

# 비등방성 복합 적층판의 임계좌굴하중 및 모드의 수치 해석

## Numerical Analyses of Critical Buckling Loads and Modes of Anisotropic Laminated Composite Plates

이 상 열<sup>1)</sup> · 임 성 순<sup>2)</sup> · 장 석 윤<sup>3)</sup>

Lee, Sang Youl Yhim, Sung Soon Chang, Suk Yoon

요 약 : 1차전단변형 판이론에 의한 비등방성 복합적층판의 임계좌굴하중 및 좌굴모드는 기존의 해석적인 방법으로는 다양한 조건에 대하여 해를 제공할 수 없다는 단점을 가지고 있다. 따라서 근사해법인 수치해석을 이용하게 되는데, 이러한 수치해석기법으로 기존 상용프로그램에서는 유한요소법이 널리 사용되었다. 그러나 least upper bound 특성을 가지고 있는 유한요소법을 이용한 적층판의 좌굴해는 구조적인 안정성을 보장하지 못하는 경우도 있다. 따라서 본 논문에서는 유한차분법에 의한 좌굴해석을 수행하여 유한요소법과 상호·비교함으로써 각 경우에 관한 두 가지 수치해석기법의 장단점을 규명하고 효과적으로 적용할 수 있는 기법을 제시하는 것을 목적으로 하였다. 수치해석 결과, 유한차분법에 의한 좌굴하중 및 좌굴모드는 신소재를 사용하는 적층 구조물의 실용화에 앞서 다양한 기준을 제시할 수 있을 것으로 판단된다.

ABSTRACT : The solution of anisotropic plate via the classical methods is limited to relatively load and boundary conditions. If these conditions are more complex, the analysis becomes increasingly tedious and even impossible. For many plate problems of considerable practical interest, analytic solutions to the governing differential equations cannot be found. Among the numerical techniques presently available, the finite difference method and the finite element method are powerful numerical methods. The objective of this paper is to compare with each numerical methods for the buckling load and modes of anisotropic composite laminated plates considering shear deformation. In applying numerical methods to solve differential equations of anisotropic plates, this study uses the finite difference method and the finite element method. In determining the eigenvalue by Finite Difference Method, this paper represent good convergence compared with Finite Element Method. Several numerical examples and buckling modes show the effectiveness of various numerical methods and they will give a guides in deciding minimum buckling load and various mode shapes.

핵심용어 : 1차전단변형판이론, 적층판, 유한차분법, 유한요소법, 임계좌굴하중, 좌굴모드  
KEYWORDS : first deformation plate theory, numerical techniques, buckling load, modes

1) 서울시립대학교 토목공학과 박사과정  
2) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 교수  
3) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 교수

본 논문에 대한 토의를 1999년 3월 31일까지 학회로 보내  
주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

복합재료로 이루어진 적층판은 두가지 이상의 재료를 조합하여 적층시킴으로서 자중을 경감시키는 역할을 함과 동시에 큰 강도를 발휘할 수 있도록 한 것으로 토목구조물의 적용성에 있어서 우수한 역학적 특성을 가지고 있다. 아직까지 국내에서는 여러 여건상 이러한 첨단소재를 이용한 복합 적층판의 실용화는 이루어지지 않고 있으나 외국의 경우는 활발한 실험 및 연구가 진행되고 있어서 국내에서도 머지 않아 실용화될 것으로 기대된다.

본 논문에서 해석하고자 하는 일차전단변형효과를 고려한 복합적층판의 임계좌굴하중은 기존의 해석적인 방법으로는 다양한 하중조건 및 경계조건에 대하여 좌굴해를 제공할 수 없다는 단점을 포함하고 있다. 따라서, 근사해석인 수치해석방법을 이용하는 것이 효과적이다. 이러한 수치해석기법으로 본 논문에서는 유한차분법을 사용하였다. 유한차분법은 수학적인 근사기법을 사용하여 판의 평형방정식의 미분항을 이산화한 점으로 근사시킴으로서 비교적 편리한 방법으로 판의 탄성강성행렬과 기하학적 강성행렬을 구성할 수 있다.

