

# 면내 선형분포하중을 받는 수평보강재가 설치된 직교이방성판의 좌굴강도

## Buckling Strength of Orthotropic Rectangular Plate with a Longitudinal Stiffener under In-plane Linearly Distributed Loads

정재호<sup>1)</sup> · 윤순종<sup>2)</sup> · 조선규<sup>3)</sup>  
*Jung, Jae Ho Yoon, Soon Jong Cho, Sun Kyu*

요약 : 본 연구는 수평보강된 직교이방성판의 좌굴거동에 관한 것으로서 면내 선형 분포하중을 받는 수평보강된 직교이방성판의 좌굴해석식을 Rayleigh-Ritz법을 사용하여 유도하였으며 보강재의 위치에 따른 좌굴응력의 상한치를 Lagrangian multiplier법을 사용하여 결정하였다. 판의 네 변은 단순지지되어 있다고 가정하였으며, 보강재는 보요소로 간주하였다. 유도된 식을 사용하여 보강재와 판의 폭비와 보강재의 위치를 변화시켜가며 좌굴해석을 수행한 결과 면내 선형분포하중을 받는 네 변이 단순지지된 수평보강된 직교이방성판의 효과적인 보강재의 설치 위치는 판의 좌굴응력의 상한치가 최대가 되는 위치임을 알 수 있었다.

ABSTRACT : In this study buckling behavior of orthotropic plate with a longitudinal stiffener under in-plane linearly distributed loads is investigated. All edges of plate are assumed to be simply supported and the stiffener is considered as a beam element. For the equation of buckling analysis Rayleigh-Ritz method is employed. The upper limit of the critical stress at various location of stiffener is determined by using Lagrangian multiplier method. Buckling analysis is performed for the various position of stiffener and for the various width ratios between plate and stiffener. The parametric study shows that, when four edges of plate are simply supported, the most effective position for a longitudinal stiffener is at the location of which the upper limit of the stress is the maximum.

1) 홍익대학교 토목공학과 석사과정  
2) 정희원, 홍익대학교 토목공학과 조교수  
3) 정희원, 서영기술단 전문이사

본 논문에 대한 토의를 1999년 3월 31일까지 학회로 보내  
주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

핵심용어 : 좌굴응력, 면내 선형분포하중, 수평보강재, 직교이방성판, Rayleigh-Ritz 법, Lagrangian multiplier법

KEYWORDS : buckling stress, in-plane linearly distributed loads, longitudinal stiffener, orthotropic plate, Rayleigh-Ritz method, Lagrangian multiplier method

## 1. 서론

건설분야에서 사용되는 구조용 강재는 안정성을 확보하면서 동시에 재료의 효율적인 사용을 통한 비용절감을 위해 판요소들로 구성되어 있다. 이러한 판요소로 구성된 구조용 부재의 설계에 있어서 검토되어야 할 중요한 문제중의 하나는 부재를 구성하는 각 판요소에 좌굴이 발생하는 국부좌굴이며, 판요소로 구성된 부재의 국부좌굴강도를 증가시키기 위하여 일반적으로 플랜지의 연단이나 복부의 면내에 보강재를 설치하게 된다. 따라서 이러한 부재의 설계를 위해서는 보강재가 설치된 판의 좌굴해석이 필요하다.

등방성판의 경우 Timoshenko(1921), Lokshin(1935), Barbré(1936) 등에 의해 보강재가 설치된 판의 좌굴해석이 수행되었으며, Seide와 Stain(1949), Ramsey(1951), Timoshenko와 Gere(1961) 등은 네 변이 모두 단순지지되어 있으며 압축력을 받는 수평보강된 판의 좌굴응력을 결정하기 위한 도표를 제시하였다<sup>(1,2)</sup>.

또한 Rockey와 Leggett(1962)는 순수휨에 의한 면내 선형분포하중을 받는 수평보강된 판의 좌굴해석을 수행하여 수평보강재의 효과적인 위치 및 보강재에 요구되는 강성을 결정하였다<sup>(3)</sup>.

구조용 강재의 경우 재료의 성질은 일반적으로 등방성으로 간주되며, 많은 실험적 연구결과를 토대로 앞에서 언급한 이론적인 연구결과를 설계에 적용하고 있다. 그러나, 강재의 생산과 가공방법에 따라 판요소의 재료의 성질에 차이가 있을 수 있으며, 또한 판요소내에서도 재료의 성질에 방향성이 생길 수 있다. 따라서 이러한 경우에는 재료

의 성질의 방향성에 따라 직교이방성으로 간주하여 해석하고 설계할 수 있다.

직교이방성판의 경우 윤 등(1994)은 하중이 재하되지 않은 한 변은 연단보강재가 설치되어 있으며 다른 한 변은 다양한 경계조건을 갖는 판의 좌굴해석을 수행하였다. 또한, 김 등(1996)은 중간보강재가 1개 또는 등간격으로 2개 이상 설치된 면내 등분포압축력을 받는 판의 좌굴해석을 수행하였다. 그러나, 등방성판에 비해 보강재가 설치된 판에 대한 연구가 아직은 미흡한 실정이다.

따라서, 본 연구에서는 면내 선형분포하중을 받는 수평보강된 직교이방성판의 좌굴해석식을 Rayleigh-Ritz법을 사용하여 유도하였으며, Lagrangian multiplier법을 도입하여 수평보강된 직교이방성판의 좌굴계수의 상한치를 결정하였다. 또한 유도된 식을 사용하여 보강재와 판의 폭비와 보강재의 설치 위치를 변화시켜가며 좌굴해석을 수행하여 보강재와 판의 폭비와 보강재의 설치 위치가 직교이방성판의 좌굴응력에 미치는 영향에 대해 조사하였다.

일반적으로 보강재의 폭은 판의 폭에 비해 매우 작으므로, 보강재를 보요소로 간주하였으며 판의 네 변은 모두 단순지지되어 있는 경우에 대해서 좌굴해석을 하였다.

## 2. 에너지법에 의한 기본방정식

본 연구에서는 고전적인 직교이방성판에 대한 기본적인 가정 이외에 다음과 같은 가정을 도입하였다<sup>(1)</sup>.

(1) 보강재와 판의 접합부에서 보강재와 판의

면외처짐은 같다.

- (2) 보강재의 비틀림강성은 무시한다.
- (3) 보강재는 판의 중립면에 대해 대칭으로 설치되어 있다.

