과 비교하였을 때, 처짐값에 있어서 판의 길이-두께비(a/h)가 4인 경우 1차전단변형을 고려한 이론보다 0.4% 정도 크게 나타났고 고차 전단변형을 고려한 이론보다는 3.5% 정도 적게 나타난 것을 볼 수 있으며, 이 결과를 그림 3.1에 나타내었다.

표 3.2 폭-께비(a/h)에 따른 적층판의 각 이론별 무차원화한 중앙처짐값의 비교, $[0/90]$, $[w_x E_2 t^3 10^2 / (q_x a^4)]$

해석결과 a/h	SWPT (present)	FSDT	HSDT	CPT
4	3.0203	3.0081	3.0706	1.6977
5	2.5742	2.5350	2.5791	1.6977
10	1.9162	1.9049	1.91731	1.6977
20	1.7490	1.7478	1.7509	1.6977
25	1.7300	1.7289	1.7310	1.6977
100	1.6978	1.6976	1.6977	1.6977

- * SWPT : Sandwich Plate Theory with Local Shear Deformation
- * FSDT : First Order Shear Deformation Theory
- * HSDT : Higher Order Shear Deformation Theory
- * C P T : Classical Laminated Plates Theory

$$[w_x E_2 t^3 10^2 / (q_x a^4)]$$

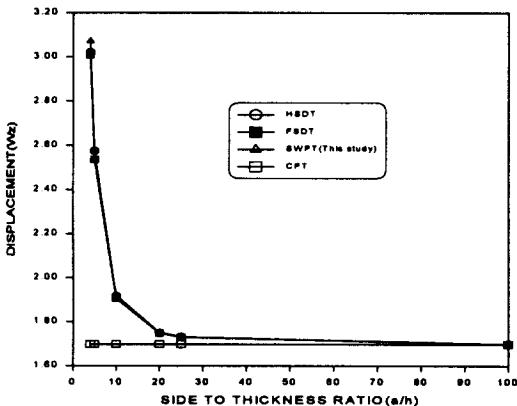


그림 3.1 폭-께비(a/h)에 따른 각 이론별 적층판의 무차원화한 중앙처짐값의 비교, $[0/90]$

본 연구 해석방법으로 복합재료 면재를 갖는 샌드위치평판의 경우에 대한 해석으로서, 각 면재는 단일층으로 적층되어 있으며 면재의 각 재료축이 이루는 각도는 $[0/CORE/0]$ 이고 외부경계가 단순지지되어 있을 때 샌드위치평판의 길이-두께비(a/h) 변화에 따라 일반 적층판이론에 의한 중앙점의 처짐값을 무차원량화 하여 일반 적층판이론의 값과 비교하여 표 3.3과 그림 3.2에 나타내었다. 표 3.3에 나타난 바와 같이 판의 길이-두께비(a/h)가 4에서 본 연구의 결과가 일반 적층판이론(HSDT)의 값보다 약 2.8% 정도, 10에서는 약 2.05% 정도 큰 값을 나타내고 있다. 길이-두께비가(a/h)가 5이상 부터는 일반 적층판이론으로 구한 값보다 커지는데 그 이유로서는 국부 전단변형을 각각 고려하였기 때문이라고 사료된다.

표 3.3. 복합면재를 갖는 샌드위치평판의 폭-두께비에 따른(a/h) 각 이론별 중앙 처짐값의 비교, $[0/CORE/0]$, $[w_x E_2 t^3 10^2 / (q_x a^4)]$

해석방법 a/h	CPT	FSDT	HSDT	SWPT (present)
4	1.3257	5.1275	7.6697	7.8850
5	1.3257	5.1275	7.6697	7.8850
10	1.3257	2.3398	3.1180	3.1820
20	1.3257	1.5848	1.7934	2.1466
25	1.3257	1.4920	1.6266	1.6694
100	1.3257	1.3362	1.3447	1.3522

그림 3.3은 복합재료로 단일적층된 샌드위치판인 경우로 면재의 재료축이 이루는 각도가 $[0/CORE/0]$ 와 $[90/CORE/90]$ 이고 외부경계가 단순지지되어 있을 때 X축 방향으로 처짐값을 나타낸 것인데 중앙점에서는 처짐값이 같음을 알 수 있다.