기존의 문헌(3,4,7,8)이나 상용프로그램(ABAQUS, ANSYS 등)은 Least Upper Bound 특성을 갖는 유한요소법에 의한 근사해가 대부분이며 이러한 유한요소법은 전반적으로 훌륭한 좌굴해를 제공하지만 경우에 따라 구조적 안정성을 보장하지 않는 경우도 있다. 반면에 Largest Lower Bound 값을 갖는 유한차분법에 의한 해는 판의 평형방정식을 그대로 근사화시키므로 경우에 따라 보다 안정적인 좌굴하중을 가질 수 있다. 따라서, 본 논문에서는 적층판의 적층개수, 전단효과를 좌우하는 판-두께비, 적층각도, 탄성계수비, 길이비 등의 변화에 따른 임계좌굴하중의 산정을 유한차분법을 중심으로 해석하고 이를 유한요소법과 비교, 분석하여 각 방법의 효과적인 적용성을 규명하는 것을 목적으로 하였다.

## 2. 기본 이론

1차 전단변형 이론에 따른 변위는 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다. 여기서,  $(u_1, u_2, u_3)$ 는 적층면의 임의의 한 점  $(x, y, z)$ 에서의 변위를 나타내고  $(u, v, w)$ 은 중간평면  $(x, y, 0)$ 에서의 한 점의 변위를 나타내며  $(\phi_1, \phi_2)$ 는  $(y, x)$ 축으로부터의 회전각을 의미한다.

$$u_1(x, y, z) = u(x, y) + z\phi_1(x, y).$$

$$u_2(x, y, z) = v(x, y) + z\phi_2(x, y)$$

$$u_3(x, y, z) = w(x, y) \quad (1)$$

그림 1은 적층판의 임의의 한 층에서의 구조축과 재료축을 나타낸 것이다. 그림에서  $\theta$ 는 판의 구조축과 화이버가 가지는 재료축사이의 각도로서 화이버의 보강각도를 의미한다. 이러한 화이버의 보강각도를 일방향으로 하거나 서로 다른 방향으로 바꾸어 여러층으로 적층시킴으로서 원하는 높은 강도의 적층판을 얻을 수 있게 된다.

식 (2)은 일반화된 판의 평형방정식을 나타낸 것이다<sup>(3)</sup>. 여기서,  $N(w)$ 는 면내력을,  $(N_i, M_i)$ 은 힘과 모멘트의 잉여력(resultants)를,  $Q_i$ 는 수직 전단력이다.

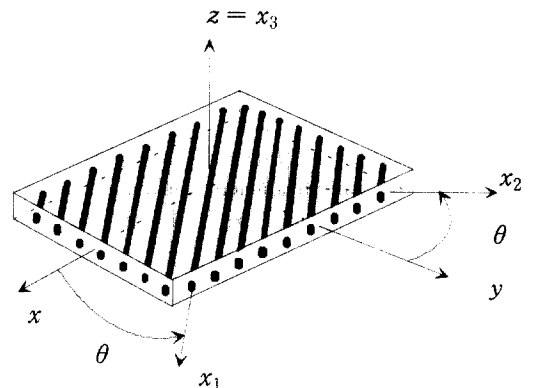


그림 1. 임의의 한 층에 대한 판 요소의 구조축과 재료축과의 관계

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + N(w) &= 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_6}{\partial y} - Q_1 &= 0 \\ \frac{\partial M_6}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - Q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

한편, 적층판에서의 힘과 모멘트 ( $N_i, M_i$ )와 변형률과의 관계는 식 (3)와 같다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_i \\ M_i \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \sigma_i^{(k)} dz \\ &= \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_j \\ \chi_j \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

(i,j=1,2,6)

여기서,

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (1, z, z^2) C_{ij}^{(k)} dz \\ (i,j=1,2,6) \end{aligned}$$

이고, 이것은 각각 면내력강도(Extensional Stiffness), 휨-면내력 연계강도(Coupling Stiffness), 휨강도(Bending Stiffness)를 의미한다.

또한,  $\sigma_i^{(k)}$ 는 k번째 층에서의 각각의 응력 성분을 나타내고,  $C_{ij}^{(k)}$ 는 k번째 층에서의 강성계수를 나타낸다. 한편, 전단력  $Q_i$ 은 식 (4)와 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_5 \\ \sigma_4 \end{pmatrix} dz = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_5 \\ \epsilon_4 \end{pmatrix} \quad (4)$$

여기서,

$$A_{ij} = K_{ij} \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} dz \quad (i,j=4,5)$$

이고, 여기서,  $K_{ij}$ 는 전단보정계수를,  $Q_{ij}^{(k)}$ 는 적층요소에서 구조축에서의 재료의 강성을 나타낸다.

