

# 역대칭 적층셸의 비선형 동적 특성에 관한 연구

## Nonlinear Dynamic Characteristics of Antisymmetric Laminated Shells

박 승 진<sup>1)</sup> · 三上 隆<sup>2)</sup> · 김 영 진<sup>3)</sup>

*Park, Sung Jin Mikami, Takashi Kim, Young Jin*

**요 약 :** 본 연구에서는 역대칭 또는 비대칭 적층셸에 대한 Von Karman-Donnell 운동방정식을 기초로 한 다중 모드 접근법을 이용하여 양단이 단순지지 되고 다른 임의지지가 단순 또는 고정지지인 원통 셸의 비선형 거동에 대해 연구하였다. 방정식은 모든 경계조건에 대해 만족하며, 변위함수는 최저 진동모드와 원주 방향의 변위의 연속성 조건을 만족하는 것으로 한다. 비선형 진동 방정식은 Galerkin 법을 이용하여 유도하였고, 비선형 진동수는 조화평균법을 이용하여 적층 매개변수, 재료 상수, 종횡비 및 진동 진폭의 함수로서 표시하였다. 초기 진폭의 영향에 대해서는 4가지 형태의 경계조건에 대한 비선형 진동 결과를 비교 검토하였다.

**ABSTRACT :** Based on Von Karman-Donnell kinematic assumptions for laminated shells, the nonlinear vibration behaviour of antisymmetrically or asymmetrically laminated cross-ply circular cylindrical shells with clamped and simply-supported ends are studied by a multi-mode approach. A equation is formulated and satisfies the associated compatibility equation and all boundary conditions. The displacement function is assumed to take the form of the lowest linear vibration mode and to satisfy continuity of the circumferential displacement. The nonlinear vibration equation is derived by the Galerkin's method. And nonlinear frequency is obtained by using the harmonic balance method as a function of lamination parameters, material constants, aspect ratio and amplitude of vibration. The effect of initial imperfection is also included. Results of the non-linear vibration are presented for different amplitudes of initial imperfection and four sets of boundary conditions. Present results are compared well with existing analysis results.

**핵 심 용 어 :** 복합재료, 적층셸, 자유진동, 비선형

**KEYWORDS :** Composite Material, Laminated Cylindrical shell, Free Vibration, Non-linear

1) 정회원, 시립인천전문대학 토목과 부교수, 공학박사  
2) 日本, 北海道大学工学研究科社会基盤工学専攻 教授, 工学博士  
3) 대우 건설기술연구소, 책임연구원, 공학박사

본 논문에 대한 토의를 1999년 6월 30일까지 학회로 보내 주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

# 1. 서 론

복합재료의 정의는 「2종류 이상의 소재, 성분 등을 일체화 시켜 단일재료에서는 얻을 수 없는 특성을 실현한 재료」이다. 이 정의에 따르면 점토를 강화시킨 벽돌이 복합재료의 시작이라 말할 수 있다. 그러나 현재 주목을 받는 첨단 복합재료로 발전해온 근대적 복합재료는 유기재료인 플라스틱을 무기재료의 유리섬유로 강화시킨 것이 일단이 되어 지금은 복합화 기술의 진보와 함께 단일재료에서는 얻을 수 없는 고도한 기능이나 특성을 가지고 있다.

복합재료가 구조재료로서 사용된 것은 카본(Graphite) 섬유의 개발로 인하여 최근에는 GFRP, CFRP 등의 섬유 강화 플라스틱 등을 대표적으로 들 수 있다. 이것은 카본 등의 섬유를 강화재로서 한방향으로 배열하여 그 주위를 에폭시 등의 플라스틱 수지로 강화시킨 것이다. 이와 같은 장섬유 강화 복합재료의 장점은 종래의 재료에 비해 비강도(강도/밀도)와 비강성(강성/밀도)이 매우 높고, 또 원하는 방향으로 의도한 재료 특성을 구할 수가 있다는 것이다.

이 때문에 구조 경량화를 필수로 하는 많은 공학 분야에서 사용되고 있고, 그 용도는 점점 확대되어 가고 있다. 그러나 복합재료는 일반적으로 강한 이방성을 나타내는 재료이기 때문에 정적<sup>(1~6)</sup> 및 비선형 동적 특성은 종래의 등방성 재료와는 명확히 구분된다. 이 때문에 복합재료로 이루어진 적층 쉘<sup>(7~9)</sup> 구조요소의 설계에 있어서 정적인 특성 뿐만 아니라 선형·비선형 동적 특성을 정확히 파악하는 것이 기본적으로 중요하다고 말할 수 있다. 따라서, 적층구조물의 동특성에 관한 많은 선형문제가 연구되고 있지만, 유한 진폭을 고려한 비선형문제에 대해서는 해석하기가 상당히 어렵기 때문에 충분히 연구가 이루어 졌다고는 말할 수 없다.

