이축 대칭단면을 갖는 박벽 원형아치의 면외좌굴해석

Out-of-plane Buckling Analysis of Doubly Symmetric Thin-walled Circular Arch

김 문 영[1] · 민 병 철[2] · 김 성 보[3]

Kim, Moon Young Min, Byoung Cheol Kim, Sung Bo

요 약 : 본 연구에서는 이축 대칭단면을 갖는 박벽 원형아치의 안정성해석을 수행할 수 있는 유한요소 이론 및 엄밀해를 제시하기 위하여, 가상일의 원리를 이용한 3차원 연속체의 운동방정식을 제시한다. 박벽단면의 구속된 비틂(restrained warping)효과를 고려하는 박벽 곡선보의 변위장을 도입하고 이를 연속체의 운동방정식에 대입하여 단면에 대해 적분함으로써 박벽 곡선보의 운동방정식을 유도한다. 단순지지되고 이축 대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 면외좌굴에 대한 엄밀해를 제시하고 박벽 곡선보를 유한요소로 분할하여 요소의 변위장을 요소 변위벡터에 관한 3차의 Hermitian 다항식으로 나타내어 운동방정식에 대입함으로써 탄성 강도행렬과 기하학적 강도행렬을 유도한다. 또한 본 연구에서 얻어진 엄밀해와 박벽 곡선보요소를 이용한 유한요소해석결과를 다른 연구자들의 결과 및 직선 박벽보 요소를 이용한 해석결과와 비교 검토를 함으로써 본 연구의 타당성을 입증한다.

ABSTRACT : A consistent finite element formulation and analytic solutions are presented for stability of thin-walled circular arch. The total potential energy is derived by applying the principle of linearized virtual work and including second order terms of finite semitangential rotations. As a result, the energy functional corresponding to the semitangential moment is newly derived. Analytic solutions for the out-of-plane buckling of symmetric thin-walled curved beam subjected to pure bending or uniform compression with simply supported boundary conditions are obtained. For finite element analysis, the cubic Hermitian polynomials are utilized as shape functions and 16×16 stiffness matrix for curved beam elements and 14×14 stiffness matrix for straight beam elements are evaluated, respectively. In order to illustrate the accuracy of this study, analytical and numerical results for lateral buckling problems of circular arch are presented and compared with available analytical solutions.

핵 심 용 어 : 좌굴; 박벽보; 원형 곡선보; 유한요소법, 이축 대칭단면; 엄밀해

KEYWORDS : buckling; thin-walled beam; circular curved beam; finite element method; doubly symmetric cross-section; analytic solution; semitangential rotation

1) 정회원, 성균관대학교 토목공학과 부교수
2) 성균관대학교 토목공학과 박사과정
3) 충북대학교 토목공학과 전임강사

본 논문에 대한 토의를 1999년 3월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

1. 서 론

교통량의 흐름을 효과적으로 유도하고 동시에 도시 미관을 고려하기 위하여 대도시에서는 고가도로의 건설이 요구된다. 아치교(arch bridge)나 곡선교(horizontally curved bridge)는 교량건설에 있어서 널리 적용되는 구조이며 적절히 설계가 이루어진다면 미관이 뛰어나고 매우 경제적인 교량구조가 될 수 있다. 또한 건설 지점의 입지조건 등에 의해 곡선교의 건설이 불가피한 경우가 많기 때문에 이에 대한 정확한 해석은 매우 중요하다. 그러나 임의의 형상과 하중조건 그리고 지지조건 등을 고려한 실제 구조물의 해석은 복잡하고 까다롭기 때문에 일반적으로 엄밀한 곡선교 해석에 의해 설계되지 않고 짧은 지간의 직선교 해석을 통해 외형상 곡선 형태를 갖는 교량을 설계함으로써 지상도로의 교통흐름을 부자연스럽게 할 뿐만 아니라 비경제적이며 불합리한 곡선교의 건설이 이루어지고 있다.

일반적으로 강 곡선교는 휨모멘트 외에 곡률의 영향으로 비틀림모멘트를 항상 받기 때문에 이를 안전하게 받아주기 위하여 주로 박스형 거더를 이용하게 되는데 박벽보(thin-walled beam)의 거동을 정확히 파악할 수만 있다면 설계와 시공이 간편한 판형 박벽보를 이용하여 곡선교를 설계하는 것이 보다 경제적이다. 박벽보는 주어지는 외력에 대하여 최소한의 자중을 갖는 단면 형태지만 휨과 비틂의 연계효과로 인하여 구조적인 거동특성이 매우 복잡한 양상을 보인다. 따라서 박벽보를 이용하여 구조물을 설계하기 위해서는 박벽보의 좌굴거동을 정확히 파악할 수 있어야 한다.

Timoshenko[1]는 I형 단면의 warping 구속효과를 고려한 직선 박벽보의 비틂좌굴이론을 정립하였으며, Vlasov[2]는 Timoshenko의 연구와는 독립적으로 뒴(warping) 효과를 고려한 직선 및 곡선 박벽보에 대한 체계적인 이론을 제시하였다. Papangelis와 Trahair[3,4]는 아치의 횡좌굴하중에 대한 이론식을 제시하고 실험을 통하여 검증하였다.

Yang과 Kuo[5,6,7,8]는 박벽 곡선보의 곡률효과를 고려한 안정성 해석을 수행하였고, Kang과 Yoo[9,10]는 Yang과 다른 유도과정을 통하여 박벽 곡선보의 3차원 좌굴거동에 대한 이론해와 수치해를 조사 비교하였다. 또한 Kim과 Chang[11,12]은 단면회전각의 2차항을 일관성 있게 고려하여 비대칭 단면을 갖는 직선 박벽보의 안정성 및 자유진동해석을 수행하였다. 이외에도 현재까지 박벽보에 대한 여러 가지 해석이론[13-16]이 제시되어 왔지만, 박벽 곡선보의 횡좌굴거동에 대한 이론이 국제적으로 아직도 확립되어 있지 않은 상태라 사료된다. 따라서 본 연구에서는 박벽단면을 갖는 곡선보의 휨-비틂좌굴거동을 파악할 수 있는 적절한 해석이론을 개발하기 위하여 semitangential rotation으로 정의된 단면회전의 2차항을 고려하여 박벽단면을 갖는 곡선보의 횡좌굴하중에 대한 엄밀해를 유도하는 한편 유한요소법을 제시한다. 또한 본 연구에서 얻어진 엄밀해와 박벽 곡선보요소를 이용한 해석결과를 다른 연구자들의 결과와 비교 검토를 함으로써 본 연구의 타당성을 입증한다.

2. 선형화된 가상일의 원리

본 논문에서는 선형화된 가상일의 원리를 적용하기 위하여 다음과 같은 가정을 도입한다.

1. 박벽 곡선보는 선형 탄성 거동을 한다.
2. 곡선보의 단면은 뒴(warping) 변형을 제외하고 강체 거동한다.
3. 부재 축을 따라서 단면의 형상은 일정하게 유지된다.
4. 곡선보의 좌굴 전 변형(prebuckling)은 무시하고 국부좌굴(local buckling)은 발생하지 않는다. 곡선보의 전체좌표계 및 요소좌표계는 그림 1과 같이 정의된다.