평형방정식은 앞에서 구한 식(3)과 (4)를 식(2)에 대입함으로써 5개의 변위( $u, v, w, \phi_1, \phi_2$ )의 형태로 표현이 가능하다. 식으로 전개하면 다음과 같다.

• U :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{16} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right. \\ \left. + B_{12} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + B_{16} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ \left. A_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{16} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \right. \\ \left. B_{66} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

• V :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{16} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right. \\ \left. + B_{26} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ \left. A_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{26} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{12} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \right. \\ \left. B_{26} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

• W :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_{45} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_2 \right) + A_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_1 \right) \right] + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_2 \right) + A_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_1 \right) \right] + \\ N(w) + q = 0 \end{aligned}$$

•  $\phi_1$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{16} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right. \\ \left. + D_{12} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + D_{16} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ \left. B_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{16} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \right. \\ \left. D_{66} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] - \left[ A_{45} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_2 \right) + \right. \\ \left. A_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_1 \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

•  $\phi_2$  :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{16} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right. \\
 & \left. + D_{26} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + D_{66} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\
 & \left. B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{26} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{12} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \right. \\
 & \left. D_{26} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] - \left[ A_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_2 \right) + \right. \\
 & \left. A_{45} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_2 \right) \right] = 0 \tag{5}
 \end{aligned}$$

### 3. 수치해석기법

#### 3.1 유한차분법

본 논문에서 중점을 두고 있는 유한차분법은 비등방성 복합적층판의 복잡한 지배방정식을 해결할 수 있는 편리한 방법 중 하나이며 높은 수렴성을 가지고 있다. 유한차분법은 알고자하는 점에서의 함수값을 인접한 점들의 지지값을 이용하여 얻을 수 있다<sup>(5,6)</sup>. 판 임의의 한점에서의 유한차분식은 5개의 평행 연립방정식에 대하여 각각 5개의 차분 행렬로 나타낼 수 있다. 식 (6)은 하나의 자유도 절점에 해당하는 차분식을 간단하게 표시한 것이다. 식 (6)에서 하나의 값은 하나의 자유도를 대표하며 각각 5개의 자유도를 포함하고 있다.

$$[K_p]_S = \begin{bmatrix} u & v & w & \phi_1 & \phi_2 \\ A_k u^d & A_j v^d & 0 & B_k \phi_1^d & B_j \phi_2^d \\ A_m u^d & A_n v^d & 0 & B_m \phi_1^d & B_n \phi_2^d \\ 0 & 0 & A_v w^d & A_{v1} \phi_1^d & A_{v2} \phi_2^d \\ B_k u^d & B_j v^d & -A_{v2} w^d & -A_{35} \phi_1^d + D_{k1} \phi_1^d + D_j \phi_2^d & -A_{45} \phi_2^d + D_j \phi_2^d \\ B_m u^d & B_n v^d & -A_{v1} w^d & -A_{45} \phi_1^d + D_m \phi_1^d & -A_{44} \phi_2^d + D_n \phi_2^d \end{bmatrix} \tag{6}$$

여기서 A, B, D는 각각 적층된 판의 강도를

의미하고, (<sup>d</sup>)은 각각의 자유도에 대한 중앙 차분을 의미한다<sup>(6)</sup>.  $[K_p]_S$ 는 각 자유도 절점에서의 국부강성행렬을 나타낸다.  $L^2$ 의 오차를 사용하는 경우 하나의 자유도에 대한 차분행렬의 개수는 15개(3×5)가 된다. 각각의 차분식은 부록에 수록하였다. 프로그램작업은 구성된 하나의 절점에 대한 차분행렬이 판의 각 절점에 대한 위치행렬에 기억되어 있는 위치값에 의하여 판 전체의 시스템행렬을 구성함으로써 이루어진다. 여기서 수평방향은 column의 위치를, 그리고 수직방향은 판의 방정식의 개수를 의미한다. 그림 2는 4번이 고정 지지된 판에 대한 이러한 전체강성행렬의 구성을 표현한 것이다.