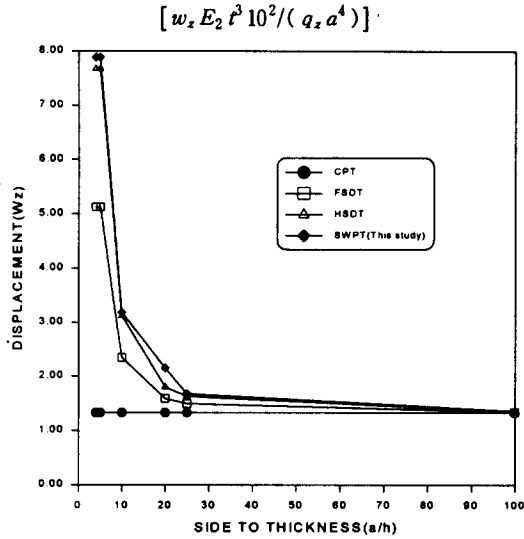


그림 3.3 복합면재를 갖는 샌드위치평판의 폭-두께비에 따른(a/h) 각 이론별 중앙 처짐값의 비교, [0/CORE/0]

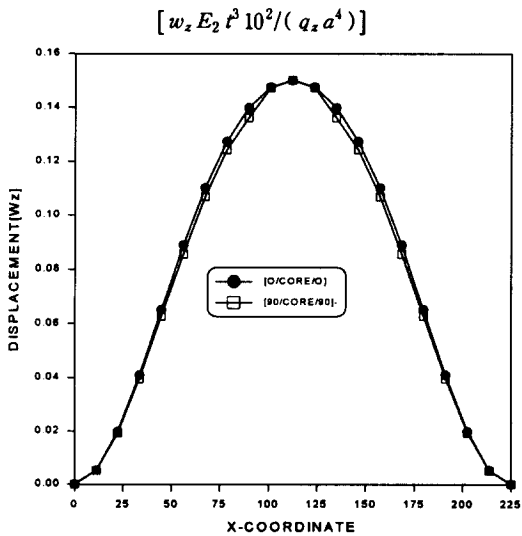


그림 3.3 복합면재를 갖는 샌드위치평판의 중앙 처짐값의 비교, [0/CORE/0] & [90/CORE/90]

푸리에급수항의 개수에 따른 중앙점의 처짐을 표 3.4와 그림 3.4에 나타내었다. 푸리에 급수항이 15개 이후부터는 정확해와 비교하여 0.01% 미만의 수렴된 값을 보이므로 본 연구에서는 17

개의 푸리에 급수항을 사용하였다.

표 3.4 샌드위치판 이론과 일반 적층판 이론에 의한 중앙처짐 값의 비교,

$$[0/CORE/0], [w_z E_2 t^3 10^2 / (q_z a^4)]$$

푸리에급수항수	처짐	정확도(%)
1	0.16270	93.245
3	0.15246	99.508
5	0.15239	99.554
7	0.15194	99.848
9	0.15193	99.855
11	0.15172	99.999
13	0.15172	99.999
15	0.15172	99.999
정확해	0.15171	100

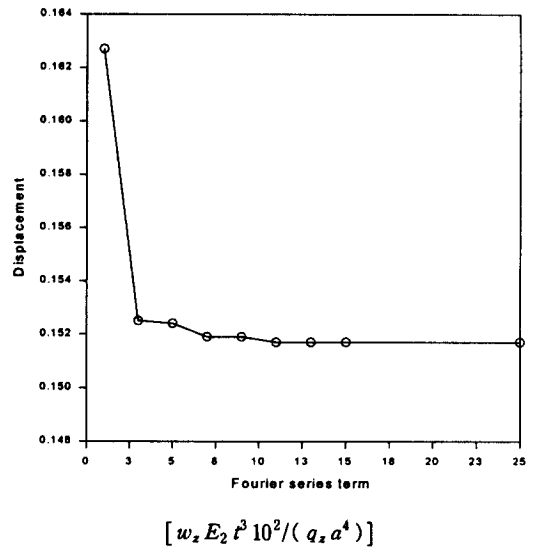


그림 3.4 급수항에 대한 수렴도, [0/CORE/0]

3. 결 론

본 연구에서는 복합면재를 갖는 복합샌드위치 평판에서 면재와 심재의 경계면이 완전히 접촉된 것으로 보고 면심재에 대해서 국부전단변형과 휨 효과를 고려한 것으로서 에너지방법에 의해 수식

화하여, 9개의 지배방정식을 유도하였고 해석적인 방법으로 탄성해를 구하였다. 여러 가지 경우의 복합재료 면재를 갖는 샌드위치평판의 수치해석을 실시하여 검토 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1) 면심재별로 국부전단변형효과를 고려한 본 연구의 해석방법은 일반적인 적층판해석에 적용가능함을 알 수 있었다. 본 연구의 해석모델은 2개 층인 [0/90] 이고 판의 길이-두께비가 4인 경우 1차 전단변형을 고려한 이론보다 0.4% 정도 크게 나타났고, 고차 전단변형을 고려한 이론보다 3.5% 정도 적게 나타내고 있다.

2) 복합면재를 갖는 샌드위치평판에 대해 국부전단변형효과를 고려한 해석방법으로 구한 값이 전단변형을 고려한 적층판이론(FSDT, HSDT)의 값을 비교한 결과 판의 길이-두께비(a/t)가 4인 경우에 4.8% 더 큰값을 나타내고 있으며 이것은 면심재별로 국부 전단변형과 휨강성을 고려했기 때문이라고 사료된다.