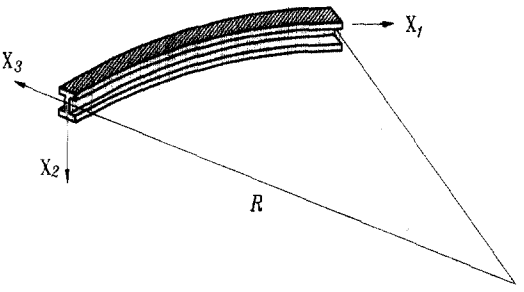


그림 1. 대칭단면을 갖는 박벽 곡선보

2.1 선형화된 가상일의 원리

회전자유도를 갖는 3차원 연속체에 대한 가상일의 원리를 나타내면 다음과 같다.

$$\int_V {}^t\tau_{ij}\,\delta\,{}^t\varepsilon_{ij}\,dV = \int_S {}^tT_i\,\delta\,{}^tU_i\,dS \qquad (1)$$

여기서 δ 는 변분을, ${}^t\tau_{ij}$와 ${}^t\varepsilon_{ij}$는 각각 second Piola-Kirchhoff stress 와 Green-Lagrange strain이며 ${}^tT_i$는 표면력을 나타내고 ${}^tU_i$는 전체변위를 나타낸다. 박벽 아치의 안정성해석을 위하여 초기응력을 받는 연속체를 생각한다. 초기변위는 없다고 가정하고 초기응력과 초기 표면력이 평형을 이루고 있다고 가정하면 응력과 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^tU_i = U_i + U_i^* \qquad (2a)$$

$${}^t\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} \qquad (2b)$$

$${}^t\tau_{ij} = {}^o\tau_{ij} + \tau_{ij} \qquad (2c)$$

$${}^tT_i = {}^oT_i + T_i \qquad (2d)$$

여기서 왼쪽 윗첨자 'o'와 't'는 각각 초기상태 및 전체상태를, 윗첨자가 없는 것은 증분치를 나타내며 U_i와 U_i^*는 각각 변위에 대한 1차 및 2차항을 나타낸다. 박벽단면을 갖는 곡선보의 안정성해석에서 회전변위에 대한 2차항은 매우 중요하므로 본 연구에서는 Green-Lagrangian strain에 회전변위의 2차항에 해당하는 U_i^*를 다음과 같이 고려한다.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\{&(U_i + U_i^*)_{,j} + (U_j + U_j^*)_{,i} \\ &+ (U_k + U_k^*)_{,i}\cdot(U_k + U_k^*)_{,j}\}\end{aligned} \qquad (3)$$

여기서 아래첨자 'comma'는 부재좌표계에 의한 편미분을 나타내며 식(3)에서 고차항을 무시하면 다음과 같이 근사시켜 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_{ij} \cong e_{ij} + \eta_{ij} + e_{ij}^* \qquad (4)$$

여기서

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \qquad (5a)$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2}U_{i,k}\cdot U_{j,k} \qquad (5b)$$

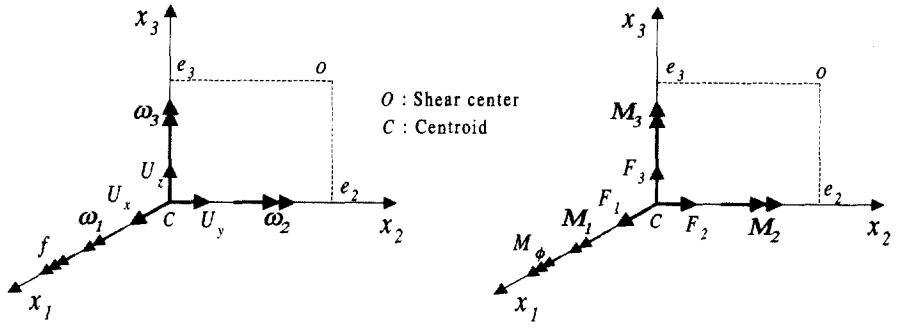
$$e_{ij}^* = \frac{1}{2}(U_{i,j}^* + U_{j,i}^*) \qquad (5c)$$

식(4)에서 e_{ij}와 η_{ij}는 각각 U_i에 대한 선형 및 비선형 변형도항을 나타내며 e_{ij}^*는 U_i^*에 대한 선형변형도항을 나타낸다. 한편, 초기응력과 표면력에 대한 평형상태는 다음과 같다.

$$\int_V {}^o\tau_{ij}\,\delta e_{ij}\,dV = \int_S {}^oT_i\,\delta U_i\,dS \qquad (6)$$

식(2)를 식(1)에 대입하고, 식(6)을 고려하며, 그리고 회전변위의 2차항을 포함시키면 다음과 같이 초기응력을 받는 연속체의 선형화된 가상일의 원리를 얻을 수 있다.

$$\int_V(\tau_{ij}\delta e_{ij} + {}^o\tau_{ij}\delta\eta_{ij} + {}^o\tau_{ij}\delta e_{ij}^*)dV = \int_S T_i\,\delta U_i\,dS \qquad (7)$$



(a) 변위 파라미터 (b) 단면력

그림 2. 부재좌표계에 대한 변위 파라미터 및 단면력

여기서 첫 번째 항은 탄성변형에너지를 나타내고 두 번째는 초기응력으로 인한 포텐셜에너지를 나타내며 세 번째 항은 단면 회전에 대한 2차항을 고려했을 때 나타나는 초기응력으로 인한 포텐셜에너지이다. 마지막 항은 요소 절점력에 대응하는 포텐셜에너지를 나타낸다.

2.2 원형아치의 변위장

그림 2는 부재좌표계(x_1, x_2, x_3)에 대하여 박벽단면을 갖는 공간뼈대요소의 변위장을 8개의 변위파라미터로 나타낸 것으로 x_1은 도심축, x_2와 x_3는 주축을 나타낸다. U_x, U_y, U_z,와 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$는 각각 x_1, x_2, x_3 축방향의 강체이동변위(rigid body translation) 및 강체회전변위(rigid body rotation)를 나타내고 g는 U_x의 변화율이며 f는 단면의 뒴변형에 의한 x_1축방향으로의 변화율이다. 전단변형효과가 무시되는 경우 변위파라미터 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\omega_1 = \theta\ ,\omega_2 = -U_z' + U_x/R\ ,\ \omega_3 = U_y'\ ,$$
$$f = -\theta' - U_y'/R\ ,\ g = U_x' + U_z/R \tag{8}$$

여기서 윗첨자 'prime'은 x_1에 대한 미분을 나타낸다.

2.3 박벽 곡선보의 변형도-변위관계

부재의 단면이 강체거동하고 축방향에 대하여 뒴변형만 발생한다고 가정하면, 부재 내 임의의 한 점이 휨과 비틂 그리고 축방향 변위가 결합하여 변형을 일으켰을 때 박벽 공간뼈대요소의 임의의 단면에 대한 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_1 = U_x - x_2 U_y' - x_3\left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right) - \left(\theta' + \frac{U_y'}{R}\right)\phi(x_2, x_3) \tag{9a}$$

$$U_2 = U_y - x_3\theta \tag{9b}$$

$$U_3 = U_z + x_2\theta \tag{9c}$$

그리고

$$U_1^* = \frac{1}{2}\left[-\theta\left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right)x_2 + \theta U_y' x_3\right] \tag{10a}$$

$$U_2^* = \frac{1}{2}\left[-(\theta^2 + U_y'^2)x_2 - \left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right)U_y' x_3\right] \tag{10b}$$

$$U_3^* = \frac{1}{2}\left[-\left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right)U_y' x_2 - \left\{\theta^2 + \left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right)^2\right\}x_3\right] \tag{10c}$$