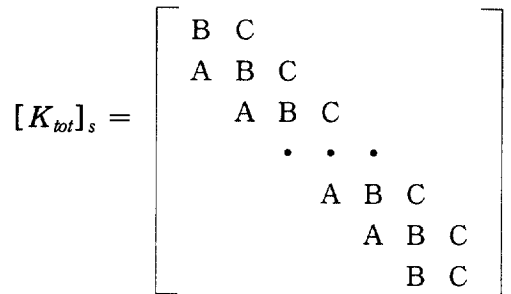


그림 2. 판 전체에 대한 시스템 행렬의 구성

그림 2에서 판 전체의 시스템행렬의 크기는  $\{5 \times (N-2) \times (M-2)\} \times \{5 \times (N-2) \times (M-2)\}$ 이고, A, B, C는 각각 5개의 자유도로 이루어진 판의 하나의 절점에 대한 행렬을 의미하며 5개의 자유도에 대한 차분 정보를 포함하고 있다. 기하학적 행렬의 구성은 면내하중에 해당하는  $N(w)$ 을 차분함으로써 구성할 수 있다.  $N(w)$ 는 조화함수의 형태를 가지고 있으므로 차분하여 강성행렬의 구성과 같은 방법으로 전체 시스템 기하학적 행렬의 구성이 가능하다. 이렇게 구성한 전체 시스템행렬을 이용하여 고유치 문제의 형태로 나타내면 식 (7)과 같다.

$$\det [K_{tot}]_S - \lambda [K_{tot}]_C = 0 \tag{7}$$

여기서,  $[K_{tot}]_S$ 는 전체 시스템 강성 행렬을,  $[K_{tot}]_C$ 는 기하학적 시스템 행렬을 의미하며, 여기서 구하는 고유치  $\lambda$ 는 최소 임계 좌굴 하중을 의미한다. 유한차분법으로 구성되는 강성행렬 및 기하학적 행렬은 비대칭 매트릭스형태를 가지게 된다. 이러한 비대칭 행렬의 고유치를 구하는 수치방법으로 본 논문에서는 IMSL의 Householder 방법을 사용하였다. Householder 방법은 공학적인 고유치 문제에 널리 사용되고 있는 효과적인 방법이다.

이 방법은  $[K]_S$ 를 삼각대각선(tridiagonal) 형태로 축약하여 반복적 역행렬 계산으로 tridiagonal 매트릭스의 고유벡터(eigenvectors)를 계산하게 된다. 이 벡터를 우리가 구하고자 하는  $[K]_S$ 의 고유벡터로 변환하여 최소 임계 좌굴 하중을 계산하게 된다<sup>(9)</sup>.

### 3.2 유한요소법

본 논문에서는 사용한 유한요소법은 유한차분법과 비교, 검증하기 위한 일반적인 것으로 기존의 문헌(3)에서 다루어지고 있는 Lagrange Interpolation 함수를 사용하여 5개의 독립변수 ( $u, v, w, \phi_1, \phi_2$ )에 대한 형상을 가정하는 방법을 사용하였다. 식으로 간단하게 표현하면 식(8)과 같다.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^5 u_j \psi_j(x, y), \quad v = \sum_{j=1}^5 v_j \psi_j(x, y) \\ w &= \sum_{j=1}^5 w_j \psi_j(x, y), \quad \phi_1 = \sum_{j=1}^5 S^1_j \psi_j(x, y) \\ \phi_2 &= \sum_{j=1}^5 S^2_j \psi_j(x, y) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,  $\psi_j$ 는 interpolation 함수로 이루어진 Lag range 식들을 의미한다<sup>(7)</sup>. 식 (2)의 weak form으로 식 (8)의 ( $u, v, w, \phi_1, \phi_2$ )을 대입하면 전단변형을 고려한 적층판의 유한요소 모델이 구성된다. 간단하게 표시하면 식 (9)와 같다<sup>(7)</sup>.