참 고 문 헌

- (1) 이상범, 지효선, 장석윤, "유한점착강성을 고려한 복합샌드위치평판의 해석", 한국강구조학회학술발표논문집(1997), pp. 36-42
- (2) 지효선, 우영택, 장석윤, "두꺼운 CORE를 갖는 복합적층 SANDWICH 판의 해석", 한국강구조학회지 제8권 제2호(1996), pp. 125-137
- (3) 지효선, 한성천, 장석윤, "전단변형을 고려한 직교이방성 복합SANDWICH 판의 해석", 서울시립대학교 산업기술연구소 논문집, 제3집(1995), pp. 85-114
- (4) Pagano, N. J., " Exact Solution for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates.", J. Comp. Mater., Vol.6 (1972), pp. 426-440
- (5) Charles, L. and Batdorf, S.B., "A General Small Deflection Theory for Flat

Sandwich Plates", NACA TN-1526(1948)

- (6) Allen, H. G., "Analysis and Design of Structural Sandwich Panels", Pergamon, Oxford(1969)
- (7) Reddy, J. N., " Energy and Variational Methods in Applied Mechanics", John Willy & Sons(1984)

(접수일자 : 1997. 11. 17)

부 록

부록 1 : 국부 전단변형을 고려한 지배방정식

$$\begin{aligned}
 \delta U_o: & \left[A_{11}^{(1)} + A_{11}^{(2)} + A_{11}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 U_o}{\partial x^2} \\
 & + \left[A_{66}^{(1)} + A_{66}^{(2)} + A_{66}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 U_o}{\partial y^2} \\
 & + \left[A_{12}^{(1)} + A_{12}^{(2)} + A_{12}^{(3)} + A_{66}^{(1)} + A_{66}^{(2)} + A_{66}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 V_o}{\partial x \partial y} \\
 & + \left[A_{11}^{(1)} \left(\frac{f_1}{2} \right) - B_{11}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x1}}{\partial x^2} \\
 & + \left[A_{66}^{(1)} \left(\frac{f_1}{2} \right) - B_{66}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{y1}}{\partial y^2} \\
 & + \left[A_{12}^{(1)} \left(\frac{f_1}{2} \right) + A_{66}^{(1)} \left(\frac{f_1}{2} \right) - B_{12}^{(1)} - B_{66}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{y1}}{\partial x \partial y} \\
 & + \left[A_{11}^{(1)} \left(\frac{h}{2} \right) - A_{11}^{(3)} - B_{11}^{(2)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x1}}{\partial x^2} \\
 & + \left[A_{66}^{(1)} \left(\frac{h}{2} \right) - B_{66}^{(2)} - A_{66}^{(3)} \left(\frac{h}{2} \right) \right] \frac{\partial^2 \theta_{y2}}{\partial y^2} \\
 & + \left[A_{12}^{(1)} \left(\frac{h}{2} \right) - A_{12}^{(3)} \left(\frac{h}{2} \right) + A_{66}^{(1)} \left(\frac{h}{2} \right) - A_{66}^{(3)} \left(\frac{h}{2} \right) - B_{12}^{(2)} - B_{66}^{(2)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{y2}}{\partial x \partial y} \\
 & + \left[-A_{11}^{(3)} \left(\frac{t_2}{2} \right) - B_{11}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x3}}{\partial x^2} \\
 & + \left[-A_{66}^{(3)} \left(\frac{t_2}{2} \right) - B_{66}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{y3}}{\partial y^2} \\
 & + \left[-A_{12}^{(3)} \left(\frac{t_2}{2} \right) - A_{66}^{(3)} \left(\frac{t_2}{2} \right) - B_{12}^{(3)} - B_{66}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{y3}}{\partial x \partial y} \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta V_o: & \left[A_{12}^{(1)} + A_{12}^{(2)} + A_{12}^{(3)} + A_{66}^{(1)} \right. \\
& \left. + A_{66}^{(2)} + A_{66}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 U_o}{\partial x \partial y} \\
& + \left[A_{66}^{(1)} + A_{66}^{(2)} + A_{66}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 V_o}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{22}^{(1)} + A_{22}^{(2)} + A_{22}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 V_o}{\partial y^2} + \\
& + \left[A_{12}^{(1)} \left(\frac{t_1}{2} \right) + A_{66}^{(1)} \left(\frac{t_1}{2} \right) - B_{12}^{(1)} - B_{66}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x1}}{\partial x \partial y} \\
& + \left[A_{66}^{(1)} \left(\frac{t_1}{2} \right) - B_{66}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{y1}}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{22}^{(1)} \left(\frac{t_1}{2} \right) - B_{22}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{y1}}{\partial y^2} \\
& + \left[2B_{26}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{y1}}{\partial x \partial y} \\
& + \left[A_{12}^{(1)} \left(\frac{h}{2} \right) + A_{12}^{(3)} \left(\frac{h}{2} \right) - A_{66}^{(1)} \left(\frac{h}{2} \right) \right. \\