이와 같은 가정사항을 고려한 그림 1과 같은 수평보강된 직교이방성판에 좌굴이 발생할 경우, 판의 내부에 축적된 변형에너지( $U_p$ )와 보강재에 축적된 변형에너지( $U_s$ )를 구하면 다음 식 (1), (2)와 같다<sup>(4)</sup>.

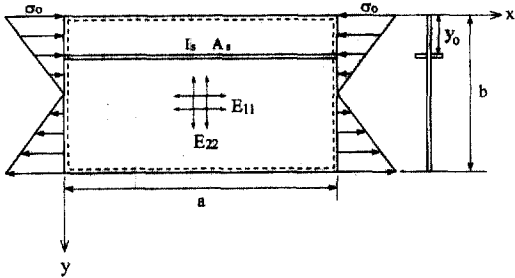


그림 1. 면내 선형분포하중을 받는 수평보강된 직교이방성판

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu_{21} D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_p}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (1)$$

$$U_s = \frac{E_{11} I_s}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (2)$$

식 (1)에서  $w_p$ 는 판의 면외처짐이며  $a$ 와  $b$ 는 판의 길이와 폭이다. 또한,  $D_{11}$ 과  $D_{22}$ 는 재료의 성질방향 1과 2에서의 휨강성이고  $D_{66}$ 은 비틀림강성으로 각각 식 (3a,b,c)와 같이 정의된다. 식 (2)에서  $w_s$ 는 보강재의  $x$ - $y$ 면에 수직방향으로의 처짐이고,  $E_{11}$ 는 보강재의  $x$ 축 방향에 대한 탄성

계수이며,  $I_s$ 는 보강재의  $y$ 축에 대한 단면2차모멘트이다.

$$D_{11} = \frac{E_{11} t^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (3a)$$

$$D_{22} = \frac{E_{22} t^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (3b)$$

$$D_{66} = \frac{G_{12} t^3}{12} \quad (3c)$$

식 (3a,b,c)에서  $E_{11}$ 과  $E_{22}$ 는 재료의 성질방향 1과 2에서의 탄성계수이며  $G_{12}$ 는 전단탄성계수이다. 또한,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$ 은 각각 재료의 성질방향 1과 2에서의 프아송비이며  $t$ 는 판의 두께이다.

그림 1에서 판에 작용하는 면내 선형분포하중은 다음 식 (4)와 같이 나타낼 수 있으며 임의의 상수  $c$ 값에 따른 하중분포는 그림 2와 같다.

$$\sigma = \left(1 - \frac{c}{b} y\right) \sigma_0 \quad (4)$$

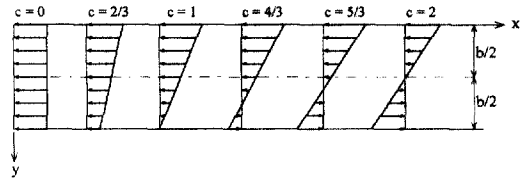


그림 2. c값의 변화에 따른 면내 하중의 분포형태

그림 2에서  $c=0$ 인 경우는 등분포일축압축력을 나타내며,  $c=2$ 인 경우는 순수휨으로 인한 면내 선형분포하중을 나타낸다.

식 (4)의 면내 선형분포하중이 그림 1과 같은 직교이방성판에 대해 한 일( $T_p$ )과 보강재에 대해 한 일( $T_s$ )은 다음 식 (5), (6)과 같다.

$$T_p = \frac{1}{2} \sigma_0 t \int_0^b \int_0^a \left(1 - \frac{c}{b} y\right) \left(\frac{\partial w_p}{\partial x}\right)^2 dx dy \quad (5)$$

$$T_s = \frac{1}{2} \sigma_0 A_s \left(1 - \frac{c}{b} y_0\right) \int_0^a \left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2 dx \quad (6)$$

식 (6)에서  $y_0$ 는 보강재의 설치 위치로서 압축 연단으로부터의 거리이며  $A_s$ 는 보강재의  $x$ 축에 대한 단면적이다.

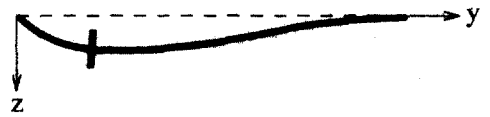
전체포텐셜에너지( $\Pi$ )는 다음 식 (7)과 같이 정의되므로 식 (1), (2), (5), (6)을 식 (7)에 대입하면 수평보강된 직교이방성판의 전체포텐셜 에너지를 구할 수 있다.

$$\Pi = U_p + U_s - T_p - T_s \quad (7)$$

### 3. 수평보강된 직교이방성판의 좌굴

그림 1과 같은 수평보강된 직교이방성판에 좌굴이 발생할 경우 보강재의 강성이 비교적 작다면 판의 좌굴에 의해 보강재에서도 좌굴이 발생하므로 좌굴이 발생한 수평보강된 직교이방성판의  $y$ - $z$ 면의 처짐모양은 그림 3의 (a)와 같이 된다. 만일 보강재의 강성이 매우 크다면 판의 좌굴에 의해 보강재와 판의 접합부에 면외처짐이 발생하지 않게 된다. 따라서 좌굴이 발생한 판의  $y$ - $z$ 면에서의 처짐모양은 그림 3의 (b)와 같이 되며, 이 경우 판의 좌굴응력은 최대값을 갖게 된다<sup>(5)</sup>.

본 장에서는 그림 3의 (a)의 경우에 대해 조사해법의 하나인 Rayleigh-Ritz법을 사용하여 수평보강된 직교이방성판의 좌굴해석식을 유도하였으며, 그림 3의 (b)의 경우를 고려하여 수평보강된 직교이방성판의 좌굴응력의 상한치를 결정하였다.



(a) 보강재의 휨강성이 작은 경우



(b) 보강재의 휨강성은 크지만 비틀림강성은 작은 경우

그림 3. 수평보강된 직교이방성판의  $y$ - $z$ 면의 처짐모양

### 3.1 Rayleigh-Ritz법에 의한 좌굴해석

Rayleigh-Ritz법에서 처짐식은 판의 경계조건과 보강재와 판의 접합부에서의 적합조건을 만족하도록 가정하여 사용한다. 본 연구에서 판의 네 변은 단순지지되어 있으며, 보강재와 판의 접합부에서 보강재와 판의 면외처짐은 같다고 가정하였으므로 이와 같은 경계조건을 만족하는 판의 처짐식과 보강재의 처짐식은 각각 다음 식 (8a,b)와 같이 가정할 수 있다<sup>(5)</sup>.