여기서 식(9)와 (10)은 각각 변위파라미터에 대한 1차 및 2차항을 나타내고 ϕ는 도심에서 정의된 뒴함수를 나타낸다. Vlasov의 가정에 따라 면내변형도(e_{22}, e_{33}, e_{23})는 무시하고, 면내응력(τ_{22}, τ_{33}, τ_{23})은 영으로 가정하면 박벽 곡선보의 선형 변형도-변위관계는 식(11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$e_{11} = \left(U_{1,1} + \frac{U_3}{R}\right) \cdot \frac{R}{R+x_3}$$
$$= \left[U_x' + \frac{U_z}{R} - x_2\left(U_y'' - \frac{\theta}{R}\right) - x_3\left(U_z'' - \frac{U_x'}{R}\right) - \phi\left(\theta' + \frac{U_y''}{R}\right)\right] \cdot \frac{R}{R+x_3} \tag{11a}$$

$$2e_{12} = U_{2,1} \cdot \frac{R}{R+x_3} + U_{1,2}$$
$$= (U_y' - x_3\theta')\frac{R}{R+x_3} - U_y' - \left(\theta' + \frac{U_y'}{R}\right) \cdot \phi_{,2} \tag{11b}$$

$$2e_{13} = \left(U_{3,1} - \frac{U_1'}{R}\right) \cdot \frac{R}{R+x_3} + U_{1,3}$$
$$= \left[U_z' - \frac{U_x}{R} + x_2\left(\theta' + \frac{U_y'}{R}\right) + \frac{x_3}{R}\left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right) + \frac{\phi}{R}\left(\theta' + \frac{U_y'}{R}\right)\right] \cdot \frac{R}{R+x_3} - \left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right) - \left(\theta' + \frac{U_y'}{R}\right) \cdot \phi_{,3} \tag{11c}$$

그리고 외력에 의한 포텐셜에너지를 나타내기 위한 비선형 변형도-변위 관계와 단면회전각의 2차항에 대응하는 선형 변형도-변위 관계는 각각 식(12)와 식(13)으로 나타낼 수 있다.

$$\eta_{11} = \frac{1}{2}\left\{\left(U_{1,1} + \frac{U_3}{R}\right)^2 + U_{2,1}^2 + \left(U_{3,1} - \frac{U_1}{R}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{R}{R+x_3}\right)^2 \tag{12a}$$

$$\eta_{12} = \frac{1}{2}\left[U_{1,2}\left(U_{1,1} + \frac{U_3}{R}\right) + U_{2,2} \cdot U_{2,1} + U_{3,2}\left(U_{3,1} - \frac{U_1}{R}\right)\right] \cdot \frac{R}{R+x_3} \tag{12b}$$

$$\eta_{13} = \frac{1}{2}\left[U_{1,3}\left(U_{1,1} + \frac{U_3}{R}\right) + U_{2,3} \cdot U_{2,1} + U_{3,3}\left(U_{3,1} - \frac{U_1}{R}\right)\right] \cdot \frac{R}{R+x_3} \tag{12c}$$

$$e_{11}^* = \frac{1}{2}\left[-\left\{\theta\left(U_z - \frac{U_x}{R}\right)\right\}x_2 - (\theta U_y')'x_3 + 2\frac{U_3^*}{R}\right]\frac{R}{R+x_3} \tag{13a}$$

$$2e_{12}^* = \frac{1}{2}\left[-(\theta^2 + U_y'^2)x_2 - \left\{(U_z' - \frac{U_x}{R})U_y'\right\}x_3\right]\frac{R}{R+x_3} - \frac{1}{2}\theta\left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right) \tag{13b}$$

$$2e_{13}^* = \frac{1}{2}\left[-\left\{(U_z' - \frac{U_x}{R})U_y'\right\}x_2 - \left\{\theta^{2+}\left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right)^2\right\}x_3 + \theta\left(U_z' - \frac{U_x}{R}\right)\frac{x_2}{R} - \theta U_y'\frac{x_3}{R}\right]\frac{R}{R+x_3} + \frac{1}{2}\theta U_y' \tag{13c}$$

박벽단면의 면내응력은 평면응력(plane stress), 면내변형은 강체로 가정하는 경우에 그림 2(b)에서 나타낸 바와 같이 도심축에 대한 단면력을 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$F_1 = \int_A \tau_{11}\,dA,\quad F_2 = \int_A \tau_{12}\,dA,$$
$$F_3 = \int_A \tau_{13}\,dA,\quad M_2 = \int_A \tau_{11}x_3\,dA,$$
$$M_3 = -\int_A \tau_{11}x_2\,dA,\quad M_\phi = \int_A \tau_{11}\phi\,dA$$
$$M_p = \int_A \tau_{11}(x_2^2 + x_3^2)\,dA,$$
$$M_1 = \int_A (\tau_{13}x_2 - \tau_{12}x_3)\,dA \tag{14}$$

여기서 F_1은 축방향력, F_2와 F_3는 전단력을 나타낸다. M_2와 M_3는 각각 x_2와 x_3에 대한 휨모멘트이고 M_1는 비틂모멘트이다. 그리고 M_P는 Wagner효과를 나타내는 단면력이다.

2.4 대칭 박벽단면을 갖는 원형아치의 총포텐셜에너지

박벽 곡선보의 안정성해석을 수행하기 위하여, 3차원 곡선보 요소의 총포텐셜에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pi = \Pi_E + \Pi_G \tag{15}$$

여기서 Π_E 와 Π_G 는 각각 탄성 변형에너지와 초기 단면력에 의한 포텐셜에너지를 나타낸다. 따라서 총포텐셜에너지 Π는 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\Pi_E = \frac{1}{2}\int_L\int_A [\tau_{11}e_{11} + 2\tau_{12}e_{12} + 2\tau_{13}e_{13}]dAdx_1 \tag{16a}$$

$$\Pi_G = \int_L\int_A [{}^o\tau_{11}(\eta_{11} + e^*_{11}) + 2{}^o\tau_{12}(\eta_{12} + e^*_{12}) + 2{}^o\tau_{13}(\eta_{13} + e^*_{13})]dAdx_1 \tag{16b}$$

먼저 식(9)를 탄성변형에너지(16a)에 대입하고 단면에 대하여 적분을 행하면 아래의 결과식을 얻는다.

$$\Pi_E = \frac{1}{2}\int_0^L \Big[EA(1+Z)\Big(U_x' + \frac{U_z}{R}\Big)^2 + EI_3\Big(U_y'' - \frac{\theta}{R}\Big)^2 + EZAR^2\Big(U_z'' - \frac{U_x'}{R}\Big)^2 + EI_\phi\Big(\theta'' + \frac{U_y''}{R}\Big)^2 + 2EZAR\Big(U_x' + \frac{U_z}{R}\Big)\Big(U_z'' - \frac{U_x'}{R}\Big) + GJ\Big(\theta' + \frac{U_y'}{R}\Big)^2\Big]dx_1 \tag{17}$$

여기서 A, I_2, J 그리고 Z는 각각 단면적, x_2 축에 대한 단면 2차모멘트, 비틂상수 그리고 곡률을 갖는 곡선보의 단면상수로써 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$Z \cong \frac{I_2}{AR^2},$$

$$\int_A \frac{R}{R+x_3}dA = A(1+Z) \cong A + \frac{I_2}{R^2} \tag{18}$$

$$\int_A \frac{Rx_3}{R+x_3}dA = -ZAR \cong -\frac{I_2}{R},$$

$$\int_A \frac{Rx_3^2}{R+x_3}dA = AZR^2 \cong I_2$$

$$J = \int_A \Big[\Big\{x_3 + \phi_{,2}\Big(1+\frac{x_3}{R}\Big)\Big\}^2 + \Big\{x_2 + \frac{\phi}{R} - \phi_{,3}\Big(1+\frac{x_3}{R}\Big)\Big\}^2\Big]\frac{R}{R+x_3}dA \tag{19}$$