& \left. - A_{66}^{(3)} \left(\frac{h}{2} \right) - B_{12}^{(2)} - B_{66}^{(2)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x2}}{\partial x \partial y} \\
& + \left[A_{66}^{(1)} \left(\frac{h}{2} \right) - B_{66}^{(2)} - A_{66}^{(3)} \left(\frac{h}{2} \right) \right] \frac{\partial^2 \theta_{x2}}{\partial y^2} \\
& + \left[A_{22}^{(1)} \left(\frac{h}{2} \right) - B_{22}^{(2)} - A_{22}^{(3)} \left(\frac{h}{2} \right) \right] \frac{\partial^2 \theta_{y2}}{\partial y^2} \\
& + \left[-B_{12}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x3}}{\partial x^2} \\
& + \left[-A_{12}^{(3)} \left(\frac{t_2}{2} \right) - A_{66}^{(3)} \left(\frac{t_2}{2} \right) - B_{66}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x3}}{\partial x \partial y} \\
& + \left[-A_{66}^{(3)} \left(\frac{t_2}{2} \right) - B_{66}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x3}}{\partial x^2} \\
& + \left[-A_{22}^{(3)} \left(\frac{t_2}{2} \right) - B_{22}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x3}}{\partial x^2} = 0 \\
\delta W: & \left[A_{44}^{(1)} + A_{44}^{(2)} + A_{44}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{55}^{(1)} + A_{55}^{(2)} + A_{55}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\
& + \left[-A_{44}^{(1)} \right] \frac{\partial \theta_{x1}}{\partial x} + \left[-A_{55}^{(1)} \right] \frac{\partial \theta_{y1}}{\partial y} \\
& + \left[-A_{44}^{(2)} \right] \frac{\partial \theta_{x2}}{\partial x} + \left[-A_{55}^{(2)} \right] \frac{\partial \theta_{y2}}{\partial y} \\
& + \left[-A_{44}^{(3)} \right] \frac{\partial \theta_{x3}}{\partial x} + \left[-A_{55}^{(3)} \right] \frac{\partial \theta_{y3}}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = p(x, y) \\
\delta \theta_{x1}: & \left[A_{11}^{(1)} \left(\frac{t_1}{2} \right) - B_{11}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 U_o}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{66}^{(1)} \left(\frac{t_1}{2} \right) - B_{66}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 U_o}{\partial y^2} \\
& + \left[A_{12}^{(1)} \left(\frac{t_1}{2} \right) + A_{66}^{(1)} \left(\frac{t_1}{2} \right) - B_{12}^{(1)} - B_{66}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 V_o}{\partial x \partial y} \\
& + \left[A_{44}^{(1)} \right] \frac{\partial w}{\partial x} + \left[A_{44}^{(1)} \right] \theta_{x1} \\
& + \left[A_{11}^{(1)} \left(\frac{t_1^2}{4} \right) - B_{11}^{(1)}(t_1) + D_{11}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x1}}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{66}^{(1)} \left(\frac{t_1^2}{4} \right) - B_{66}^{(1)}(t_1) + D_{66}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x1}}{\partial y^2} \\
& + \left[D_{12}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{y1}}{\partial x^2} + \left[A_{12}^{(1)} \left(\frac{t_1^2}{4} \right) + A_{66}^{(1)} \left(\frac{t_1^2}{4} \right) \right. \\
& \left. - B_{12}^{(1)}(t_1) + B_{66}^{(1)}(t_1) + D_{12}^{(1)} + D_{66}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{y1}}{\partial x \partial y} \\
& + \left[A_{11}^{(1)} \left(\frac{ht_1}{4} \right) - B_{11}^{(1)} \left(\frac{h}{2} \right) \right] \frac{\partial^2 \theta_{x2}}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{66}^{(1)} \left(\frac{ht_1}{4} \right) - B_{66}^{(1)} \left(\frac{h}{2} \right) \right] \frac{\partial^2 \theta_{x2}}{\partial y^2} \\
& + \left[A_{12}^{(1)} \left(\frac{ht_1}{4} \right) + A_{66}^{(1)} \left(\frac{ht_1}{4} \right) - B_{12}^{(1)} \left(\frac{h}{2} \right) \right. \\
& \left. - B_{66}^{(1)} \left(\frac{h}{2} \right) \right] \frac{\partial^2 \theta_{y2}}{\partial x \partial y} = 0 \\
\delta \theta_{y1}: & \left[A_{12}^{(1)} \left(\frac{t_1}{2} \right) + A_{66}^{(1)} \left(\frac{t_1}{2} \right) - B_{12}^{(1)} - B_{66}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 U_o}{\partial x \partial y} \\
& + \left[A_{66}^{(1)} \left(\frac{t_1}{2} \right) - B_{66}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 U_o}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{22}^{(1)} \left(\frac{t_1}{2} \right) - B_{22}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 V_o}{\partial y^2} + \left[A_{55}^{(1)} \right] \frac{\partial w}{\partial y} \\