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (8a)$$

$$w_s = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \quad (8b)$$

식 (8a,b)에서  $m$ 과  $n$ 은 각각  $x$ 축,  $y$ 축 방향에 대한 half-sine곡선의 수를 나타내며  $A_{mn}$ 은 처짐량을 나타내는 임의의 상수이다.

계산을 간단하게 하기 위해 무차원화 변수  $\xi = x/a$ 와  $\eta = y/b$ 를 도입하고, 식 (8a,b)를 식

(1), (2), (5), (6)에 대입하면, 보강재와 판의 내부에 축적된 변형에너지와 외력이 한 일은 다음과 같이 구할 수 있다.

판의 내부에 축적된 변형에너지( $U_p$ )와 보강재의 내부에 축적된 변형에너지( $U_s$ )는 식 (9), (10)과 같다.

$$U_p = \frac{ab\pi^4}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left\{ D_{11} \frac{m^4}{a^4} + 2\nu_{21} D_{11} \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + D_{22} \frac{n^4}{b^4} + 4D_{66} \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \right\} \quad (9)$$

$$U_s = \frac{aE_{11s}I_s\pi^4}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^4}{a^4} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin n\pi\eta_0 \right\}^2 \quad (10)$$

식 (10)에서  $\eta_0$ 는 보강재의 위치를 무차원화 하여 나타낸 것으로  $\eta_0 = y_0/b$ 이다.

외력이 판에 대해 한 일( $T_p$ )의 적분과정(즉, 식 (8a)를 식 (5)에 대입)에서 다음 식 (11)과 같은 관계가 성립한다<sup>(6)</sup>.

$$\int_0^1 \eta \sin n\pi\eta \sin q\pi\eta \, d\eta = \begin{cases} \frac{1}{4} & n=q \\ 0 & n \neq q, \, n \pm q = \text{even} \\ -\frac{1}{\pi^2} \frac{4nq}{(n^2 - q^2)^2} & n \neq q, \, n \pm q = \text{odd} \end{cases} \quad (11)$$

식 (11)을 적용하여 외력이 판에 대해 한 일을 구하면 다음 식 (12)와 같으며  $n \pm q = \text{홀수}$ 이다.

$$T_p = \frac{ab\pi^2}{8} \sigma_0 t \left\{ \left(1 - \frac{c}{2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \frac{m^2}{a^2} + c \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{m^2}{a^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_{mq}}{\pi^2} \frac{8nq}{(n^2 - q^2)^2} \right\} \quad (12)$$

또한, 외력이 보강재에 대해 한 일( $T_s$ )은 다음 식 (13)과 같다.

$$T_s = \frac{a\pi^2}{4} \sigma_0 A (1 - c\eta_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{a^2} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin n\pi\eta_0 \right\}^2 \quad (13)$$

직교이방성판의 좌굴응력은 식 (14)와 같이 정의되므로(6) 식 (14)를 식 (12), (13)의  $\sigma_0$ 에 대입하고, 이 결과로 얻어진 식과 식 (9), (10)을 식 (7)에 대입하면, 좌굴이 발생한 수평보강된 직교이방성판의 전체포텐셜에너지는 식 (15)와 같이 구해진다.

$$\sigma_{crp} = k_p \frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}{b^2 t} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{ab\pi^4}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left\{ D_{11} \frac{m^4}{a^4} + 2\nu_{21} D_{11} \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + D_{22} \frac{n^4}{b^4} + 4D_{66} \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \right\} \\ & + \frac{aE_{11s}I_s\pi^4}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^4}{a^4} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin n\pi\eta_0 \right\}^2 \\ & - k_p \frac{\sqrt{D_{11} D_{22}}}{b^2 t} \frac{aA_s\pi^4}{4} (1 - c\eta_0) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{a^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin n\pi\eta_0 \right\}^2 \\ & - k_p \frac{\sqrt{D_{11} D_{22}}}{b^2} \frac{ab\pi^4}{8} \left\{ \left(1 - \frac{c}{2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \frac{m^2}{a^2} + c \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{m^2}{a^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \frac{8nq}{(n^2 - q^2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)에서  $A_{mn}$ 은 전체포텐셜에너지가 최소가 되도록 결정되어야 한다<sup>(7)</sup>. 따라서, 식 (15)를  $A_{mn}$ 에 대해 최소화 한 후 간단히 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & A_{mn} \left\{ Q_{mn} - k_p \phi^2 m^2 \left( 1 - \frac{c}{2} \right) \right\} \\
 & - k_m \sum_{q=0}^{\infty} A_{mq} \frac{nq}{(n^2 - q^2)^2} \\
 & + LS_m \sin n\pi\eta_0 \sum_{p=1}^{\infty} A_{mp} \sin p\pi\eta_0 = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

식 (16)에서  $m=1, 2, 3, \dots$ 이고,  $n=1, 2, 3, \dots$ 이며,  $n \neq q$ 는 항상 홀수이다. 또한  $Q_{mn}$ ,  $k_m$ ,  $LS_m$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 Q_{mn} = & m^4 \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + 2\phi^2 m^2 n^2 \nu_{21} \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \\
 & + \phi^4 n^4 \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} + 4\phi^2 m^2 n^2 \frac{G_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\sqrt{E_{11}E_{22}}}
 \end{aligned} \tag{17a}$$

$$k_m = \frac{8k\phi^2 m^2 c}{\pi^2} \tag{17b}$$

$$LS_m = 2\{\gamma m^4 - k\phi^2 m^2 \delta(1 - c\eta_0)\} \tag{17c}$$

식 (17c)에서  $\gamma$ 와  $\delta$ 는 보강재와 판의 휨강성비와 면적비로서 다음과 같이 정의된다.