특히, 각종 압력 용기 등에 이용되고 있는 적층 원통셸의 비선형 진폭에 미치는 연구는 거의 없다

고 해도 과언이 아니다.<sup>(12,13)</sup>

그래서 본 연구에서는 적층 원통셸의 비선형 동특성을 명확하게 하기 위한 기초적인 자료로서 적층셸의 비선형 진동문제 해석을 수행한다. 이를 위해서 양단 단순지지된 Cross-Ply 적층 원통셸을 사용하여 지배방정식으로서 Von-Karman형의 운동방정식과 변위 함수를 이용한 적합조건식을 이용한다. 면외 변위에는 최저차의 선형 해를 이용하지만, 원주방향 변위의 연속성을 만족하기 위해 보정 항을 첨가한다. 그리고 Galerkin법에 의해 비선형 진동방정식을 도입하고, Hamonic balance법을 이용한 곡선식을 구한다. 그리고 조화평균법을 이용하여 시간함수에 대한 해를 구하고, 여러 경계조건 및 기하학적 초기 진폭에 미치는 영향을 알아본다.

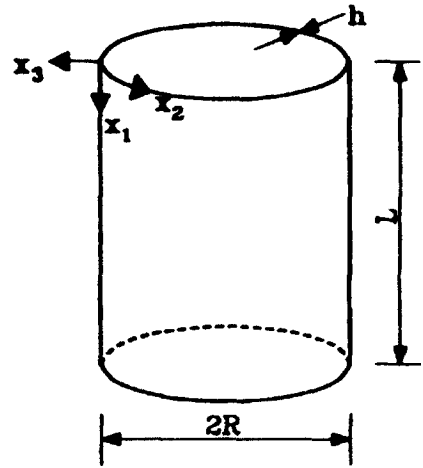


그림 1. 원통셸의 해석모델

## 2. 지배방정식

그림.1에 나타난 원통 셸에 대해  $N$ 장의 FRP 단층재료로 이루어진 적층 원통셸의 형상과 좌표계를 보인다. 그림과 같이 셸의 길이를  $L$ 로 하고, 두께, 평균반경을 각각  $h, R$ 로 나타낸다. 또, 원통 좌표를  $x_1, x_2, x_3$ 으로 하고, 셸 중앙면에서

각 방향 변위를 각각  $u_0, v_0, w_0$ 를 이용하여 나타낸다. Von-Karman 형의 유한변형 이론을 바탕으로 응력-변위 관계식은 다음과 같다.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^0 - x_3 k_i \quad i=1,2,6 \quad (1)$$

여기서,  $\varepsilon_i^0$ 과  $k_i$ 는 셸 중앙 곡면에서의 면내 변위와 곡률을 나타내며 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= u_{0,1} + \frac{1}{2}(w_{0,1})^2 + w_{0,1} \bar{w}_{,1} \\ \varepsilon_2^0 &= v_{0,2} + w_0/R + \frac{1}{2}(w_{0,2})^2 + w_{0,2} \bar{w}_{,2} \\ \varepsilon_6^0 &= u_{0,2} + v_{0,1} + w_{0,1}w_{0,2} + w_{0,1}\bar{w}_{,2} + w_{0,2}\bar{w}_{,1} \\ k_1 &= -w_{0,11} \quad k_2 = -w_{0,22} \quad k_6 = -2w_{0,12} \end{aligned} \quad (2)$$

방정식의 성분은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^0 \\ M \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [A^*] & [B^*] \\ -[B^*]^T & [D^*] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} \quad (3)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^0\} &= [\varepsilon_1^0 \quad \varepsilon_2^0 \quad \varepsilon_6^0]^T \\ \{k\} &= [k_1 \quad k_2 \quad k_6]^T \\ \{N\} &= [N_1 \quad N_2 \quad N_6]^T \\ \{M\} &= [M_1 \quad M_2 \quad M_6]^T \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,  $u_0, v_0, w_0$ 는  $x_1, x_2, x_3$ 방향의 셸 중앙 변위이고,  $\bar{w}$ 는 충격에 의한 횡 변위,  $N_1, N_2, N_6$ 은 막응력,  $M_1, M_2, M_3$ 은 휨모멘트,  $[A^*], [B^*], [D^*]$ 는 강성매트릭스<sup>(16)</sup>이다.

가상일 원리에 관한 동역학적 해석을 토대로

다음 식에 의해 정의되는 응력합수  $\phi$ 를 사용하면 다음과 같다.

$$N_1 = \phi_{,22}, \quad N_2 = \phi_{,11}, \quad N_6 = \phi_{,12} \quad (5)$$

비대칭 Cross-Ply 적층셸의 비선형 진동의 지배방정식을 무차원 형태의 방정식을 나타내면 다음과 같다.

$$L_1(F) = L_2(W) + f(W) \quad (6)$$

여기서,  $F$ 와  $W$ 는 위의 식(9)에서 소개되는 무차원 파라메터이고, 운동방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$W_{,rr} + L_3(W + L_2(F) + g(F, W)) = Q \quad (7)$$