한편, 초기응력과 표면력에 의한 포텐셜에너지 Π_G 는 다음과 같다.

$$\Pi_G = \Pi_{G1} + \Pi_{G2} \tag{20}$$

여기서

$$\Pi_{G1} = \int_L\int_A [{}^o\tau_{11}\eta_{11} + 2{}^o\tau_{12}\eta_{12} + 2{}^o\tau_{13}\eta_{13}]dAdx_1 \tag{21a}$$

$$\Pi_{G2} = \int_L\int_A [{}^o\tau_{11}e^*_{11} + 2{}^o\tau_{12}e^*_{12} + 2{}^o\tau_{13}e^*_{13}]dAdx_1 \tag{21b}$$

식(20)에서 첫 번째 항 Π_{G1} 는 초기응력에

의한 포텐셜에너지이고 두 번째 항 Π_{G2} 는 유한한 회전각의 2차항을 고려하는 경우에 대하여 발생하는 포텐셜에너지이다. 변형도-변위관계를 나타내는 식(11)과 (12)를 식(21a)와 (21b)에 대입하고 식(13)을 고려하여 단면에 대하여 적분하면 Π_{G1}와 Π_{G2}는 다음과 같이 유도된다.

$$\Pi_{G1}=\frac{1}{2}\int_L F_1\left\{U_y'^2+\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)^2\right\}+M_2\left\{-2U_y'\theta'-\frac{1}{R}U_y'^2+\frac{1}{R}\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)^2\right\}-2\left(M_3-\frac{M_\phi}{R}\right)\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right)+\int_A\tau_{11}(x_2^2+x_3^2)\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right)^2 dA\,dx_1 \quad (22)$$

그리고

$$\Pi_{G2}=\frac{1}{2}\int_L M_3\left[\left\{\theta\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)\right\}'+\frac{1}{R}U_y'\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)\right]+M_2\left[(\theta U_y')'-\frac{1}{R}\{\theta^2+(U_z'-\frac{U_x}{R})^2\}\right]-\int_A\tau_{12}x_2\{(\theta^2+U_y'^2)\}'dA-\int_A\tau_{12}x_3\left[\left\{U_y'\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)\right\}'+\frac{\theta}{R}\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)\right]dA-F_2\left\{\theta\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)\right\}-\int_A\tau_{13}x_2\left[\left\{U_y'\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)\right\}'+\frac{\theta}{R}(U_z'-\frac{U_x}{R})\right]dA-\int_A\tau_{13}x_3\left[\left\{\theta^2+\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)^2\right\}'\right]dA+F_3\{\theta U_y'\}\,dx_1 \quad (23)$$

여기서 비신장 조건(inextensibility condition)을 적용하고 U_x와 연계되는 항들은 무시하였다. 결국, 식(22)와 (23)을 합하여 외력에 의한 포텐셜에너지 Π_G 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pi_G=\underline{\frac{1}{2}\int_L F_1\left[U_y'^2+\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)^2\right]dx_1}+\frac{1}{2}\int_L M_p\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right)^2 dx_1+\underline{\frac{1}{2}\int_L M_2\left[\theta U_y''-U_y'\theta'-\frac{1}{R}U_y'^2-\frac{1}{R}\theta^2\right]dx_1}+\frac{1}{2}\int_L M_3\left[\theta\left(U_z''-\frac{U_x'}{R}\right)-\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right)\right]dx_1+\int_L M_\phi\left[\frac{1}{R}\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right)\right]dx_1+\frac{1}{2}\int_L\left\{F_2\left[\theta\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)\right]-F_3[\theta U_y']\right\}dx_1+\frac{1}{2}\int_L M_1\left[\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)\left(U_y''-\frac{\theta}{R}\right)-U_y'\left(U_z''-\frac{U_x'}{R}\right)\right]dx_1 \quad (24)$$

식(24)에서 밑줄친 항은 면외 좌굴과 관련된 외력의 포텐셜에너지를 나타낸다. 이 항들과 관련하여 소위 곡률효과를 고려하여 Yang[6]에 의해 유도된 포텐셜 에너지는 다음과 같이 표시된다.

$$\Pi_G=\frac{1}{2}\int_L F_1\left[U_y'^2+\left(U_z'-\frac{U_x}{R}\right)^2\right]dx_1+\frac{1}{2}\int_L M_p\left(\theta'+\frac{U_y'}{R}\right)^2 dx_1-\frac{1}{2}\int_L M_2\left[\frac{1}{R}\theta^2+2U_y'\theta'+\frac{1}{R}U_y'^2\right]dx_1 \quad (25)$$

식(25)에서 보는바와 같이 면외 좌굴에 대한 포텐셜에너지는 곡률효과를 고려하여 얻어진 Yang의 결과식과 semitangential rotation의 2차항을 일관성있게 고려함으로써 얻어진 본 연구의 포텐셜에너지가 거의 일치하고 있음을 알 수 있다. 그러나 본 연구의 휨모멘트 및 비틂모멘트에 대한 포텐셜에너지는 semitangential moment에 대응하는 가장 일반적인 형태의 포텐셜에너지로 유도되었음을 확인할 수 있다.

3. 대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 면외좌굴에 대한 엄밀해

단순지지되고 대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 면외 좌굴에 대한 엄밀해를 유도하기 위하여, 식(17), (24)로부터 면외거동과 관련된 항만을 재정리하면 포텐셜에너지는 다음과 같다.

$$\Pi_E+\Pi_G=\frac{1}{2}\int_o^L\Big[EI_3\Big(U_y''-\frac{\theta}{R}\Big)^2+GJ(\theta'+\frac{U_y'}{R}\Big)^2+EI_\phi\Big(\theta''+\frac{U_y''}{R}\Big)^2+F_1U_y'^2+M_p\Big(\theta'+\frac{U_y'}{R}\Big)^2+M_2\Big(U_y''\theta-U_y'\theta'-\frac{U_y'^2}{R}-\frac{\theta^2}{R}\Big)\Big]dx_1 \tag{26}$$

후크의 법칙을 고려하여 식(14)에 식(11)을 대입하면 면내력의 힘-변위 관계식은 다음과 같이 얻는다.

$$F_1=EA(1+Z)\Big(U_x'+\frac{U_z}{R}\Big)+EZAR\Big(U_z''-\frac{U_x'}{R}\Big)\cong EA\Big(U_x'+\frac{U_z}{R}\Big)+\frac{EI_2}{R}\Big(U_z''+\frac{U_z}{R}\Big) \tag{27a}$$

$$M_2=-EZAR^2\Big(U_z''-\frac{U_x'}{R}\Big)\cong -EI_2\Big(U_z''+\frac{U_z}{R}\Big) \tag{27b}$$

$$M_p=E(I_2+I_3)(U_x'+\frac{U_z}{R})\cong\frac{I_2+I_3}{A}\Big(F_1+\frac{M_2}{R}\Big)=\beta_1\Big(F_1+\frac{M_2}{R}\Big) \tag{27c}$$

여기서 $\beta_1=\dfrac{I_2+I_3}{A}$

양단이 단순지지된 대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 면외좌굴해석을 수행하기 위하여 면외거동에 대한 횡변위 U_y와 비틂 변위 θ에 대한 변위함수를 식(28)과 같이 가정할 수 있다.