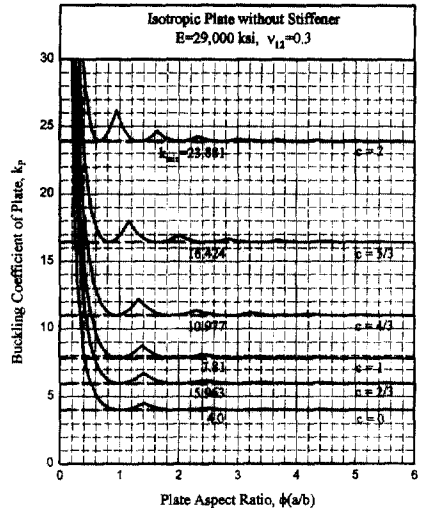
$$\gamma = \frac{E_{11s} I_s}{\sqrt{D_{11}D_{22}} b} \tag{18a}$$

$$\delta = \frac{A_s}{bt} \tag{18b}$$

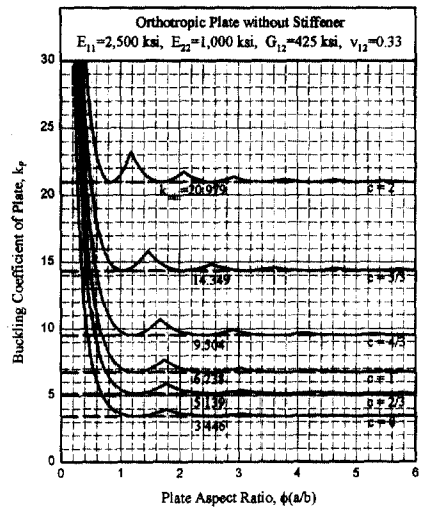
식 (16)은  $m$ 과  $n$ 의 조합에 의해  $A_{mn}$ 에 대한 제차선형연립방정식으로 전개되며  $A_{mn}$ 이 0이 아닌 해를 갖기 위해서는 행렬형태로 나타내었을 때  $A_{mn}$ 의 계수행렬의 행렬값이 0이 되어야 한다<sup>(8)</sup>. 이와 같은 관계로부터 임의의  $m$ 에 대해 10개의  $n$ 을 택하여  $A_{mn}$ 의 계수행렬의 행렬값을 나타내

면 부록 식 A-1과 같으며 이 식으로부터 수평보강된 직교이방성판의 좌굴계수값을 구할 수 있다.

식 (16)에서  $LS_m$ 을 포함한 항은 보강재와 관계된 항이며 나머지 항은 직교이방성판과 관계된 항이다. 따라서, 보강재의 폭을 0으로 놓으면  $LS_m$ 항이 0이 되므로 보강재가 설치되지 않은 판



(a) 등방성판



(b) 직교이방성판

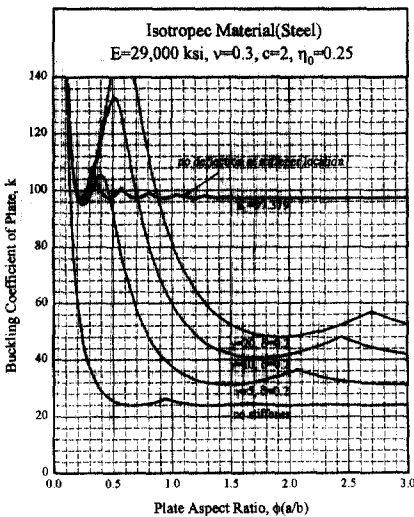
그림 4. 면내 선형분포하중을 받는 판의 좌굴계수

의 면내 선형분포하중에 대한 좌굴계수를 구할 수 있으며 이 값은 보강재가 설치된 판의 좌굴계수의 하한치를 나타낸다.

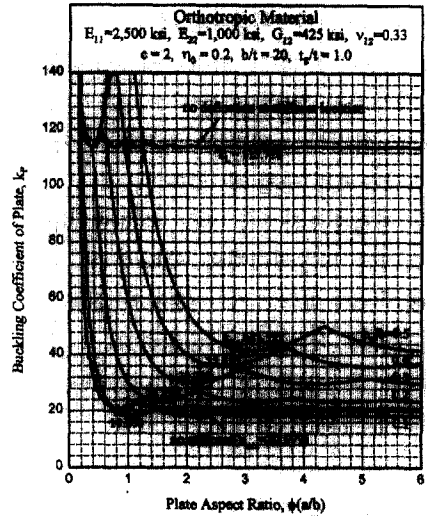
그림 4는 식 (16)에 보강재의 폭을 0으로 놓아 보강재가 설치되지 않은 판의 좌굴해석을 수행한 결과이며,  $c$ 값을 변화시켜가며 판의 형상비에 따른 좌굴계수를 구해 그래프로 나타낸 것이다. 그림 4(a)는 유도된 식에 등방성판의 역학적 성질을 대입하여 해석한 결과이며 기존문헌의 결과와 잘 일치한다<sup>(2,5)</sup>.

그림 5(a)는 유도된 식(부록 A-1)에 등방성 재료(steel)의 역학적 성질을 대입하여 해석한 결과로써 보강재와 판의 휨강성비( $\gamma$ )와 면적비( $\delta$ )를 변화시켜가며 판의 형상비에 따른 좌굴계수를 구하여 그래프로 나타낸 것이다. 이 결과는 기존 문헌의 결과와 잘 일치한다<sup>(6)</sup>.

보강재와 판의 휨강성비와 면적비는 같은 재료를 사용할 경우 보강재와 판의 폭비( $b_s/b$ )와 두께비( $t_s/t$ )로 나타낼 수 있으며, 보강재와 판의 폭비와 두께비로 나타냄으로써 보강재의 치수가 변화하는 것을 좀더 쉽게 알 수 있으므로 직교이방성 재료에 대해서는 보강재와 판의 휨강성비와 면적비를 폭비와 두께비로 표현하여 좌굴해석을 수행



(a) 등방성판



(b) 직교이방성판

그림 5. 면내 선형분포하중을 받는 수평보강된 판의 좌굴계수

하였다.

그림 5(b)는 유도된 식(부록 A-1)에 현재 미국에서 개발하여 사용 중에 있는 직교이방성재료의 역학적 성질<sup>(9)</sup>을 대입하여 해석한 결과이다. 순수휨으로 인한 면내 선형분포하중( $c=2$ )이 작용하며 압축연단으로부터 0.2b인 위치에 보강재가 설치되어 있을 경우에 대해 보강재와 판의 폭비를 0.1에서 0.5까지 변화시켜가며 판의 형상비에 따른 좌굴계수를 구해 그래프로 나타내었다.

그림 5에서  $k_L$ 은 보강재와 판의 접합부에 처짐이 발생하지 않는 경우의 판의 최소좌굴계수로서 수평보강된 직교이방성판의 좌굴계수의 상한치를 나타내며 해석과정은 다음과 같다.