여기서,

$$L_1 = \bar{A}_{22}^*(\cdot)_{,\xi\xi\xi\xi} + 2\lambda^2 (\bar{A}_{12}^* + \frac{1}{2} \bar{A}_{66}^*)(\cdot)_{,\xi\xi\eta\eta} + \lambda^4 \bar{A}_{11}^*(\cdot)_{,\eta\eta\eta\eta}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \bar{B}_{21}^*(\cdot)_{,\xi\xi\xi\xi} + \lambda^2 (\bar{B}_{11}^* + \bar{B}_{22}^*)(\cdot)_{,\xi\xi\eta\eta} + \lambda^4 \bar{B}_{12}^*(\cdot)_{,\eta\eta\eta\eta} \\ &\quad + \beta(\cdot)_{,\xi\xi} + \lambda^2 [2 \bar{W}_{,\xi\eta}(\cdot)_{,\xi\eta} - \bar{W}_{,\eta\eta}(\cdot)_{,\xi\xi} - \bar{W}_{,\xi\xi}(\cdot)_{,\eta\eta}] \end{aligned}$$

$$L_3 = \bar{D}_{11}^*(\cdot)_{,\xi\xi\xi\xi} + 2\lambda^2 (\bar{D}_{12}^* + \frac{1}{2} \bar{D}_{66}^*)(\cdot)_{,\xi\xi\eta\eta} + \lambda^4 \bar{D}_{22}^*(\cdot)_{,\eta\eta\eta\eta}$$

$$f(W) = \lambda^2 (W_{,\xi\eta}^2 - W_{,\xi\xi} W_{,\eta\eta})$$

$$g(F, W) = \lambda^2 (2F_{,\xi\eta} W_{,\xi\eta} - F_{,\eta\eta} W_{,\xi\xi} - F_{,\xi\xi} W_{,\eta\eta}) \quad (8)$$

위 식에서 말한 무차원화 파라메터들은 아래와 같이 정의된다.

$$\xi = x_1/L, \eta = x_2/L, \ell = 2\pi R/N, \lambda = L/\ell,$$

$$\beta = L^2/Rh, W = w_0/h, \bar{w} = W/h$$

$$F = \phi/(A_{22}h^2), Q = qL^4/(A_{22}h^3),$$

$$\tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\left(\frac{A_{22}h^2}{\rho}\right)}$$

$$\bar{A}_{ij}^* = A_{22} A_{ij}, \bar{B}_{ij}^* = B_{ij} A_{ij}, \quad (9)$$

$$\bar{D}_{ij}^* = D_{ij}/(A_{22}h^2) \text{ for } i, j = 1, 2, 6$$

여기서,  $N$ 은 원주를 따라 진동하는 파의 수,  $q$ 는 전단하중,  $\rho$ 는 밀도 그리고  $t$ 는 시간을 나타낸다.  $\bar{A}_{ij}^*$ ,  $\bar{D}_{ij}^*$  및  $\bar{B}_{ij}^*$ 는 식(6), 식(7)의 Donnell 방정식을 이용한 이방성의 강성매트릭스이다. 식(6), 식(7)을 이용한 Cross-Ply 적층셀의 경계조건은 다음의 4가지 형태 만을 가지고 비교 검토하였으며, Simitses<sup>(17)</sup>의 조건에 따라 각각에 대해 단순지지(S), 고정지지(C)인 SS1, SS3, CC1 및 CC3으로 정의하였다.

$$\text{SS1} : w_0 = 0, M_1 = 0, N_1 = N_1^*, N_6 = 0$$

$$\text{SS3} : w_0 = 0, M_1 = 0, N_1 = N_1^*, N_6 = \text{const}$$

$$\text{CC1} : w_0 = 0, w_{0,1} = 0, N_1 = N_1^*, N_6 = 0$$

$$\text{CC3} : w_0 = 0, w_{0,1} = 0, N_1 = N_1^*, N_6 = \text{const} \\ \xi = 0.1 \text{ 에 대해} \quad (10a)$$

여기서,  $N_1^*$ 은 끝점에 대한 축응력이다. 식(2), 식(3)에  $v_0 = \text{const}$ 를 대입하면 다음과 같다.

$$A_{21}^* N_1 + A_{22}^* N_2 - B_{21}^* w_{0,11} - B_{22}^* w_{0,22} = \\ w_0/R + \frac{1}{2}(w_{0,2})^2 + w_{0,2} \bar{w}_{,2} \quad (10b)$$

무차원 파라미터  $W, F$ 를 이용하여 식(10)으로 표시된 경계조건은 다음과 같이 간단히 나타낼

수 있다.

$$\text{SS1} : w_0 = 0, w_{,\xi\xi} = \lambda_1 \bar{N}_1 + \lambda_2 F_{,\xi\xi},$$

$$\lambda^2 F_{,\eta\eta} = \bar{N}_1, F_{,\xi\eta} = 0$$

$$\text{SS3} : w_0 = 0, w_{,\xi\xi} = \lambda_3 \bar{N}_1, \lambda^2 F_{,\eta\eta} = \bar{N}_1,$$

$$F_{,\xi\xi} = \lambda_4 \bar{N}_1$$

$$\text{CC1} : w_0 = 0, w_{,\xi} = 0, \lambda^2 F_{,\eta\eta} = \bar{N}_1, F_{,\xi\eta} = 0$$

$$\text{CC3} : W = 0, W_{,\xi} = 0, \lambda^2 F_{,\eta\eta} = \bar{N}_1,$$

$$F_{,\xi\xi} = \lambda_5 W_{,\xi\xi} + \lambda_6 \bar{N}_1 \text{ 에 대해 } \xi = 0.1 \quad (11)$$