& + \left[A_{55}^{(1)} \right] \theta_{y1} + \left[A_{12}^{(1)} \left(\frac{t_1^2}{4} \right) + A_{66}^{(1)} \left(\frac{t_1^2}{4} \right) \right. \\
& \left. - B_{12}^{(1)}(t_1) - B_{66}^{(1)}(t_1) + 2D_{12}^{(1)} + D_{66}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x1}}{\partial x \partial y} \\
& + \left[A_{66}^{(1)} \left(\frac{t_1^2}{4} \right) - B_{66}^{(1)}(t_1) + D_{66}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{y1}}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{22}^{(1)} \left(\frac{t_1^2}{4} \right) - B_{22}^{(1)}(t_1) + 2D_{22}^{(1)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{y1}}{\partial y^2} \\
& + \left[A_{12}^{(1)} \left(\frac{ht_1}{4} \right) + A_{66}^{(1)} \left(\frac{ht_1}{4} \right) - B_{12}^{(1)} \left(\frac{h}{2} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -B_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\left]\frac{\partial^2\theta_{x2}}{\partial x\partial y} + \left[A_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar t_1}{4}\right) - \right. \\
& B_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\left]\frac{\partial^2\theta_{y2}}{\partial x^2} + \left[A_{22}^{(1)}\left(\frac{\hbar t_1}{4}\right) - \right. \\
& \left. -B_{22}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2\theta_{y2}}{\partial y^2} = 0 \\
\delta\theta_{x2}; & \left[-A_{11}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) - A_{11}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) - B_{11}^{(2)}\right]\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) - B_{66}^{(2)} - A_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} \\
& + \left[A_{12}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) + A_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) - A_{12}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) \right. \\
& \left. - A_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) - B_{12}^{(1)} - B_{66}^{(2)}\right]\frac{\partial^2 V_0}{\partial x\partial y} \\
& + \left[A_{11}^{(1)}\left(\frac{\hbar t_1}{4}\right) - B_{11}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2\theta_{x1}}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar t_1}{4}\right) - B_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2\theta_{x1}}{\partial y^2} \\
& + \left[A_{44}^{(2)}\right]\theta_{x2} + \left[-A_{44}^{(2)}\right]\frac{\partial w}{\partial x} + \left[A_{12}^{(1)}\left(\frac{\hbar t_1}{4}\right) \right. \\
& \left. + A_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar t_1}{4}\right) - B_{12}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) - B_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2\theta_{y1}}{\partial x\partial y} \\
& + \left[A_{11}^{(1)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) + A_{11}^{(3)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) + D_{11}^{(2)}\right]\frac{\partial^2\theta_{x2}}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) + A_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) + D_{66}^{(2)}\right]\frac{\partial^2\theta_{x2}}{\partial y^2} \\
& + \left[A_{12}^{(1)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) + A_{12}^{(3)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) + A_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) \right. \\
& \left. + A_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) + D_{12}^{(2)} + D_{66}^{(2)}\right]\frac{\partial^2\theta_{y2}}{\partial x\partial y} \\
& + \left[A_{11}^{(3)}\left(\frac{\hbar t_2}{4}\right) + B_{11}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2\theta_{x3}}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar t_2}{4}\right) + B_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2\theta_{x3}}{\partial y^2} \\
& + \left[A_{12}^{(3)}\left(\frac{\hbar t_2}{4}\right) + A_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar t_2}{4}\right) + B_{12}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) \right. \\
& \left. + B_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2\theta_{y3}}{\partial x\partial y} = 0
\end{aligned}$$