### 3.2 좌굴응력의 상한치

앞에서 언급한 바와 같이 수평보강된 직교이방성판의 좌굴응력의 상한치는 보강재와 판의 접합부에 면외처짐이 발생하지 않는 경우의 좌굴해석을 통해 구할 수 있다(그림 2(b) 참조).

이 경우 보강재와 판의 접합부에 면외처짐이

발생하지 않으므로 판의 좌굴응력과 보강재의 치수와는 무관하게 되며, 면내 선형분포하중을 받는 직교이방성판의 좌굴해석식에 보강재가 설치될 위치에서의 처짐이 0이라는 조건을 추가함으로써 판의 좌굴응력을 구할 수 있다<sup>(3)</sup>.

면내 선형분포하중을 받는 직교이방성판의 내부에 축적된 변형에너지와 외력이 한 일은 각각 앞 절에서 유도한 식 (9), (12)와 같다.

식 (12)에 식 (14)를 대입하고 그 결과로 얻어진 식과 식 (9)를 식 (7)에 대입하여 전체포텐셜에너지를 구하면 식 (19)와 같다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_{mn}^2 \left\{ Q_{mn} - k_p \phi^2 m^2 \left( 1 - \frac{c}{2} \right) \right\} \right. \\ & \left. - A_{mn} k_m \sum_{q=1}^{\infty} A_{mq} \frac{nq}{(n^2 - q^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

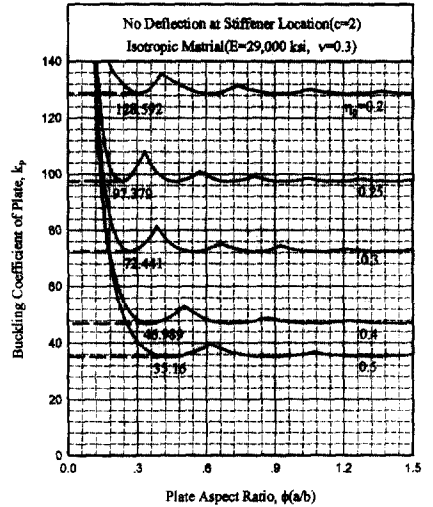
또한, 추가된 조건 ( $w|_{\eta=\eta_0} = 0$ )을 수식으로 나타내면 다음 식 (20)과 같다.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin n\pi\eta_0 = 0 \quad (20)$$

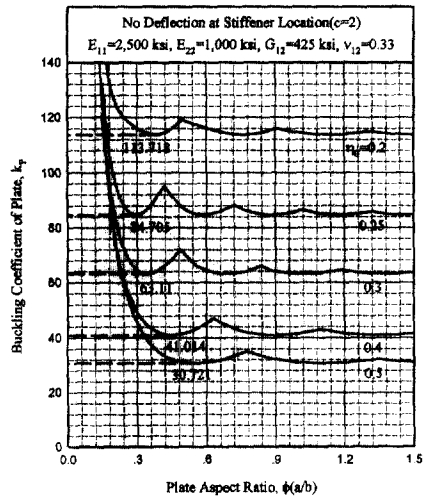
식 (19)에서  $A_{mn}$ 은 전체포텐셜에너지가 최소가 되도록 결정되어야 하며 동시에 식 (20)을 만족해야 한다. 따라서, 식 (19)와 (20)을  $A_{mn}$ 에 대해 최소화 한 후 Lagrangian multiplier법을 적용하여 두 조건을 동시에 만족하도록 하나의 식으로 간단히 나타내면 다음 식 (21)과 같다<sup>(10)</sup>.

$$\begin{aligned} & A_{mn} \left\{ Q_{mn} - k_p \phi^2 m^2 \left( 1 - \frac{c}{2} \right) \right\} \\ & - k_m \sum_{q=1}^{\infty} A_{mq} \frac{nq}{(n^2 - q^2)^2} + \lambda \sin n\pi\eta_0 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)에서  $\lambda$ 는 Lagrangian multiplier로



(a) 등방성판



(b) 직교이방성판

그림 6. 보강재와 판의 접합부에 처짐이 발생하지 않는 경우 판의 좌굴계수



의 행렬값이 0이 되어야 한다. 이 조건으로부터 임의의  $m$ 에 대해 10개의  $n$ 항을 택하여 계수행렬의 행렬값을 나타내면 부록 식 (A-2)와 같고, 이 식으로부터 보강재와 판의 접합부에 면외처짐이 발생하지 않는 경우의 판의 좌굴계수를 구할 수 있다.

그림 6은 유도된 식(부록 A-2)을 사용하여  $c=2$ 인 경우에 대해 보강재의 위치를 변화시켜가며 판의 형상비에 따른 좌굴계수를 구해 그래프로 나타낸 것으로서 그림 6(a)는 등방성 재료의 역학적 성질을 유도된 식에 대입하여 해석한 결과이며 기존문헌의 결과와 잘 일치한다<sup>(3)</sup>.

그림 6에서 알 수 있듯이 판의 좌굴계수값은 임의의 보강재 위치에 대해 판의 형상비와 관계없이 일정한 최소값을 갖는다.

따라서, 수평보강된 판의 좌굴계수의 상한치는 보강재와 판의 접합부에 면외처짐이 발생하지 않는 경우의 최소좌굴계수로 정의할 수 있으며, 이 값을 좌굴능력식에 대입함으로써 수평보강된 판의 좌굴능력의 상한치를 구할 수 있다.

그림 7은 유도된 식(부록 A-2)을 사용하여  $c$ 를 2부터 2/3까지 1/3씩 변화시켜가며 수평보강

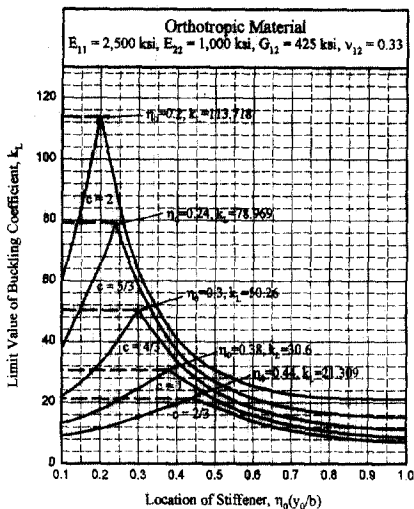


그림 7. 보강재의 위치에 따른 직교이방성판의 좌굴계수의 상한치

된 직교이방성판의 보강재의 위치에 따른 좌굴계수의 상한치를 구해 그래프로 나타낸 것이다.