여기서,

$$\lambda_1 = -\bar{B}_{11}^*/D_{11}^*, \lambda_2 = -\bar{B}_{21}^*/D_{11}^*$$

$$\lambda_3 = \left(-\bar{B}_{11}^* + \bar{B}_{21}^* \bar{A}_{21}^*/\bar{A}_{22}^*\right) / \\ \left(\bar{D}_{11}^* + \bar{B}_{21}^* \bar{B}_{21}^*/\bar{A}_{21}^*\right)$$

$$\lambda_4 = \left(-\bar{A}_{21}^* + \bar{B}_{21}^* \bar{B}_{11}^*/\bar{D}_{11}^*\right) / \\ \left(\bar{A}_{22}^* + \bar{B}_{21}^* \bar{B}_{21}^*/\bar{D}_{21}^*\right)$$

$$\lambda_5 = \bar{B}_{21}^*/A_{22}^*, \lambda_6 = -\bar{A}_{21}^*/A_{22}^*$$

$$\bar{N}_1 = N_1^* L^2 / (A_{22} h^2) \quad (12)$$

### 3. 해석 순서

적합방정식과 경계조건을 고려하여  $W, \bar{W}$  및  $F$ 를 다음과 같이 분리하여 식을 표시할 수 있다.

$$W = \sum_p \sum_q W_{pq}(\tau) X_p(\xi) \cos 2q\pi\eta \quad (13)$$

$$\bar{W} = \sum_p \sum_q \bar{W}_{pq}(\tau) X_p(\xi) \cos 2q\pi\eta \quad (14)$$

$$F = \sum_n F_n(\xi, \tau) \cos 2n\pi\eta + \frac{1}{2} \bar{N}_1 \eta^2 / \lambda^2 \quad (15)$$

여기서,

$$X_p(\xi) = \cos p\pi\xi - \cos(p+2)\pi\xi$$

CC1 및 CC3에 대해 (16)

$$X_p(\xi) = \sin p\pi\xi \quad \text{SS1 및 SS3에 대해 (17)}$$

$W, \bar{W}$ 의 식을 적합방정식에 대입하면  $F$ 가 정해지기 때문에  $n$ 의 항은 전적으로  $q$ 의 항에 의해 결정된다.  $W, \bar{W}$ 의 식은 경계조건의 유형 SS1 및 SS3의 0 모멘트를 제외하면 원주방향의 진동 조건과 경계조건을 동시에 만족할 수 없다는 것을 알 수 있다. 하지만, Green<sup>(18)</sup>이 제안한 순차적인 방법을 이용하면 이 조건을 충족시킬 수 있다. 본 논문에서 순차적인 방법의 핵심은 다음과 같은 가정이다.

$$W_{,\xi\xi\xi} = \sum_p \sum_q A_{pq}(\tau) \cos p\pi\xi \cos 2q\pi\eta \quad (18)$$

여기서,  $W_{pq}(\tau)$ 에 대해 부분적분한 다음  $\xi=0,1$ 에서  $W_{,\xi\xi}$  값을 이용하여  $A_{pq}(\tau)$ 의 값을 결정한다. 그리고 앞서 설명한 해를 적합성 방정식(6)에 대입하여 나온 식(6)의 좌변과 우변을 다시 정리하면  $\eta$ 의 코사인 급수로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \bar{A}_{22}^* F_{n,\xi\xi\xi\xi} - 2\lambda^2(2n\pi)^2(\bar{A}_{12}^* + 1/2\bar{A}_{66}^*) \\ & F_{n,\xi\xi} + \lambda^4(2n\pi)^4 \bar{A}_{11}^* F_n \\ & = \sum_m [g_{1mn}(\tau) \sin m\pi\xi + f_{1mn}(\tau) \cos m\pi\xi] \end{aligned}$$

SS1 및 SS3에 대해서 (19)

$$= \sum_m [g_{1mn}(\tau) + f_{1mn}(\tau) \cos m\pi\xi]$$

CC1 및 CC3에 대해 (20)

여기서,  $p$ 항은 파수  $qn$ 항에 관련된 것이다.

$$\begin{aligned} g_{1mn}(\tau) &= \sum_p \sum_q g_{1mn}^{pq} W_{pq}(\tau) \\ f_{1mn}(\tau) &= \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s [g_{2mn}^{pqrs} W_{pq}(\tau) \bar{W}_{rs} \\ & \quad + g_{3mn}^{pqrs} W_{pq}(\tau) W_{rs}(\tau)] \end{aligned} \quad (21)$$

식(19)의 해  $F_n$ 은 공약 함수와 해의 합으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$F_n(\xi, \eta) = F_n^c(\xi, \eta) + F_n^p(\xi, \eta) \quad (22)$$

여기서,  $F_n^p$ 의 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} F_n^p(\xi, \eta) &= \sum_m [\bar{g}_{1mn} \sin m\pi\xi + \\ & \quad \bar{g}_{2mn}(\tau) \cos m\pi\xi + \bar{g}_{3mn} \cos m\pi\xi] \end{aligned}$$

SS1 및 SS3에 대해서 (23)

$$= \sum_m [\bar{g}_{1mn}(\tau) + \bar{g}_{2mn}(\tau) + \bar{g}_{3mn}(\tau) \cos m\pi\xi]$$

CC1 및 CC3에 대해서 (24)