$\delta\theta_{y2};$

$$\begin{aligned}
& \left[A_{12}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) + A_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) - A_{12}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) \right. \\
& \left. - A_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) - B_{12}^{(2)} - B_{66}^{(2)}\right]\frac{\partial^2 U_0}{\partial x\partial y} \\
& + \left[A_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) - A_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) - B_{66}^{(2)}\right]\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{22}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) - A_{22}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) - B_{22}^{(2)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} \\
& + \left[A_{55}^{(2)}\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[-A_{55}^{(2)}\right]\theta_{y2} + \\
& \left[A_{12}^{(1)}\left(\frac{\hbar t_1}{4}\right) + A_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar t_1}{4}\right) - B_{12}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) - B_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2\theta_{x1}}{\partial x\partial y} \\
& + \left[A_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar t_1}{4}\right) - B_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2\theta_{y1}}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{22}^{(1)}\left(\frac{\hbar t_1}{4}\right) - B_{22}^{(1)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2\theta_{y1}}{\partial y^2} \\
& + \left[A_{12}^{(1)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) + A_{12}^{(3)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) + A_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) \right. \\
& \left. + A_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) + D_{12}^{(1)} + D_{66}^{(2)}\right]\frac{\partial^2\theta_{x2}}{\partial x\partial y} \\
& + \left[A_{66}^{(1)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) + A_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) + D_{66}^{(2)}\right]\frac{\partial^2\theta_{y2}}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{22}^{(1)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) + A_{22}^{(3)}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) + D_{22}^{(2)}\right]\frac{\partial^2\theta_{y2}}{\partial y^2} \\
& + \left[A_{12}^{(3)}\left(\frac{\hbar t_2}{4}\right) + A_{66}^{(3)}\left(\frac{t_2}{2}\right) + B_{12}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) \right. \\
& \left. + B_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2\theta_{x3}}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar t_2}{4}\right) + B_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2\theta_{y3}}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{22}^{(3)}\left(\frac{\hbar t_2}{4}\right) + B_{22}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right)\right]\frac{\partial^2\theta_{y3}}{\partial y^2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\theta_{x3}; & \left[-A_{11}^{(3)}\left(\frac{t_2}{2}\right) - B_{11}^{(3)}\right]\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} \\
& + \left[-A_{66}^{(3)}\left(\frac{t_2}{2}\right) - B_{66}^{(3)}\right]\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} \\
& + \left[-A_{66}^{(3)}\left(\frac{t_2}{2}\right) - B_{12}^{(3)} - B_{66}^{(3)}\right]\frac{\partial^2 V_0}{\partial x\partial y} \\
& + \left[A_{44}^{(3)}\right]\frac{\partial w}{\partial x} + \left[A_{44}^{(3)}\right]\theta_{x3} + \left[A_{11}^{(3)}\left(\frac{\hbar t_2}{4}\right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) \left] \frac{\partial^2 \theta_{y2}}{\partial x^2} + \left[A_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar t_2}{4}\right) + B_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) \right] \right. \\
& \left. \frac{\partial^2 \theta_{y2}}{\partial y^2} + \left[A_{12}^{(3)}\left(\frac{\hbar t_2}{4}\right) + A_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) \right] \right. \\
& + B_{12}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) + B_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) \left] \frac{\partial^2 \theta_{y2}}{\partial x \partial y} \right. \\
& + \left[A_{11}^{(3)}\left(\frac{t_2^2}{4}\right) + B_{11}^{(3)}(t_2) + D_{11}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x3}}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{66}^{(3)}\left(\frac{t_2^2}{4}\right) + B_{66}^{(3)}(t_2) + D_{66}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x3}}{\partial y^2} \\
& + \left[A_{12}^{(3)}\left(\frac{t_2^2}{4}\right) + A_{66}^{(3)}\left(\frac{t_2^2}{4}\right) + B_{12}^{(3)}(t_2) \right. \\
& \left. + B_{66}^{(3)}(t_2) + D_{12}^{(3)} + D_{66}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x3}}{\partial x \partial y} = 0
\end{aligned}$$

$\delta \theta_{y3}$:

$$\begin{aligned}
& \left[-A_{12}^{(3)}\left(\frac{t_2}{2}\right) - A_{66}^{(3)}\left(\frac{t_2}{2}\right) - B_{12}^{(3)} - B_{66}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \\
& + \left[-A_{66}^{(3)}\left(\frac{t_2}{2}\right) - B_{66}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} \\
& + \left[-A_{22}^{(3)}\left(\frac{t_2}{2}\right) - B_{22}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} \\
& + \left[-A_{26}^{(3)}(t_2) - B_{26}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} + \left[A_{55}^{(3)} \right] \frac{\partial w}{\partial y} + \\
& \left[-A_{55}^{(3)} \right] \theta_{y3} + \left[A_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar t_2}{4}\right) + B_{66}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) \right] \frac{\partial^2 \theta_{y2}}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{22}^{(3)}\left(\frac{\hbar t_2}{4}\right) + B_{22}^{(3)}\left(\frac{\hbar}{2}\right) \right] \frac{\partial^2 \theta_{y2}}{\partial y^2} \\
& + \left[A_{12}^{(3)}\left(\frac{t_2^2}{4}\right) + A_{66}^{(3)}\left(\frac{t_2^2}{4}\right) + B_{12}^{(3)}(t_2) \right. \\
& \left. + B_{66}^{(3)}(t_2) + D_{12}^{(3)} + D_{66}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{x3}}{\partial x \partial y} \\
& + \left[A_{66}^{(3)}\left(\frac{t_2^2}{4}\right) + B_{66}^{(3)}(t_2) + D_{66}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{y3}}{\partial x^2} \\
& + \left[A_{22}^{(3)}\left(\frac{t_2^2}{4}\right) + B_{22}^{(3)}(t_2) + D_{22}^{(3)} \right] \frac{\partial^2 \theta_{y3}}{\partial y^2} = 0
\end{aligned}$$