#### 4. 수평보강된 직교이방성판의 좌굴능력에 영향을 미치는 인자

앞 절에서 유도된 식 (16)에서 알 수 있듯이 보강재가 설치된 직교이방성판의 좌굴능력에 영향을 미치는 인자는 보강재와 판의 역학적 성질, 기하학적 치수, 보강재의 설치 위치 등을 들 수 있다. 일반적으로 보강재는 판과 같은 재료를 사용하므로 본 연구에서는 재료의 역학적 성질은 같다고 간주하였으며, 보강재와 판의 기하학적 치수와 보강재의 설치 위치가 판의 좌굴능력에 미치는 영향에 대해 조사하였다.

##### 4.1 보강재와 판의 기하학적 치수

일반적으로 보강재의 치수는 주어진 판의 치수에 따라 판의 좌굴에 대해 최대의 보강효과를 갖도록 결정되므로 보강재와 판의 기하학적 치수는 보강재의 폭의 변화와 두께의 변화를 뜻한다.

보강재의 폭과 두께가 증가하면 보강재의 휨강성이 증가하게 되며 결과적으로 보강재가 설치된 판의 전체 변형에너지가 증가하게 되어 판의 좌굴능력을 증가시키게 된다. 그러나, 보강재의 두께의 증가에 의한 변형에너지의 증가는 폭의 증가에 의한 변형에너지의 증가에 비해 매우 작으므로 보강재의 두께 변화가 판의 좌굴능력에 미치는 영향은 보강재의 폭의 변화에 의한 영향에 비해 매우 작다.

따라서, 본 연구에서는 보강재의 두께는 판과 같다고 가정하고 보강재의 폭의 변화가 좌굴능력에 미치는 영향을 조사하였다.

그림 8은 유도된 좌굴해석식(부록 A-1)에 직교이방성 재료의 역학적 성질을 대입하여  $c$ 를 2부터 2/3까지 1/3씩 변화시켜가며 각 하중분포에 대해 좌굴해석을 수행한 결과이다. 보강재와

판의 폭비를 0.1에서 0.5까지 변화시켜가며 판의 임의의 형상비에 대해 수평보강된 판의 좌굴계수( $k_p$ )와 보강재가 설치되지 않은 판의 최소좌굴계수( $k_{nsp}$ )의 비를 구해 그래프로 나타낸 것이다. 그림 8의 각 그래프에서 세로축은 보강재가 설치되지 않은 판의 최소좌굴계수와 보강재가 설치된 판의 좌굴계수의 비( $k_p/k_{nsp}$ )를 나타내며 가로축은 보강재와 판의 폭비( $b_s/b$ )를 나타낸다.

그림 8에서 판의 임의의 형상비에 대해 보강재와 판의 폭비가 증가함에 따라  $k_p/k_{nsp}$  값이 증가하다가 일정한 값에 수렴하게 되며, 이 때의  $k_p/k_{nsp}$  값은 수평보강된 판의 좌굴계수의 상한치와 보강재가 설치되지 않은 판의 최소좌굴계수값의 비( $k_L/k_{nsp}$ )에 근접한 값을 나타낸다. 따라서 보강재의 폭이 증가함에 따라 보강된 판의 좌굴계수의 값은 좌굴계수의 상한치에 수렴해 감을 알 수 있다.

#### 4.2 보강재의 설치 위치

보강재의 설치 위치가 판의 좌굴계수에 미치는 영향을 조사하기 위하여 판의 형상비와 보강재와 판의 폭비를 고정시키고 보강재의 위치를 변화시켜가며 좌굴해석을 수행하였다.

그림 9는 유도된 좌굴해석식(부록 A-1)에 직교이방성 재료의 역학적 성질을 대입하여  $c$ 를 2부터 2/3까지 1/3씩 변화시켜가며 해석한 결과이며, 각 경우에 대해 보강재와 판의 폭비를 증가시켜가며 보강재의 위치에 따른 판의 좌굴계수를

구하여 그래프로 나타낸 것이다.

이 그래프로부터 판의 좌굴계수가 최대가 되는 보강재의 위치는 보강재와 판의 폭비가 증가함에 따라 일정한 위치로 수렴해감을 알 수 있다.

앞 절에서 설명한 바와 같이 보강재의 폭이 증가함에 따라 수평보강된 판의 좌굴계수는 좌굴계수의 상한치에 근접한 값을 나타낸다. 또한 좌굴계수의 상한치는 보강재의 위치에 따라 그림 7과 같은 값을 갖는다. 따라서 보강재의 폭이 증가함에 따라 수평보강된 판의 좌굴계수가 최대가 되는 보강재의 위치는 좌굴계수의 상한치가 최대가 되는 보강재의 위치로 수렴해야 한다.

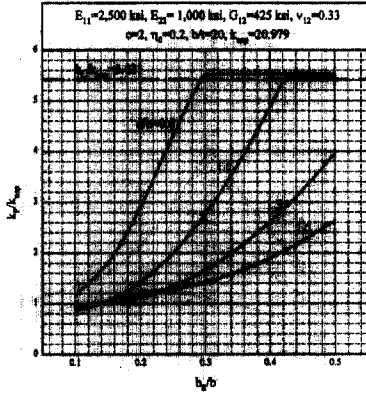
표 1은 보강재와 판의 접합부에 면외처짐이 발생할 경우의 좌굴해석을 통해 보강재와 판의 폭비가 증가함에 따라 판의 좌굴계수가 최대가 되는 보강재의 위치와 판의 좌굴계수의 상한치가 최대가 되는 보강재의 위치를 비교하여 나타낸 것으로 두 결과가 일치함을 알 수 있다.