$$U_y=B\sin(\lambda x_1),\quad \theta=D\sin(\lambda x_1) \tag{28}$$

여기서 $\lambda=\dfrac{n\pi}{L}$

윗 식에서 B와 D는 미지계수(amplitude)이고 n은 좌굴모드의 마디를 나타낸다. 정의된 처짐함수를 식(26)에 대입하여 적분을 행하면 다음과 같은 에너지식을 얻을 수 있다.

$$\frac{4}{L}\ \Pi(B,D)=B^2\Big[EI_3\lambda^4+GJ\frac{\lambda^2}{R^2}+EI_\phi\frac{\lambda^4}{R^2}+F_1\lambda^2+M_p\frac{\lambda^2}{R^2}-M_2\frac{\lambda^2}{R}\Big]+2BD\Big[EI_3\frac{\lambda^2}{R}+GJ\frac{\lambda^2}{R}+EI_\phi\frac{\lambda^4}{R}+M_p\frac{\lambda^2}{R}-M_2\lambda^2\Big]+D^2\Big[EI_3\frac{1}{R^2}+GJ\lambda^2+EI_\phi\lambda^4+M_p\lambda^2-M_2\frac{1}{R}\Big] \tag{29}$$

그림 4(a)에서와 같이 단순지지되고 순수 휨을 받는 곡선보의 좌굴하중을 구하기 위하여, 식(29)에서 미지 계수 B와 D에 대하여 변분을 취하면 다음과 같이 행렬방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix}K_{11}&K_{12}\\K_{21}&K_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}B\\D\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \tag{30}$$

여기서

$$K_{11}=EI_3\lambda^4+GJ\frac{\lambda^2}{R^2}+EI_\phi\frac{\lambda^4}{R^2}+M_2\frac{\lambda^2}{R}\Big(\frac{\beta_1}{R^2}-1\Big) \tag{31a}$$

$$K_{12}=K_{21}=EI_3\frac{\lambda^2}{R}+GJ\frac{\lambda^2}{R}+EI_\phi\frac{\lambda^4}{R}+M_2\lambda^2\Big(\frac{\beta_1}{R^2}-1\Big) \tag{31b}$$

$$K_{22}=EI_3\frac{1}{R^2}+GJ\lambda^2+EI_\phi\lambda^4+M_2(\beta_1\lambda^2-1)\frac{1}{R} \tag{31c}$$

식(30)에 대하여 행렬식을 영이라 놓으면 대칭단면을 갖는 곡선보의 좌굴하중 M_2를 2차 방정식 형태로 나타낼 수 있다.

$$A_1M_{2cr}^2+A_2M_{2cr}+A_3=0 \tag{32}$$

$$A_1=-\left(1-\frac{\beta}{R^2}\right) \tag{33a}$$

$$A_2=\frac{EI_3}{R}(1+\beta\gamma)+GJ\frac{1}{R}+EI_\phi\frac{\lambda^2}{R} \tag{33b}$$

$$A_3=\gamma[EI_3(GJ+EI_\phi\lambda^2)] \tag{33c}$$

여기서 $\gamma=\lambda^2-\frac{1}{R^2}$

한편, 그림 4(b)에서와 같이 단순지지되고 균일압축을 받는 박벽 곡선보의 면외 좌굴하중을 유도하기 위하여 식(29)에서 면외 변위 U_y와 비틂변위 θ그리고 축방향 압축력 F_1에 대하여 정리하면 식(30)과 같이 나타낼 수 있고 이때 행렬성분은 다음과 같다.

$$K_{11}=EI_3\lambda^4+GJ\frac{\lambda^2}{R^2}+EI_\phi\frac{\lambda^4}{R^2}+F_1\left(\lambda^2+\beta_1\frac{\lambda^2}{R^2}\right) \tag{34a}$$

$$K_{12}=K_{21}=EI_3\frac{\lambda^2}{R}+GJ\frac{\lambda^2}{R}+EI_\phi\frac{\lambda^4}{R}+F_1\left(\beta_1\frac{\lambda^2}{R}\right) \tag{34b}$$

$$K_{22}=EI_3\frac{1}{R^2}+GJ\lambda^2+EI_\phi\lambda^4+F_1(\beta_1\lambda^2) \tag{34c}$$

식(34)를 성분으로 하는 행렬에 대하여 행렬식이 영이라 놓으면 균일압축하에서 단순지지되고 대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 좌굴하중을 아래의 2차 방정식으로 얻을 수 있다.

$$B_1F_{1cr}^2+B_2F_{1cr}+B_3=0 \tag{35}$$

$$B_1=\beta_1\lambda^2 \tag{36a}$$

$$B_2=EI_3\left(\beta_1\gamma^2+\frac{1}{R^2}\right)+GJ\lambda^2+EI_\phi\lambda^4 \tag{36b}$$

$$B_3=\gamma^2[EI_3(GJ+EI_\phi\lambda^2)] \tag{36c}$$

4. 유한요소 정식화

박벽단면을 갖는 원형아치의 안정성해석을 수행하기 위하여 곡선보 요소를 이용한 유한요소법를 개발하고 직선보 요소에 의한 해석결과와 비교하여 제시한다.

4.1 곡선보요소를 이용한 유한요소 해석

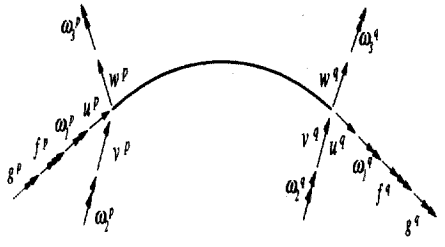


그림 3. 곡선보 요소의 변위 벡터

그림 3은 구속된 비틂에 의한 뒴을 고려한 박벽 곡선보요소의 재단변위벡터를 절점 p와 q에 대하여 표시한 것이다. 일반화된 좌표들(U_x, U_y, U_z , θ)을 재단변위벡터로 나타내기 위해서는 요소의 거동을 적절히 나타낼 수 있는 형상함수들을 선택하여야 한다. 본 연구에서는 그림 3을 참조하여 박벽 곡선보요소의 변위장을 3차의 Hermitian 다항식으로 가정한다.

$$U_x = h_1 \cdot u^p + h_2 \cdot Lg^p + h_3 \cdot u^q + h_4 \cdot Lg^q \tag{37a}$$

$$U_y = h_1 \cdot v^p + h_2 \cdot L\omega_3^p + h_3 \cdot v^q + h_4 \cdot L\omega_3^q \tag{37b}$$

$$U_z = h_1 \cdot w^p - h_2 \cdot L\omega_2^p + h_3 \cdot w^q - h_4 \cdot L\omega_2^q \tag{37c}$$

$$\theta = h_1 \cdot \omega_1^p - h_2 \cdot Lf^p + h_3 \cdot \omega_1^q - h_4 \cdot Lf^q \tag{37d}$$

여기서

$$u^p = U_x(0),\quad v^p = U_y(0),\quad w^p = U_z(0),$$
$$\omega_1^p = \theta(0),\quad \omega_2^p = -U_z'(0),\quad \omega_3^p = U_y'(0)$$
$$f^p = -\theta'(0)\quad ,\quad g^p = U_x'(0) \tag{38}$$

여기서 h_i는 3차의 Hermitian 다항식으로 구체적인 식은 다음과 같다.

$$h_1 = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1,\quad h_2 = (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)L$$
$$h_3 = -2\xi^3 + 3\xi^2,\quad h_4 = (\xi^3 - \xi^2)L,$$
$$\xi = x/L \tag{39}$$