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 K^{ab}_{ij} - F^a_i = 0, \quad (a=1,2,\dots,5) \quad (9)$$

식 (9)에 의하여 구성된 행렬을 이용하여 직접 강도 행렬방법에 의하여 전체 시스템 행렬을 구성할 수 있다<sup>(9)</sup>. 유한요소법으로 구성된 강성행렬과 기하학적 행렬은 대칭형태를 가지며 이러한 고유치 문제를 해결하기 위하여 본 연구에서는 Subspace Iteration Method를 이용하여 고유치 문제를 해결하였으며, 일반적으로 초기벡타는 Component Mode Synthesis기법을 사용하고 있으나 본 연구에서는 보다 엄밀한 고유치문제를 해결하기 위해 전체 Space의 기저벡타를 Subspace의 기저벡타로 Mapping하여 형성한 부분공간에서 Jacobi 방법으로 고유치문제를 해석하는 기법을 합성하였다.<sup>(7,9)</sup>

## 4. 수치해석결과 및 분석

### 4.1 수치해석 모델

수치해석 모델은 면내하중을 받는 복합 적층판으로서 적층판의 길이는 각각, a, b이고 한 축방향으로, 또는 양 축 방향으로 N이라는 면내하중을 받고 있는 경우이다. 표 1은 본 논문에서 사용하고자 하는 재료의 물성치를 나타낸 것이다. 기존의 연구결과와 비교하기 위하여 기존의 참고문헌에 있는 2가지 재료에 대하여 해석하였으며, 이는 Boron Fiber가 Epoxy Matrix에 재료축 방향으로 묻혀있는 경우에 해당한다. 또한 무차원량으로 상호 비교하기 위하여 식 (10)과 같은 식으로 무차원하여 적용하도록 하였다.

표 1. 해석을 위한 재료의 물성

	탄성계수비	전단탄성계수비(1)	전단탄성계수비(2)	프라이송비
재료1	40 : 1	1 : 0.6	1 : 0.5	0.25
재료2	25 : 1	1 : 0.2	1 : 0.5	0.25

여기서, 탄성계수비는  $E_1 : E_2$ , 전단탄성계수 비(1)를 나타내고,  $G_{12}, G_{13} : E_2$ , 전단탄성계수 비(2)는  $G_{23} : E_2$  를 의미한다.

$$\bar{N} = N_{cr}(a^2/E_2h^3) \quad (10)$$

#### 4.2 적층판의 임계좌굴 하중값의 비교

유한차분법의 임계좌굴하중에 대한 정해와의 수렴성은 49개의 자유도를 갖는 경우 97%이상의 높은 정확도를 가지는 것으로 알려져 있다(1).

유한차분과 유한요소에 의한 해석은 프로그램 작업시 시스템매트릭스를 구성하는 방식이나 고유치 문제를 해결하는 방식에 있어서 많은 차이점을 가지고 있다. 또, 유한차분법은 각 자유도 절점당으로 역학적 성질이 표현되는 데에 비하여 유한요소법은 각 절점이 이루는 요소 당으로 역학적 성질이 표현된다. 본 논문에서는  $\Delta^2$ 의 오차를 갖는 유한차분식과 기존의 Lagrange 함수를 사용하여 하나의 요소가 4개의 노드로 구성되는 유한요소 모델링을 사용하였다. 표 2는 0/90의 2개로 적층된 경우와 0/90/90/0의 4개로 복합 적층된 판에 대하여 폭-두께비를 변화시켰을 때의 임계좌굴하중을 비교한 것이다. 판의 두께가 두꺼울수록 전단에 의한 변형효과로 인하여 임계 좌굴 하중은 두께가 얇은 경우보다 작은 값을 갖는 것으로 나타났다. 이는 전단으로 인하여 판의 강성이 저하되었음을 의미한다. 표 2의 결과에 의하면 유한차분법이 유한요소법보다 다소 작은 좌굴값을 보이는 것을 알 수 있다. 표 3은 보강각도는  $30^\circ$  으로 하고 2개층과 4개층으로 적층시켰을 경우에 대한 적층판의 수렴성을 비교한 것이다. 이러한 경우, 유한차분법이 유한요소법보다 다소 좋은 수렴결과가 나타났다. 그림 3은 이러한 수렴성을 그래프로 나타낸 것이다. 표 4는 본 논문의 유한요소 프로그램을 사용하여 단순지지된 적층판의 결과

를 정해 및 참고문헌(3)과 비교한 것이다. 표 4는 탄성계수의 변화에 따른 비교이며, 1차 전단 변형 효과를 고려하였으므로 전단을 고려하지 않은 고전적인 해(CLPT)보다는 다소 작은 값을 나타냈다. 또한 탄성계수비가 커지면 참고문헌이나 Navier 방법의 좌굴 값보다 약간 작은 임계좌굴 하중값을 나타냈다.