여기서,

$$\begin{aligned} \bar{g}_{imn}(\tau) &= g_{imn}(\tau) / b_{mn} \quad i=1,2,3 \\ b_{mn} &= (m\pi)^4 \bar{A}_{22}^* + 2\lambda^2(2n\pi)^2(m\pi)^2 \\ & \quad \left( \bar{A}_{12}^* + \frac{1}{2} \bar{A}_{66}^* \right) + \lambda^4(2m\pi)^4 \bar{A}_{22}^* \end{aligned} \quad (25)$$

식(19)의 공약해  $F_n^c$ 는 다음과 같은 특성을 가진다.

$$n=0, \quad F_0^c(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^4 a_{0k}(\tau) \xi^{k-1} \quad (26)$$

$$n \neq 0, \quad F_n^c(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^4 a_{nk}(\tau) e^{\gamma_{nk}\xi} \quad (27)$$

여기서,  $\gamma_{nk}$ 는 특성 방정식의 평방근이다.

$$\begin{aligned} & \bar{A}_{22}^* \gamma^4 - 2\lambda^2 (2n\pi)^2 \left( \bar{A}_{22}^* + \frac{1}{2} \bar{A}_{66}^* \right) \gamma^2 \\ & + \lambda^4 (2n\pi)^4 \bar{A}_{11}^* = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

이 식의 해는 Graphite/Epoxy, Glass/Epoxy 및 Boron/Epoxy의 재료를 가진 Cross-Ply 복합 적층 쉘의 실제 값을 나타낸다.

식(26) 및 식(27)에 포함된 미지변수  $a_{nk}$ 은 식(15)를 면내 경계조건에 대입하면  $F_n$ 에 대한 다음의 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\text{SS1 및 CC1} : F_n = 0, F_{n,\xi} = 0$$

$$\text{SS3} : F_n = 0, F_{0,\xi\xi} = \lambda^4 \bar{N}_1, F_{n,\xi\xi} = 0$$

$$\text{CC3} : F_n = 0,$$

$$F_{0,\xi\xi} = \lambda_5 \sum_p W_{p0}(\tau) X_p''(\xi) + \lambda_6 \bar{N}_1$$

$$F_{n,\xi\xi} = \lambda_\xi \sum_p W_{pn}(\tau) X_p''(\xi) \quad \xi = 0, 1 \quad (29)$$

식(22)를 나타내는  $F_n$ 의 경계조건을 대입시켜 미지수  $a_{nk}$ 을 포함하는 모든 항들을 나머지 항으로 표시하면 각각의  $n$ 에 대한 4개의 식을 구할 수 있는데, 이 식에서  $n$ 은 다음과 같은 일반적인 식으로 표시된다.

$$[E_n] \{a_n\} = \{y_n\} \quad (30)$$

여기서,  $E_n$ 은 일정한 요소를 포함하는 매트릭스이며,  $y_n$ 은  $\bar{N}_1, \sum_p \sum_q W_{pq}(\tau), \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s W_{pqrs}(\tau) \bar{W}_{rs}$  및  $\sum_p \sum_q \sum_r \sum_s W_{pq}(\tau) W_{rs}$ 의 1차함수로 표시되는 요소이고,  $\{a_n\} = [a_{n1}(\tau), a_{n2}(\tau), a_{n3}(\tau), a_{n4}(\tau)]^T$ 가 성립한다. 따라서 식(30)의 해를 구하면  $a_{nk}$ 가 결정되며 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} a_{nk}(\tau) = & C_{0nk} \bar{N}_1 + \sum_p \sum_q C_{1nk}^{pq} W_{pq}(\tau) + \\ & \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s C_{2nk}^{pqrs} W_{pq}(\tau) \bar{W}_{rs} \quad (31) \\ & \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s C_{3nk}^{pqrs} W_{pq}(\tau) \bar{W}_{rs}(\tau) \end{aligned}$$

여기서,  $C_{0nk}, C_{1nk}^{pq}, C_{2nk}^{pqrs}$  및  $C_{3nk}^{pqrs}$ 는 상수이지만 여기서는 완전하게 나타나 있지 않다. 그러나 이 상수들의 값을 체계적으로 계산 가능하다. 지금까지는 적합방정식 및 경계조건을 모두 만족시키는  $W, F$ 에 대한 식을 구하였다. 따라서, 식(7)에 Galerkin이 제안한 방법을 적용한 결과 아래와 같은 조건식을 얻었다.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 [W_{,\tau\tau} + L_3(W) + L_2(F) + g(F, W) - Q] \\ & X_i(\xi) \cos 2j\pi n d \xi d \eta = 0 \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (32)$$

식(13)~(15), 식(22)~(24), 식(26), 식(31)을 이용하여 적분을 하면  $W_{pq}(\tau)$ 에 대한 비선형에 대한 미분방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & a_{ij}^{pq} W_{pq}(\tau)_{,\tau\tau} + (\beta_{ij}^{pq} + \bar{N}_1 \bar{\beta}_{ij}^{pq}) \\ & + \gamma_{ij}^{pqrs} W_{pq}(\tau) W_{rs}(\tau) + \mu_{ij}^{pqrstu} W_{pq}(\tau) W_{rs}(\tau) \quad (33) \\ & = Q_{ij} - \bar{N}_1 (\bar{\beta}_{ij}^{pq} \bar{W}_{pq} + \xi_{ij}) \end{aligned}$$