식(37)에서 절점변위성분은 곡률효과를 고려하여 다음과 같이 정의한다.

$$\widehat{\omega_2^p} = -U_z'(0) + \frac{U_x(0)}{R} = \omega_2^p + \frac{u^p}{R} \tag{40a}$$

$$\widehat{f^p} = -\theta'(0) - \frac{U_y'(0)}{R} = f^p + \frac{\omega_3^p}{R} \tag{40b}$$

$$\widehat{g^p} = U_x'(0) + \frac{U_z(0)}{R} = g^p + \frac{w^p}{R} \tag{40c}$$

현재까지 전개한 이론을 토대로 식(37)을 식(17)과 식(24)에 대입하고 적분을 행하면 다음과 같이 박벽 곡선보에 대한 행렬평형방정식을 얻을 수 있다.

$$(K_E + K_G)\,U_e = F_e \tag{41}$$

여기서

$$U_e = \langle U^p, V^p, W^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, f^p, g^p, U^q, V^q, W^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q, f^q, g^q \rangle \tag{42a}$$

$$F_e = \langle F_1^p, F_2^p, F_3^p, M_1^p, M_2^p, M_3^p, M_\phi^p, F_m^p, F_1^q, F_2^q, F_3^q, M_1^q, M_2^q, M_3^q, M_\phi^q, F_m^q \rangle \tag{42b}$$

위 식에서 K_E와 K_G는 각각 부재좌표계에 대한 16×16 탄성 및 기하학적 강도행렬을 나타내며, U_e와 F_e는 각각 구속된 비틂을 고려한 절점변위벡터와 부재력벡터를 의미한다. 결과적으로 직접강도법에 의하여 전체 구조물에 대한 평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[K_E^o + \bar{\lambda} K_G^o]\,U = 0 \tag{43}$$

여기서 $\bar{\lambda}$는 하중파라미터이고 윗첨자 'o'는 전체강도행렬을 나타내며 이 식으로부터 원형아치의 좌굴하중을 산정할 수 있다.

4.2 직선 보요소를 이용한 유한요소 해석

곡선보에서의 경우와 마찬가지로 선형화된 가상일의 원리를 적용하면, 구속된 뒴효과를 고려한 박벽 직선보에 대한 포텐셜에너지 Π_E 와 Π_G 는 각각 식(44) 및 식(45)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pi_E = \frac{1}{2}\int_o^L [EA\,U_x'^2 + EI_3\,U_y''^2 + EI_2\,U_z''^2 + GJ\theta'^2 + EI_\phi\,\theta''^2 \tag{44}$$

$$\Pi_G = \frac{1}{2}\int_o^L [F_1(U_y'^2 + U_z'^2) + M_p\theta'^2 + M_1(U_z'U_y'' - U_z''U_y')$$

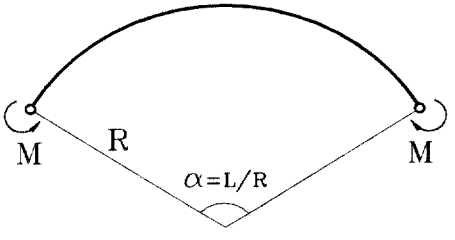
$$+M_2(U_y''\theta - U_y'\theta') + M_3(U_z''\theta - U_z'\theta') + F_2U_z'\theta + F_3U_y'\theta]\,dx_1 \quad (45)$$

위 식의 Π_E 와 Π_G 는 곡률이 영일 때 곡선보의 포텐셜에너지(식(17),(24) 참조)와 같다. 직선보 요소는 이전의 연구[11,12]에서와 같이 절점당 7개의 자유도를 정의하고, 적절한 경계조건을 적용하면 원형 아치의 근사적인 좌굴하중을 산정할 수 있다.

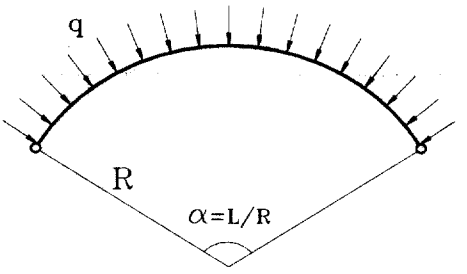
5. 해석예제

박벽 단면을 갖는 원형 곡선보의 면외좌굴해석을 수행하기 위하여, 구속된 뒴 효과와 semi-tangential rotation의 2차항을 고려함으로써 박벽 곡선보의 포텐셜에너지를 일관성있게 유도하였다. 유한요소 정식화 과정에서 3차 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하고 5점 가우스적분을 행함으로써 탄성 및 기하학적 강도행렬을 산정하였다. 좌굴해석문제는 IMSL[17]의 subroutine을 이용하여 해결하였다. 또한, 균일한 휨과 균일 압축을 받는 경우에 단순지지되고 대칭단면을 갖는 박벽 곡선보의 횡좌굴하중에 대한 엄밀해를 유도하였다.

본 연구에서 제시한 이론 및 개발된 유한요소를 검증하기 위하여, 곡률변화에 따른 원형 아치의 좌굴하중에 대한 해석결과를 제시하고 문헌의 결과와 비교, 검토를 행한다.



(a) 순수휨을 받는 원형아치



(b) 균일압축을 받는 원형아치

그림 4. 단순지지된 원형아치

그림 4는 순수 휨 또는 균일압축을 받는 단순지지된 박벽 원형아치를 보여주고 있다. 본 예제에는 아래와 같은 대칭단면의 물성치 및 단면상수를 사용하였으며 곡률변화에 따른 해석을 수행하였다.

$$L=4500cm,\ A=14.4cm^2,\ J=1.414cm^4,$$

$$I_2=93cm^4,\ I_3=273cm^4,\ I_\phi=2,070cm^6,$$

$$E=284,200\,kg/cm^2,\ G=109,760kg/cm^2$$

아치에 대한 호의 길이는 일정하게 유지하고 각도만을 변화시키며 순수 휨을 받는 경우와 균일압축을 받는 경우에 대하여 면외 좌굴해석을 수행하였다. 순수 휨을 받는 경우는 정모멘트를 받는 경우와 부모멘트를 받는 경우에 대하여 각각 좌굴하중을 산정하여 표 1에 정리하였다. 엄밀해는 식(32)을 이용하여 계산하였고 곡선보 요소를 이용한 유한요소해석에서는 20개의 요소를 이용하여 해석하였으며 직선보 요소를 이용할 경우에는 기하학적인 대칭성을 고려하여 아치의 반만을 50개의 요소로 나누어 모델링하였다. 아치의 반만을 모델링하는 경우 좌굴형상에 대한 대칭모드와 비대칭모드를 구분하여 경계조건을 설정하여야 한다. 직선보 요소를 이용한 해석은 곡선형상을 여러 개의 직선요소로 분할하여 해석함으로써 엄밀한 곡선보를 이용한 해석결과와 다소의 차이를 나타냈지만 박벽단면을 갖는 다양한 형상의 구조물