#### 5. 결 론

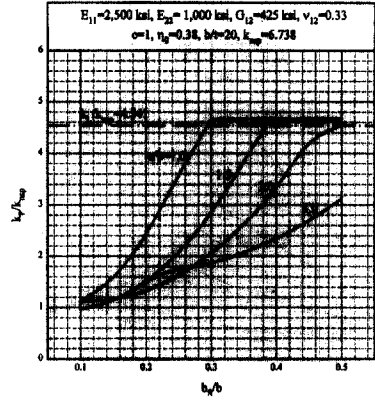
본 연구에서는 보강재를 보로 간주하여 네 변이 단순지지된 면내 선형분포하중을 받는 직교이방성판의 좌굴해석식을 Rayleigh-Ritz법을 사용하여 유도하였다. 또한 보강재와 판의 접합부에 면외처짐이 발생하지 않는 경우에 대해 Lagrangian multiplier법을 적용하여 좌굴해석을 수행하였으며, 보강재의 위치에 따른 수평보강된 직교이방성판의 좌굴계수의 상한치를 구하여

표 1. 판의 좌굴계수가 최대값을 갖는 보강재의 위치

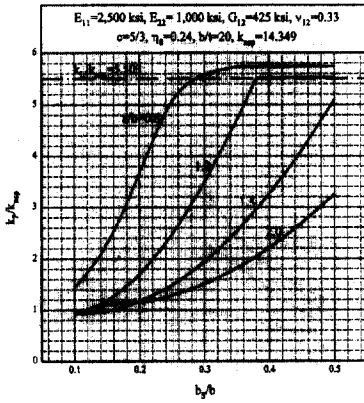
$c$	보강재와 판의 폭비가 증가함에 따라 판의 좌굴계수가 최대가 되는 보강재의 위치(그림 8)	판의 좌굴계수의 상한치가 최대가 되는 보강재의 위치(그림 7)
2/3	0.44b	0.44b
1	0.38b	0.38b
4/3	0.3b	0.3b
5/3	0.24b	0.24b
2	0.2b	0.2b



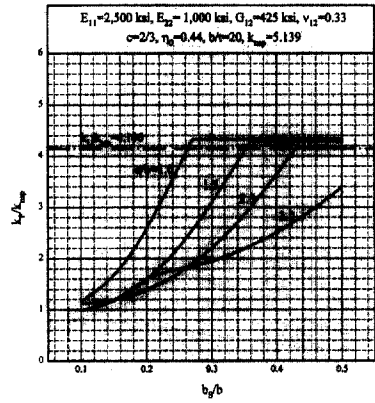
(a)  $c=2$



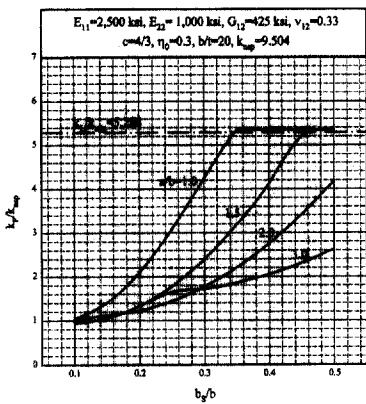
(d)  $c=1$



(b)  $c=5/3$

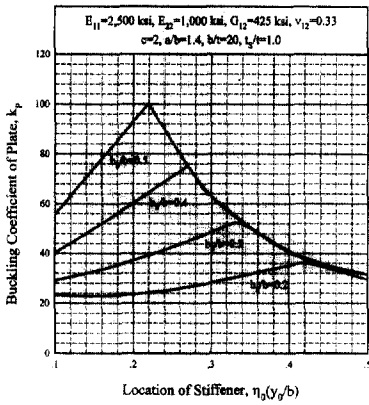


(e)  $c=2/3$

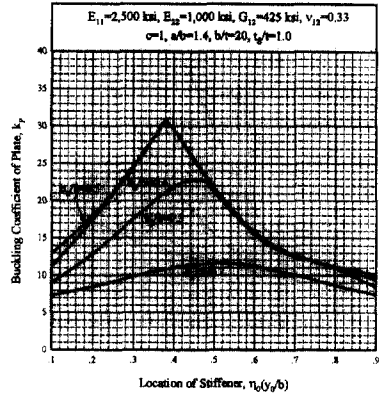


(c)  $c=4/3$

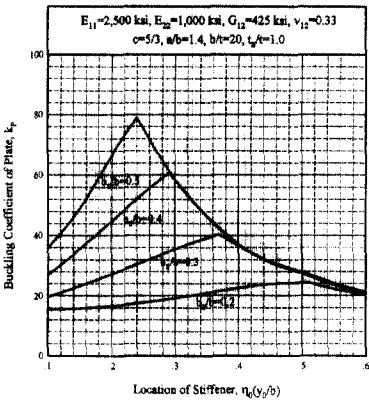
그림 8. 보강재와 판의 폭비 변화에 따른 좌굴계수의 비



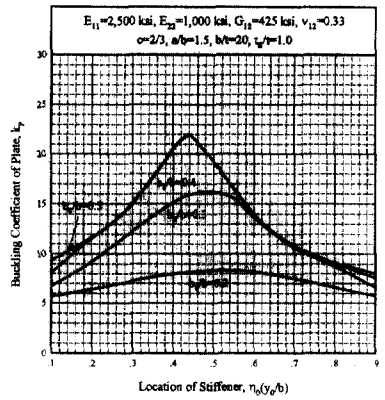
(a)  $c=2$



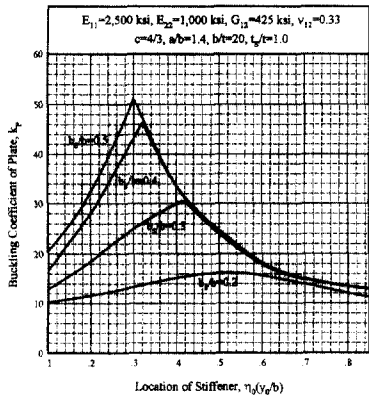
(d)  $c=1$



(b)  $c=5/3$



(e)  $c=2/3$



(c)  $c=4/3$

그림 9. 보강재의 설치 위치에 따른 판의 좌굴계수

그래프로 제시하였다.

유도된 좌굴해석식(부록 A-1)에 등방성 재료의 역학적 성질을 대입하여 보강재와 판의 휨강성비와 면적비를 변화시켜가며 판의 형상비에 따른 좌굴계수를 구한 결과 기존문헌의 결과와 잘 일치하였다(그림 5참조).

직교이방성 재료의 역학적 성질을 유도된 식(부록 A-1)에 대입하여 다양한 면내 선형분포하중에 대해 보강재와 판의 폭비를 변화시켜가며 좌굴해석을 수행한 결과 판의 좌굴계수값은 보강재와 판의 폭비가 증가함에 따라 좌굴계수의 상한치에 수렴해감을 알 수 있었다(그림 8참조).