여기서,  $a_{ij}^{pq}, \beta_{ij}^{pq}, \gamma_{ij}^{pqrs}, \mu_{ij}^{pqrstu}, \xi_{ij}$ 는 상수이며 다음과 같은 식이 성립된다.

$$Q_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 Q X_i(\xi) \cos 2j\pi n d \xi d \eta \quad (34)$$

위에서 표시한 2차 및 3차의 비선형적인 일련의 식들은 조화평균법에 의해 Cross-Ply 원통셸에 대한 진동 해석을 할 때 기본적인 시스템으로

서 역할을 한다. 시간함수  $W_{pq}(\tau)$  를 전개하여 후리에 급수로 나타내면 다음과 같다.

$$W_{pq}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k^{pq} \cos k\omega\tau \quad (35)$$

여기서,  $\omega$  는 무차원 진동 주파수,  $W_k^{pq}$  는  $k$  번째 조화 진폭에 대한 미지의 계수를 나타낸다. 무차원 진동수  $\omega$  와 진동 주파수  $\bar{\omega}$  의 관계식은 다음과 같다.

$$\omega = \bar{\omega} L^2 \sqrt{\left(\frac{\rho}{A_{22} h^2}\right)} \quad (36)$$

식(33)의 해를 구하기 위해 조화평균법을 후리에 코사인 전개식에 포함된 임의의 개수의 항에 대해 체계적으로 처리할 수 있다.

## 5. 해석 결과

Graphite/Epoxy 소재로 제작된 비대칭 적층 Cross-Ply 원통 쉘에 대한 비선형 진동 해석에 대한 해석 예를 비교 검토하기 위하여 계산에 사용된 재료들은 다음과 같다.

$$E_1/E_T = 40, G_{LT}/E_T = 0.5, \nu_{LT} = 0.25$$

여기서,  $E_L$  과  $E_T$  는 이방성 재료의 탄성계수이고,  $G_{LT}$  는 전단계수,  $\nu_{LT}$  는 포아송 비이다.

원주방향의 3가지 비대칭 및 3가지 선대칭 모드를 이용하여 수치해석을 실시하고, 후리에 급수를 전개할 때에는 최초의 6개 항만 고려하기로 한다. 그림 2는 Glass/Epoxy로 된 단순지지의 비등방 원통 쉘의 비선형 진동에 의한 결과를 El-Zaouk와 Dym<sup>(19)</sup>이 얻은 결과를 비교했다. 여기서, El-Zaouk와 Dym이 제시한 것은 실린더의 끝부분에서 휨모멘트가 0이 되어야 한다는

조건을 만족시키지 못하며, 진동 진폭이 커지면 이러한 현상이 더욱 더 현저하게 나타난다는 점, 그리고 본 논문의 해석이 모든 경계조건을 만족할 경우에는 선대칭 변형이 억제된다는 등의 사실이다. 심지어 진동 진폭이 작은 경우에도 값은 서로 달라진다.  $L/R=0.5$ 인 경우 논문<sup>(27)</sup>에 의하면 매우 약한 Softening 효과가 나타남을 알 수 있다.

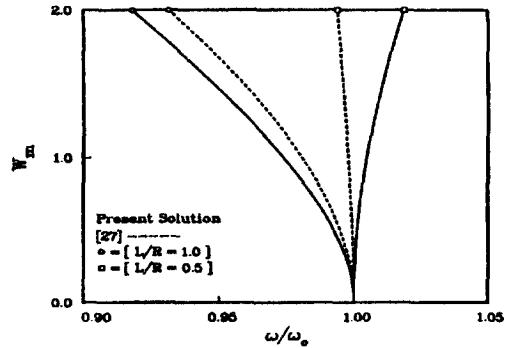


그림 2. SS3 경계조건을 이용한 Glass/Epoxy 비등방 원통 쉘의 비선형 진동수의 비교

$$(R/h=100, N=5, E_L/E_T=3, G_{LT}/E_T=0.5, \nu_{LT}=0.25)$$

그림 3~7에 표시된 역대칭 Cross-Ply 원통 쉘에서 나타난 무차원 진동수의 예를 표 1에 정리했다. 본 논문에서 알 수 있듯이 Dong<sup>(14)</sup>에서 구한 값들과 거의 정확히 일치하는 것을 알 수 있다. 그림 5의 경우를 제외하면 원주방향의 파수  $N$ 은 기본 진동모드 또는 최저 좌굴하중계수와 연관이 있다는 것은 잘 알려져 있다.