Table 1. 순수휨을 받으며 이축대칭 박벽단면을 갖는 원형아치의 횡좌굴 하중

mode	angle (degree)	This study			Vlasov	Papangelis	Yang	Rajasekaran
		Analytic solution	FEM (beam element)					
			curved	straight				
Symm.	0°	-2424.8 2424.8	-2424.8 2424.8	-2424.8 2424.8	-2424.8 2424.8	-2424.8 2424.8	-2424.8 2424.8	-2424.8 2424.8
	30°	-593.06 9638.9	-593.07 9638.8	-593.40 9638.8	-593.06 9638.8	-576.53 9639.8	-593.06 9638.8	-593.06 9638.8
	60°	-284.42 18376.	-284.43 18376.	-285.13 18376.	-284.42 18376.	-252.81 18376.	-284.42 18376.	-284.42 18376.
	90°	-161.54 27299.	-161.57 27299.	-162.64 27299.	-161.54 27299.	-121.15 27299.	-161.54 27299.	-161.54 27299.
	180°	0 54275.	0 54274.	-13.426 54281.	0 54274.	0 54274.	0 54275.	0 54274.
	270°	90.380 81322.	90.435 81321.	87.273 81344.	90.378 81321.	-112.97 81321.	90.380 81322.	90.378 81321.
	360°	162.75 108387.	162.78 108386.	158.54 108439.	162.74 108386.	-488.23 10835.	162.75 108388.	162.74 108386.
Antisymm.	0°	-4863.0 4863.0	-4863.1 4863.1	-4863.0 4863.0	-4863.0 4863.0	-4863.0 4863.0	-4863.0 4863.0	-4863.0 4863.0
	30°	-2105.9 11152.	-2106.0 11152.	-2106.2 11152.	-2105.9 11152.	-2090.8 11155.	-2105.9 11152.	-2105.9 11152.
	60°	-1192.2 19285.	-1192.5 19284.	-1193.1 19284.	-1192.3 19284.	-1159.0 19286.	-1192.3 19284.	-1192.3 19284.
	90°	-793.74 27932.	-794.15 27932.	-794.85 27932.	-793.77 27931.	-744.12 27933.	-793.76 27932.	-793.77 27931.
	180°	-324.84 54602.	-325.82 54601.	-327.05 54606.	-324.85 54600.	-243.64 54600.	-324.85 54601.	-324.85 54600.
	270°	-126.89 81543.	-129.38 81541.	-130.20 81562.	-126.89 81539.	-55.514 81539.	-126.89 81541.	-126.89 81539.
	360°	0 108555.	0 108552.	-6.6624 108603.	0 108550.	0 108550.	0 108553.	0 108550.

에 대하여 일관성 있는 해석 결과를 얻을 수 있었다. 한편, 곡선보 요소는 극 좌표계를 사용하기 때문에 경계조건의 설정이 용이하고 정확한 곡률효과가 고려되므로 작은 수의 요소를 이용하더라도 충분한 정확도를 갖는 해석결과를 얻을 수 있다. 원형아치에 대한 면외 좌굴해석을 수행한 결과, 표 1에 나타낸 바와 같이 본 연구에서 제시한 엄밀해 및 곡선보 요소에 의한 해석 결과가 다른 연구자의 엄밀해 및 직선보 요소를 이용한 해석 결과와 서로 잘 일치하였으나 Papangelis에 의한 엄밀해는 각도가 증가함에 따라 큰 오차를 보여주었다.

그림 4(b)에서와 같이 균일압축을 받는 경우, 박벽단면을 갖는 원형아치의 횡좌굴하중에 대한 해석결과를 표 2에 제시하였다. 엄밀해는 식(36)을 이용하여 계산하였고 곡선보 요소를 이용한 유한요소해석에서는 20개의 요소를 이용하였으며 직선보 요소를 이용할 경우에는 기하학적인 대칭성을 고려하여 아치의 반만을 50개의 요소를 사용하였다. 대칭모드와 비대칭모드에 대하여 좌굴하중을 산정하고 다른 연구자들의 엄밀해 및 직선보 요소에 의한 해석결과를 비교한 결과 서로 잘 일치하였다.

Table 2. 균일압축을 받으며 이축대칭 박벽단면을 갖는 원형아치의 횡좌굴 하중

mode	angle (degree)	This study			Yang	Papangelis	Rajasekaran
		Analytic solution	FEM (beam element)				
			curved	straight			
Symm.	0°	37.815	37.815	37.815	37.815	37.815	37.815
	30°	2.4043	2.4043	2.4069	2.4043	2.4052	2.4043
	60°	0.52931	0.52934	0.53192	0.52931	0.52935	0.52929
	90°	0.16915	0.16918	0.17141	0.16915	0.16915	0.16915
	180°	0	0.000031	0.000049	0	0	0
	270°	0.052580	0.052609	0.048944	0.052580	0.052580	0.052580
	360°	0.17042	0.17045	0.16175	0.17042	0.17043	0.17043
Antisymm.	0°	151.26	151.26	151.26	151.26	151.26	151.26
	30°	33.409	33.410	33.411	33.409	33.549	33.405
	60°	9.6565	9.6583	9.6647	9.6565	9.6704	9.6554
	90°	4.1499	4.15179	4.1598	4.1499	4.1525	4.1494
	180°	0.68028	0.68229	0.68928	0.68028	0.68033	0.68020
	270°	0.10335	0.10537	0.10874	0.10335	0.10335	0.10334
	360°	0	0.002022	0.000168	0	0	0

6. 결 론

본 연구에서는 박벽단면을 갖는 원형아치의 안정성해석을 수행하기 위하여, 3차원 연속체에 대한 평형방정식으로부터 선형화된 가상일의 원리를 적용하였다. 박벽단면의 구속된 비틂(restrained warping)효과를 고려하고 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 곡선보의 변위장을 도입하고 이를 평형방정식에 대입하여 단면에 대해 적분함으로써 박벽 곡선보의 총포텐셜에너지를 유도하였다. 단순지지 경계조건을 갖는 박벽 곡선보에 대해서는 처짐함수를 가정하여 면외좌굴에 대한 엄밀해를 유도하였고, 다양한 경계조건 및 하중조건에 대한 해를 얻기 위하여 박벽 곡선보요소를 이용한 유한요소해석법을 제시하였다. 유한요소 해석에서는 곡선보를 유한요소로 분할하고 요소의 변위장을 도심에 대하여 정의한 후 요소 변위벡터에 관한 3차의 Hermitian 다항식을 적용하여 에너지식에 대입함으로써 탄성강도행렬과 기하학적 강도행렬을 산정하였다. 결국, 얻어진 강도행렬로부터 고유치 해석을 수행하여 면외좌굴에 대한 좌굴하중을 산정하였고, 본 연구에서 얻어진 엄밀해와 함께 다른 연구자들의 결과 및 직선 박벽보 요소를 이용한 해석결과를 비교 검토함으로써, 다음과 같은 결론에 도달하였다.

1. 구속된 비틂(restrained warping)효과와 semitangential rotation의 2차항을 고려한 곡선보의 변위장을 도입한 결과, semitangential moment에 대응하는 총포텐셜에너지를 일관성있게 유도할 수 있었다.

2. 단순지지되고 대칭단면을 갖는 박벽 원형아치에 대한 면외좌굴 해석을 수행한 결과, 본 연구의 엄밀해와 Vlasov, Papangelis, Yang 그리고 Rajasekaran의 해석결과와 서로 잘 일치하였다.

3. 특히 본 연구의 엄밀해는 Yang[6]에 의해 얻은 해와 거의 일치하였는데, 이는 균일한 휨과 압축을 받는 경우에 대응하는 포텐셜에너지 항들이 거의 동일하기 때문이다. 그러나 Yang은 곡률효과로부터 에너지식을 유도한 반면에, 본 연구는 semitangential rotation 정의에 근거한 일관성있는 유도과정으로 얻었기 때문에 전체 포텐셜에너지식은 상당한 차이를 나타내었다.