표 2. 폭두께비와 적층수에 따른 적층판의 임계 좌굴하중의비교(자료2)  $\bar{N} = N_{cr}(a^2/E_2h^3)$

No. of Layer	b/h	FDM	FEM
2(0/90)	5	8.5154	8.5676
	10	20.0486	20.5297
	20	28.5807	31.6432
	50	34.2251	38.1009
4(0/90/90/0)	5	9.6136	9.7365
	10	31.9921	32.2847
	20	62.2287	65.1993
	50	84.9054	88.3481

표 3. 적층수와 보강각도에 따른 유한차분과 유한 요소의 무차원 수렴 비교(자료 1)

절점수	FDM (30/30/30/30)	FEM (30/30/30/30)	FDM (30/30)	FEM (30/30)
7	25.9153	27.8579	59.9169	70.5460
9	22.7797	24.6767	45.8744	55.5063
11	21.5777	23.1464	40.1273	48.1922
13	21.0488	22.2981	37.4254	44.0546
15	20.7869	21.7796	36.0432	41.4822
17	20.6438	21.4403	35.2858	39.7740
21	20.5052	21.0376	34.5747	37.7186

그림 4는 유한차분법을 사용하여 225개의 자유도를 가지고 있는 사변이 고정지지된 적층판에 대하여 보강각도와 탄성계수비를 변화시키면서 임계좌굴하중값을 구하여 그림으로 나타낸 것이다. 보강각도는  $0 \sim 60$ 도이며 1방향의 탄성계수는 고정시키고 2방향의 탄성계수를 일정한 비율로 증가시켰을 때의 임계좌굴하중을 구한 결과이다.

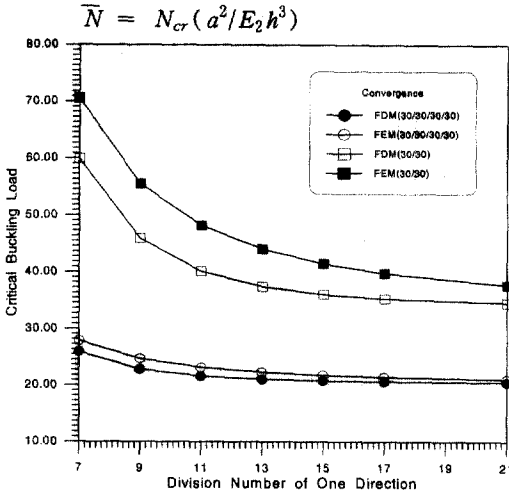


그림 3. 적층수와 보강각도에 따른 유한차분법과 유한요소법의 절점수에 따른 수렴도의 비교

표 4. 유한요소법에 의한 적층판의 임계좌굴하중의 상호 비교 (재료1,  $a/h = 10$ )

$E_1/E_2$	CLPT	present	Navier	Ref[3]
3	5.754	5.429	5.399	5.304
10	11.492	9.809	9.965	9.762
20	19.712	14.817	15.351	15.019
30	27.936	18.802	19.756	19.304
40	36.160	22.080	23.453	22.881

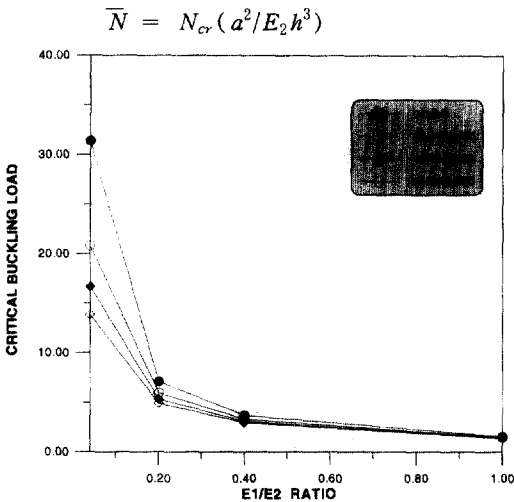


그림 4. 유한차분법을 사용한 탄성계수비와 보강각도에 따른 임계좌굴하중

표 5. 화이버 보강각의 변화에 따른 유한차분법과 유한요소법의 임계좌굴하중 비교(재료1)