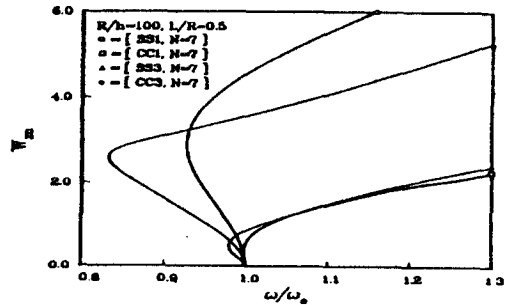


그림 3. 여러 경계조건을 갖는 Graphite/Epoxy Cross-Ply( $0^\circ/90^\circ$ ) 원통 쉘의 첫 번째 모드에서 나타나는 비선형 진동수

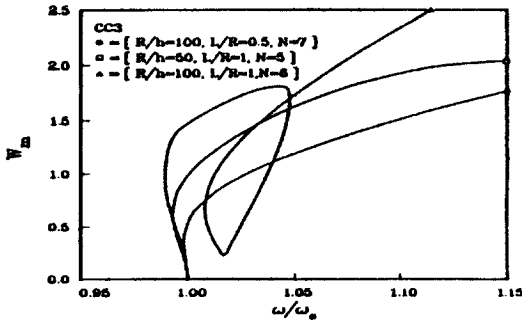


그림 4. CC3 경계조건을 갖는 Graphite/Epoxy Cross-Ply( $0^0/90^0$ ) 원통셸의 진축-주파수 응답

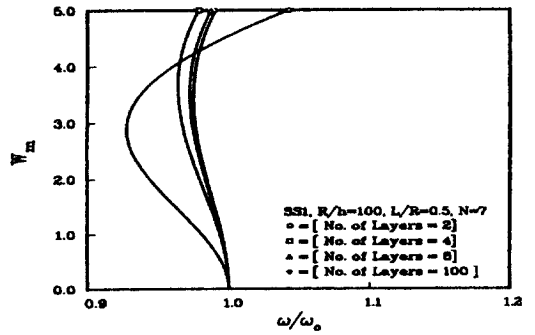


그림 6. SS1 경계조건을 갖는 Graphite/Epoxy 비대칭 Cross-Ply( $0^0/90^0$ ) 원통셸의 첫 번째모드의 비선형 층수에 대한 영향

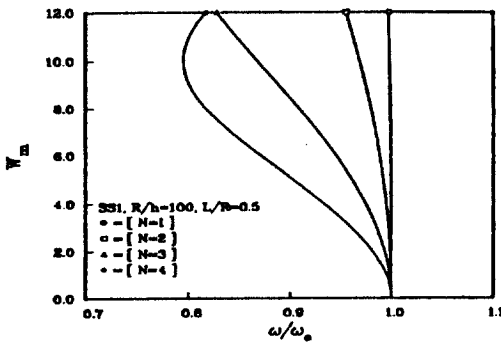


그림 5. SS1 경계조건을 갖는 Graphite/Epoxy Cross-Ply( $0^0/90^0$ ) 원통셸의 진축-주파수 응답

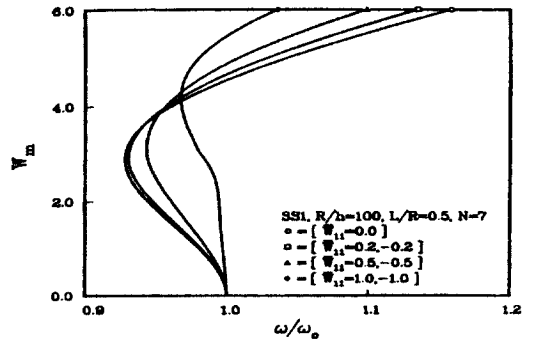


그림 7. SS1 경계조건을 갖는 Graphite/Epoxy Cross-Ply( $0^0/90^0$ ) 원통셸의 첫 번째모드의 비대칭의 초기 결함에 대한 영향

4가지 형태의 경계조건에 대한 일반적인 진폭-주파수 응답을 그림 3에 나타내었다. 여기서, 응답곡선은 처음에는 Softening 현상을 나타내다가 진폭이 커지면 Hardening 현상을 나타내는데, 이러한 특성은 Evensen<sup>(20,22)</sup>, Mayers<sup>(21)</sup>가 제기한 바와 같이 비등방 원통셸 및 등방성 원통셸의 비선형 진동에서 발견된 현상과 아주 유사하다. 그림 4에서는  $L/R=1$ ,  $N=6$ ,  $R/h=100$ 일 때 응답 곡선에서 나타난 바와 같이 CC3의 조건이 비선형 자유진동에서도 내부 공진 현상이 일어난다는 것은 흥미로운 사실이다. 그림 6은 적층을 이루는 층 수가 증가함에 따라 비선형성이 약화됨을 알 수 있다. 그림 7은  $\overline{W}_{11}$ 에 대해서는 지정값을  $\overline{W}_{11}$ 에 대해서는 0의 값으로 하는 불완전한 비대칭인 경우 그 값이 + 이면, - 이면간

에 비선형 성이 감소한다.