4. 직선보 요소는 곡선형상을 여러 개의 직선 요소로 분할하여 해석함으로써 엄밀한 곡선보에 의한 해석결과와 다소의 차이가 있었으나 박벽단면을 갖는 다양한 형상의 구조물에 대하여 일관적으로 해에 접근하는 정확성을 보였다.

5. 곡선보 요소에 의한 원형아치의 면외좌굴에 대한 해석결과가 엄밀해와 일치하였으며 임의의 경계조건 및 하중조건에 대하여 해석이 가능하기 때문에 곡선보가 이용되는 제반 구조물의 해석에 유용하게 쓰여질 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 말

본 연구는 1997년도 성균관대학교 63학술연구비에 의하여 연구되었기에 이에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

(1) Timoshenko, S.P., and Gere, J.M.(1961). Theory of elastic stability. 2nd Ed., McGraw-Hill, New York, N.Y.

(2) Vlasov, V.Z.(1991). Thin-walled elastic beams. 2nd Ed., National Science Foundation, Washington, D.C.

(3) Papangelis, T.P., and Trahair, N.S. (1987a). "Flexural-torsional buckling of arches." J. Engrg., ASCE, 113(4), 889-906.

(4) Papangelis, T.P., and Trahair, N.S. (1987b). "Flexural-torsional buckling test on arches." J. Engrg. ASCE, 113(7), 1433-1443.

(5) Yang, Y.B. and Kuo, S.R.,(1986). "Static stalility of curved thin-walled beams." J. Engrg. Mech., ASCE, 112(8), 821-841.

(6) "Effect of curvature on stability of curved beams." J. Struct. Engrg., ASCE, 113(6), 1185-1202.

(7) Yang, Y.B. and Kuo, S.R., and Cherng, Y.D.(1989). "Curved beam element for nonlinear analysis." J. Engrg. Mech., ASCE, 115(4), 840-855.

(8) Kau, S.R., and Yang, Y.B.(1991). "New theory on buckling of curved beams." J. Engrg. Mech. ASCE, 117(8), 1698-1717.

(9) Kang, Y.J., and Yoo, C.H.(1994). "Thin-walled curved beams. I : Formulation of nonlinear equations." J. Engrg. Mech., ASCE, 120(10) 2072-2101.

(10) Kang, Y.J., and Yoo, C.H.(1994). "Thin-walled curved beams. II : Analytical solution for buckling of arches." J. Engrg. Mech., ASCE, 120(10) 2102-2125.

(11) Chang,S.P., and Kim,M.Y., and Kim, S.B.(1996). "Stability of Shear Deformable Thin-Walled Space Frames and Circular Arches." ASCE Journal of Eng. Mechanics,122,pp844~854.

(12) Kim,M.Y., and Chang,S.P., and Kim, S.B.(1996). "Spatial Stability Analysis of Thin-walled Space Frames." Int.J. Numer.Methods Engineering, 39,pp 499~525.

(13) Attard, M.M.(1986). "Nonlinear theory of nonunifrom torsion of thin-walled open beams." Thin-Walled Struct., 4(2),101-134.

(14) Attard, M.M.(1987). "Discussion of 'Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis.'by Y.B. Yang and W. McGuire." J. Struc. Engrg., ASCE, 113(7), 1632-1634.

(15) Elias, Z.M.(1986). Theory and methods of structural analysis. John Wiley and Sons, New York, N.Y.

(16) Goto, F., Kuranish, S., and Sugahara, K.(1992)."On the experiment of out-of-plane buckling of arches." Proc. 47th Annual Conf., Japanese Society of Civil Engineers, Sept., 200-201.

(17) IMSL Library, Problem-solving software system for mathematical and statistical FORTRAN programming, IMSL, Inc., 1984

(접수일자 : 1998년 5월 22일)

부록. 원형아치의 면외 좌굴에 대한 엄밀해

순수 휨과 균일압축을 받는 박벽 원형 아치의 면외좌굴에 대하여 다른 연구자들에 의해 유도된 결과를 표 7에 정리하였다.

여기서, $\lambda = \frac{n\pi}{L}$, $\gamma = \lambda^2 - \frac{1}{R^2}$,

$r_o^2 = (I_2 + I_3)/A$

- $A_1 M_{2cr}^2 + A_2 M_{2cr} + A_3 = 0$,

  $B_1 F_{1cr}^2 + B_2 F_{1cr} + B_3 = 0$

Study	Coefficients
Timoshenko (1961)	$A_1 = 1$, $A_2 = -(EI_3 + GJ)/R$, $A_3 = -EI_3 GJ\gamma$ $B_1 = 0$, $B_2 = \lambda^2 GJ + EI_3/R^2$, $B_3 = -EI_3 GJ\lambda^2\gamma$
Vlasov (1961)	$A_1 = 1$, $A_2 = -EI_3/R - (\lambda^2 EI_\phi^s + GJ)/R + \beta_3\lambda^2 EI_3$, $A_3 = -EI_3(\lambda^2 EI_\phi^s + GJ)\gamma$ $B_1 = 1$, $B_2 = -\lambda^2 EI_3 - (\lambda^2 EI_\phi^s + GJ)/R^2$, $B_3 = EI_3(\lambda^2 EI_\phi^s + GJ)\gamma/R^2$
Papangelis and Trahair (1987)	$A_1 = -1$, $A_2 = [\lambda^2 EI_3 + (\lambda^2 EI_\phi^s + GJ)/R^2][\beta_3 + 1/(R\lambda^2)] - 2(EI_3 + \lambda^2 EI_\phi^s + GJ)/R$, $A_3 = \frac{EI_3}{R^2}(\frac{1}{R\lambda} - R\lambda)^2[\lambda^2 EI_\phi^s + GJ]$ $B_1 = 0$, $B_2 = \lambda^2(\lambda^2 EI_\phi^s + GJ) + EI_3/R^2$, $B_3 = -EI_3(\lambda^2 EI_\phi^s + GJ)\gamma^2$
Yang and Kuo (1987)	$A_1 = -1 + r_o^2/R^2$, $A_2 = [EI_3 + GJ - \gamma EI_\phi^s + r_o^2(EI_\phi^s/R^2 + EI_3)\gamma]/R$, $A_3 = \gamma[EI_3(\lambda^2 EI_\phi^s + GJ) + GJEI_\phi^s/R^2]$ $B_1 = r_o^2\lambda^2$, $B_2 = EI_\phi^s\gamma^2 + EI_3/R^2 + GJ\lambda^2 + (r_o\lambda\gamma)^2(EI_\phi^s/R^2 + EI_3)$, $B_3 = \gamma^2[EI_3(\lambda^2 EI_\phi^s + GJ) + EI_\phi^s GJ/R^2]$
Rajasekaran and Padmanabhan (1989)	$A_1 = \frac{1}{(R\lambda)^2} - 1$, $A_2 = [\frac{1}{(R\lambda)^2} - 1](EI_3 + \lambda^2 EI_\phi^s + GJ)/R$, $A_3 = EI_3(\frac{1}{R\lambda} - R\lambda)^2(\lambda^2 EI_\phi^s + GJ)/R^2$ $B_1 = 1$, $B_2 = \lambda^2 EI_3(1 + \frac{1}{R^2\lambda^4 r_o^2}) + \frac{1}{r_o^2}(GJ + \lambda^2 EI_\phi^s)[1 + (\frac{r_o}{R})^2]$, $B_3 = (\frac{\lambda}{r_o})^2 EI_3(GJ + \lambda^2 EI_\phi^s)[1 - \frac{1}{(R\lambda^2)}]^2$