부록 2 크로스-플라이 면재인 경우의 계수행렬

$$K_{11} = [(A_{11}^{(1)} + A_{11}^{(2)} + A_{11}^{(3)})] \alpha^2$$

$$\begin{aligned}
& + [(A_{66}^{(1)} + A_{66}^{(2)} + A_{66}^{(3)})] \beta^2 \\
K_{12} = & [(A_{12}^{(1)} + A_{12}^{(2)} + A_{12}^{(3)} + A_{66}^{(1)} \\
& + A_{66}^{(2)} + A_{66}^{(3)})] \alpha \beta
\end{aligned}$$

$$K_{14} = [(A_{11}^{(1)}\left(\frac{t_1}{2}\right) - B_{11}^{(1)}) \alpha^2 + (A_{66}^{(1)}\left(\frac{t_1}{2}\right) - B_{66}^{(1)}) \beta^2]$$

$$K_{15} = [(A_{12}^{(1)} + A_{66}^{(1)})\left(\frac{t_1}{2}\right) - (B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)})] \alpha \beta$$

$$\begin{aligned}
K_{16} = & [((A_{11}^{(1)} - A_{11}^{(3)})\left(\frac{\hbar}{2}\right) - B_{11}^{(3)}) \alpha^2 \\
& + ((A_{66}^{(1)} - A_{66}^{(3)})\left(\frac{\hbar}{2}\right) - B_{66}^{(2)}) \beta^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{17} = & [(A_{12}^{(1)} - A_{12}^{(3)})\left(\frac{\hbar}{2}\right) + (A_{66}^{(1)} \\
& - A_{66}^{(3)})\left(\frac{\hbar}{2}\right) - (B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)})] \alpha \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{18} = & [(-A_{11}^{(3)}\left(\frac{t_2}{2}\right) - B_{11}^{(3)}) \alpha^2 \\
& + (-A_{66}^{(3)}\left(\frac{t_2}{2}\right) - B_{66}^{(3)}) \beta^2]
\end{aligned}$$

$$K_{19} = [-(A_{12}^{(3)} + A_{66}^{(3)})\left(\frac{t_2}{2}\right) - (B_{12}^{(3)} + B_{66}^{(3)})] \alpha \beta$$

$$\begin{aligned}
K_{22} = & [(A_{66}^{(1)} + A_{66}^{(2)} + A_{66}^{(3)}) \alpha^2 + (A_{22}^{(1)} \\
& + A_{22}^{(2)} + A_{22}^{(3)}) \beta^2]
\end{aligned}$$

$$K_{24} = [(A_{12}^{(1)} + A_{66}^{(1)})\left(\frac{t_1}{2}\right) - (B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)})] \alpha \beta$$

$$\begin{aligned}
K_{25} = & [(A_{66}^{(1)}\left(\frac{t_1}{2}\right) - B_{66}^{(1)}) \alpha^2 + (A_{22}^{(1)} \\
& \left(\frac{t_1}{2}\right) - B_{22}^{(1)}) \beta^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{26} = & [(A_{12}^{(1)} - A_{12}^{(3)})\left(\frac{\hbar}{2}\right) + (A_{66}^{(1)} \\
& - A_{66}^{(3)})\left(\frac{\hbar}{2}\right) - (B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)})] \alpha \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{27} = & [((A_{22}^{(1)} - A_{22}^{(3)})\left(\frac{\hbar}{2}\right) - B_{22}^{(2)}) \beta^2 \\
& + ((A_{66}^{(1)} - A_{66}^{(3)})\left(\frac{\hbar}{2}\right) - B_{66}^{(2)}) \alpha^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{28} = & [-(A_{12}^{(3)} + A_{66}^{(3)})\left(\frac{t_2}{2}\right) - (B_{12}^{(3)} \\
& + B_{66}^{(3)})] \alpha \beta
\end{aligned}$$

$$K_{29} = [(-A_{66}^{(3)}\left(\frac{t_2}{2}\right) - B_{66}^{(3)}) \alpha^2$$

$$K_{66} = [(-A_{22}^{(3)} (\frac{t_2}{2}) - B_{22}^{(3)}) \beta^2 + (A_{44}^{(1)} + A_{44}^{(2)} + A_{44}^{(3)}) \alpha^2 + (A_{55}^{(1)} + A_{55}^{(2)} + A_{55}^{(3)}) \beta^2]$$

$$K_{34} = -A_{44}^{(1)} \alpha$$

$$K_{35} = -A_{55}^{(1)} \beta$$

$$K_{36} = -A_{44}^{(2)} \alpha$$

$$K_{37} = -A_{55}^{(2)} \beta$$

$$K_{38} = -A_{44}^{(3)} \alpha$$

$$K_{39} = -A_{55}^{(3)} \beta$$

$$K_{44} = [(A_{11}^{(1)} (\frac{t_1}{2})^2 - B_{11}^{(1)} t_1 + D_{11}^{(1)}) \alpha^2 + (A_{66}^{(1)} (\frac{t_1}{2})^2 - B_{66}^{(1)} t_1 + D_{66}^{(1)}) \beta^2 + A_{44}^{(1)}]$$