## 6. 결 론

본 논문에서는 역대칭 또는 비대칭 적층 Cross-Ply 원통셸에 대한 Von Karman-Donnell의 비선형 이론에 기초한 다중 모드해법을 제시하고, 이를 응용하여 비선형 진동에 관한 연구를 해석하였고, 적층 Cross-Ply 원통 셸의 진동에 대한 연구가 잘 일치하는 것을 알 수 있었다. 결과에 따르면 비선형 진동에 있어서 비선형 효과는 처음에는 Softening 형태로 되었다가 이후 진동의 진폭이 커지면 Hardening 형태로 회귀하고 있다. 선대칭 변형이 원통 셸의 비선형 분석에서 필수 불가



표.1 그림3~7에 사용된 Graphite/Epoxy 비대칭 Cross-Ply 원통셸의 무차원 진동수의 비교

그림	경계조건	R/h	L/R	N	층수	$\bar{W}_{10}$	$\bar{W}_{11}$	$\omega_0$	
								본해석	Dong[14]
3	SS1	100	0.5	7	2			4.1547	4.1531
	SS3	100	0.5	7	2			4.4031	4.4031
	CC1	100	0.5	7	2			5.6828	5.6654
	CC3	100	0.5	7	2			5.7084	5.6965
4	CC3	100	0.5	7	2			5.7084	5.6965
		50	1	5	2			7.7257	7.7141
		100	1	6	2			11.1255	11.0575
5	SS1	100	0.5	1	2			8.1855	8.1371
				2	2			7.1063	7.0763
				3	2			6.0150	5.9984
				4	2			5.1608	5.1517
6	SS1	100	0.5	7	2			4.1547	4.1531
				6	4			5.0829	5.0820
				6	8			5.2694	5.2684
				6	100			5.3297	5.3287
7	SS1	100	0.5	7	2	0.0		4.1547	4.1531
						0.2		4.3495	-
						0.5		4.6528	-
						1.0		5.1815	-

결한 요소임은 분명하다. CC3의 경계조건의 경우, 다중 모드접근법 및 조화평균법을 사용한 결과 내부 공진 현상을 관측할 수 있었다.

### 감사의 말

본 연구는 1997년도 한국학술진흥재단 자유전문 대과제 (과제번호 1997-004-E6101) 연구비 지원에 의하여 수행된 연구로서 한국학술진흥재단에 깊은 감사드립니다.

### 참고 문헌

- (1) 박승진 외 3인 : 역대칭 Cross-Ply 다층판의 자유진동 및 변형에너지 해석, 대한 토목학회논문집, 제11권, pp.37, 1991.
- (2) 박승진 외 2인 : Free Vibration of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates, 일본 구조공학논문집, Vol.37A, pp.911, 1991.
- (3) 박승진 외 2인 : Vibrations of Antisymmetric Cross-Ply and Angle-Ply Laminated Plates

under Initial Stress, 일본 구조공학논문집, Vol.38A, pp.639, 1992.

- (4) 박승진 외 2인 : 초기응력을 받는 역대칭적 층판의 진동특성에 관한 연구(I)-간편산정식의 개발-대한토목학회논문집, 제15권, pp.25, 1995.
- (5) 박승진 외 2인 : 초기응력을 받는 역대칭적 층판의 진동특성에 관한 연구(II) -수치해석예를 중심으로-, 대한토목학회논문집, 제 15권, pp.35, 1995.
- (6) 박승진 : 1차전단변형을 고려한 역대칭 Angle-Ply 적층판의 변형에너지 특성, 대한토목학회 학술발표논문집(I), pp.429, 1997.
- (7) 박승진 외 1인 : Galerkin 해석법에 의한 원통 Panel의 진동 및 좌굴 특성, 대한토목학회 논문집, 제11권, pp.27, 1991.
- (8) 박승진 : 충격하중을 받는 2층 원통셸 해석, 대한 토목학회 학술발표논문집(I), pp.349, 1996.
- (9) 박승진 : 적층 원통 셸의 진동특성, 대한 토목학회 학술발표논문집(I), pp.353, 1996.
- (10) 박승진 : 적층판의 후좌굴해석에 관한 연구, 토목학회 학술발표논문집(I), 1998.
- (11) A.W.Leissa, Vibration of shells, NASA SP-288.1973.

- (12) C.W.Bert, Vibration of composite structures. Proc.Int.Conf. on Recent Advances in Structural Dynamics, Institute of Sound and Vibration Research, pp.693, 1980.
- (13) L.H.Donnell, Stability of thin-walled tubes under torsion, NASA, 1973.
- (14) S.B.Dong, Free vibration of laminated orthotropic cylindrical shells, J.Acoust, 44, pp.1628, 1968.
- (15) C.W.Bert, J.L.Baker and D.M.Egle, Free vibration and multilayer anisotropic cylindrical shells, J. Comp. pp.480, 1969.
- (16) C.Y.Chia, Nonlinear Analysis of Plates, McGraw-Hill, New York (1980).
- (17) G.J. Simitses, D.Shaw and I.Sheinman : Stability of cylindrical shells by various nonlinear shell theories., ZAMM65, pp.159, 1985.
- (18) A.E.Green : Double Fourier series and boundary value problems, Proc. Camb. Phil. Soc. 40, pp.222, 1944.
- (19) B.R.-Zaouk and C.L.Dym : Non-linear vibrations orthotropic doubly-curved shallow shells. J. Sound Vibr. 31, pp.89, 1973.
- (20) D.A.Evensen : Some observations on the nonlinear vibration of thin cylindrical shells. AIAA J. 1, pp.2857, 1963.
- (21) J.Mayers and B.G.Wrenn : On the nonlinear free vibrations of thin cylindrical shells. Dev. Mech. 4, pp.819, 1967.
- (22) D.A.Evensen and R.E.Fulton : Some studies on the nonlinear dynamic response of shell-type structures. Int. Conf. Dynamic Stab. Struct. pp.237, 1965.

(접수일자 : 1998년 10월 20일)