또한 임의의 보강재와 판의 폭비에 대해 보강재의 설치 위치를 변화시켜가며 좌굴해석을 수행한 결과 보강재와 판의 폭비가 증가함에 따라 판의 좌굴계수가 최대가 되는 보강재의 위치는 판의 좌굴계수의 상한치가 최대가 되는 위치로 수렴해감을 알 수 있었다(표 1참조).

이러한 결과로부터 면내 선형분포하중을 받는 수평보강된 직교이방성판의 좌굴강도를 증가시키기 위한 효과적인 보강재의 설치 위치는 판의 좌굴계수의 상한치가 최대가 되는 위치라고 할 수 있다.

본 연구에서는 판의 네 변이 모두 단순지지인 경우에 대해 수평보강된 직교이방성판의 좌굴해석을 수행하였으나 하중이 재하되지 않은 변의 경계조건이 고정지지인 경우의 좌굴해석이 향후 수행되어야 할 것이다. 또한 이와 같은 연구결과가 실제 설계에 적용되기 위해서는 실험적 연구를 통한 이론식의 적용성이 검토되어야 한다고 판단된다.

## 참 고 문 헌

(1) Bleich, F., 1952, Buckling strength of metal structures, McGraw-Hill, New York.

- (2) Galambos, T. V., 1988, Guide to stability design criteria for metal structures, 4th ed., John Wily & Sons Inc., New York.
- (3) Rockey, K. C. and Leggett, D. M. A., 1962, "The buckling of a plate girder web under pure bending when reinforced by a single longitudinal stiffener," Proceedings of Institution of Civil Engineers, Vol. 21, pp.161-188.
- (4) Lekhnitskii, S. G., 1984, Anisotropic plates, S. W. Tsai and T. Cheron (Trans.), Gordon and Breach, 2nd printing, New York.
- (5) Bulson, P. S., 1969, The stability of flat plates, American Elsevier Publishing Company Inc., New York.
- (6) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., 1961, Theory of elastic stability, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.
- (7) Chajes, A., 1974, Principles of structural stability theory, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.
- (8) Horn, F. E., 1973, Elementary matrix algebra, 3rd ed., The Macmillan Company, New York, Collier-Macmillan Publishers, London.
- (9) MMFG, 1989, Extren fiberglass structural shape design manual, Morrison Molded Fiberglass Company, Bristol, Virginia.
- (10) Budiansky, B., and Hu, P. C., 1946, "The lagrangian multiplier method of finding upper and lower limits to critical stresses of clamped plates," NACA, TN 848.
- (11) Kim, D. H., 1996, "Elastic buckling analysis of orthotropic plate with an intermediate stiffener," Proceedings of the Korean Society of Steel Construction, KSSC, pp. 169-172.

(접수일자 : 1998년 6월 7일)

부 록

$$\begin{vmatrix}
 B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} & B_{17} & B_{18} & B_{19} & B_{110} \\
 B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} & B_{27} & B_{28} & B_{29} & B_{210} \\
 B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} & B_{37} & B_{38} & B_{39} & B_{310} \\
 B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & B_{45} & B_{46} & B_{47} & B_{48} & B_{49} & B_{410} \\
 B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} & B_{55} & B_{56} & B_{57} & B_{58} & B_{59} & B_{510} \\
 B_{61} & B_{62} & B_{63} & B_{64} & B_{65} & B_{66} & B_{67} & B_{68} & B_{69} & B_{610} \\
 B_{71} & B_{72} & B_{73} & B_{74} & B_{75} & B_{76} & B_{77} & B_{78} & B_{79} & B_{710} \\
 B_{81} & B_{82} & B_{83} & B_{84} & B_{85} & B_{86} & B_{87} & B_{88} & B_{89} & B_{810} \\
 B_{91} & B_{92} & B_{93} & B_{94} & B_{95} & B_{96} & B_{97} & B_{98} & B_{99} & B_{910} \\
 B_{101} & B_{102} & B_{103} & B_{104} & B_{105} & B_{106} & B_{107} & B_{108} & B_{109} & B_{1010}
 \end{vmatrix} = 0 \quad (A-1)$$

$$B_{ij} = Q_{mi} - k\phi^2 m^2 \delta \left(1 - \frac{c}{2}\right) + LS_m \sin^2 i\pi\eta_0 \quad ; i=j$$

$$B_{ij} = LS_m \sin i\pi\eta_0 \sin j\pi\eta_0 \quad ; i \neq j, i+j=\text{even}$$

$$B_{ij} = -k_m \frac{ij}{(i^2 - j^2)^2} + LS_m \sin i\pi\eta_0 \sin j\pi\eta_0 \quad ; i \neq j, i+j=\text{odd}$$

$$\begin{vmatrix}
 N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} & N_{15} & N_{16} & N_{17} & N_{18} & N_{19} & S_1 \\
 N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} & N_{25} & N_{26} & N_{27} & N_{28} & N_{29} & S_2 \\
 N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} & N_{35} & N_{36} & N_{37} & N_{38} & N_{39} & S_3 \\
 N_{41} & N_{42} & N_{43} & N_{44} & N_{45} & N_{46} & N_{47} & N_{48} & N_{49} & S_4 \\
 N_{51} & N_{52} & N_{53} & N_{54} & N_{55} & N_{56} & N_{57} & N_{58} & N_{59} & S_5 \\
 N_{61} & N_{62} & N_{63} & N_{64} & N_{65} & N_{66} & N_{67} & N_{68} & N_{69} & S_6 \\
 N_{71} & N_{72} & N_{73} & N_{74} & N_{75} & N_{76} & N_{77} & N_{78} & N_{79} & S_7 \\
 N_{81} & N_{82} & N_{83} & N_{84} & N_{85} & N_{86} & N_{87} & N_{88} & N_{89} & S_8 \\
 N_{91} & N_{92} & N_{93} & N_{94} & N_{95} & N_{96} & N_{97} & N_{98} & N_{99} & S_9 \\
 S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 & N_{1010}
 \end{vmatrix} = 0 \quad (A-2)$$

$$N_{ii} = Q_{mi} - k\phi^2 m^2 \delta \left(1 - \frac{c}{2}\right) \quad ; i=j,$$

$$N_{ij} = -k_m \frac{ij}{(i^2 - j^2)^2} \quad ; i \neq j, i+j=\text{odd}$$

$$N_{ij} = 0 \quad ; i \neq j, i+j=\text{even}$$

$$S_i = \sin i\pi\eta_0$$

Unit Conversion

$$1 k_{si} = 6.89 \text{ MPa}$$