$$K_{45} = [(A_{12}^{(1)} + A_{66}^{(1)}) (\frac{t_1}{2})^2 - (B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}) t_1 + (D_{12}^{(1)} + D_{66}^{(1)})] \alpha \beta$$

$$K_{46} = [(A_{11}^{(1)} (\frac{ht_1}{4}) - B_{11}^{(1)} (\frac{h}{2})) \alpha^2 + (A_{66}^{(1)} (\frac{ht_1}{4}) - B_{66}^{(1)} (\frac{h}{2})) \beta^2]$$

$$K_{47} = [(A_{12}^{(1)} + A_{66}^{(1)}) (\frac{ht_1}{4}) - (B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}) (\frac{h}{2})] \alpha \beta$$

$$K_{55} = [(A_{66}^{(1)} (\frac{t_1}{2})^2 - B_{66}^{(1)} t_1 + D_{66}^{(1)}) \alpha^2 + (A_{22}^{(1)} (\frac{t_1}{2})^2 - B_{22}^{(1)} t_1 + D_{22}^{(1)}) \beta^2 + A_{55}^{(1)}]$$

$$K_{56} = [(A_{12}^{(1)} + A_{66}^{(1)}) (\frac{ht_1}{4}) - (B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}) (\frac{h}{2})] \alpha \beta$$

$$K_{57} = [(A_{66}^{(1)} (\frac{ht_1}{4}) - B_{66}^{(1)} (\frac{h}{2})) \alpha^2 + (A_{22}^{(1)} (\frac{ht_1}{4}) - B_{22}^{(1)} (\frac{h}{2})) \beta^2]$$

$$K_{66} = [((A_{11}^{(1)} + A_{11}^{(3)}) (\frac{h}{2})^2 + D_{11}^{(2)}) \alpha^2 + ((A_{66}^{(1)} + A_{66}^{(3)}) (\frac{h}{2})^2 + D_{66}^{(2)}) \beta^2 + A_{44}^{(2)}]$$

$$K_{67} = [(A_{12}^{(1)} + A_{12}^{(3)}) (\frac{h}{2})^2 + (A_{66}^{(1)} + A_{66}^{(3)}) (\frac{h}{2})^2 + (D_{12}^{(2)} + D_{66}^{(2)})] \alpha \beta$$

$$K_{68} = [(A_{11}^{(3)} (\frac{ht_2}{4}) + B_{11}^{(3)} (\frac{h}{2})) \alpha^2 + (A_{66}^{(3)} (\frac{ht_2}{4}) + B_{66}^{(3)} (\frac{h}{2})) \beta^2]$$

$$K_{69} = [(A_{12}^{(3)} + A_{66}^{(3)}) (\frac{ht_2}{4}) + (B_{12}^{(3)} + B_{66}^{(3)}) (\frac{h}{2})] \alpha \beta$$

$$K_{77} = [((A_{66}^{(1)} + A_{66}^{(3)}) (\frac{ht_2}{4}) + D_{66}^{(2)}) \alpha^2 + ((A_{22}^{(1)} + A_{22}^{(3)}) (\frac{h}{2})^2 + D_{22}^{(2)}) \beta^2 + A_{55}^{(2)}]$$

$$K_{78} = [(A_{12}^{(3)} + A_{66}^{(3)}) (\frac{ht_2}{4}) + (B_{12}^{(3)} + B_{66}^{(3)}) (\frac{h}{2})] \alpha^2$$

$$K_{79} = [(A_{66}^{(3)} (\frac{ht_2}{4}) + B_{66}^{(3)} (\frac{h}{2})) \alpha^2 + (A_{22}^{(3)} (\frac{ht_2}{4}) + B_{22}^{(3)} (\frac{h}{2})) \beta^2]$$

$$K_{88} = [(A_{11}^{(3)} (\frac{t_2}{2})^2 + B_{11}^{(3)} t_2 + D_{11}^{(3)}) \alpha^2 + (A_{66}^{(3)} (\frac{t_2}{2})^2 + B_{66}^{(3)} t_2 + D_{66}^{(3)}) \beta^2 + A_{44}^{(3)}] K_{89} = [(A_{12}^{(3)} + A_{66}^{(3)}) (\frac{t_2}{2})^2 + (B_{12}^{(3)} + B_{66}^{(3)}) t_2 + (D_{12}^{(3)} + D_{66}^{(3)})] \alpha \beta$$

$$K_{99} = [(A_{66}^{(3)} (\frac{t_2}{2})^2 + B_{66}^{(3)} t_2 + D_{66}^{(3)}) \alpha^2 + (A_{22}^{(3)} (\frac{t_2}{2})^2 + B_{22}^{(3)} t_2 + D_{22}^{(3)}) \beta^2 + A_{55}^{(3)}]$$