보강각도	FDM	FEM
0/0/0/0	31.3384	31.8964
15/15/15/15	26.9951	27.6884
30/30/30/30	20.6438	21.4403
45/45/45/45	16.4816	17.2834
60/60/60/60	13.6401	14.3665
75/75/75/75	12.4328	13.0787
90/90/90/90	12.1299	12.7457

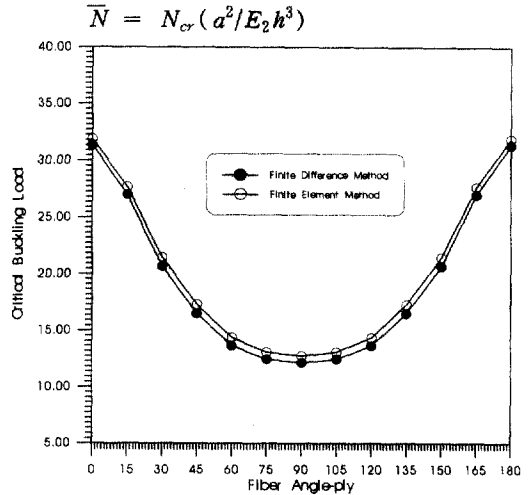


그림 5. 화이버보강각에 따른 FDM과 FEM의 임계좌굴하중 비교 (17×17)

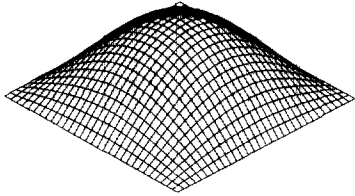
표 5와 그림 5은 0~180까지 보강각도를 달리 하였을 경우에 유한차분법과 유한요소법에 의한 좌굴하중을 비교한 것이다. 표와 그림에서 알 수 있듯이 같은 절점을 갖는 경우 유한차분법에 의한 좌굴하중이 유한요소법에 의한 좌굴하중보다 다소 작은 값을 갖는 것으로 나타났다.

#### 4.3 고유벡터에 의한 적층판의 좌굴모드

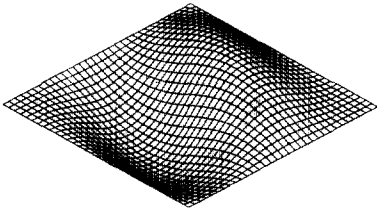
##### 4.3.1 0/90/90/0에 대한 판의 좌굴 모드

적층판의 임계좌굴하중과 함께 좌굴모드는 판의 좌굴형상을 분석하는 데 중요한 의미가 있을 것이다. 그림 6은 단순지지된 경계조건하에서의

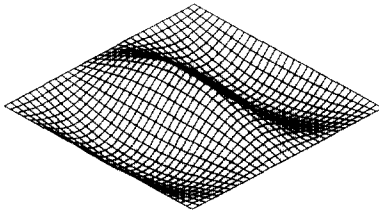
적층판의 보강각 0/90/90/0에서의 고유치에 의한 고유벡터를 구하여 첫 번째부터 네 번째까지의 판 전체의 좌굴형상을 그림으로 표현한 것이다. 여기서 좌굴모드와 함께 구한 임계좌굴하중은 무차원량이다.



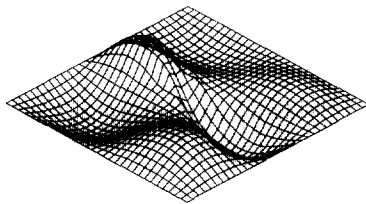
(a)좌굴모드 I 임계좌굴하중 : 17.0368



(b)좌굴모드 II 임계좌굴하중 : 27.1189



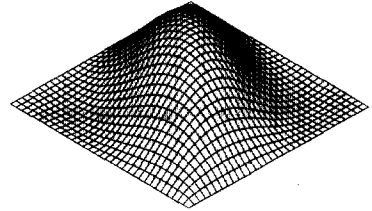
(c)좌굴모드 III 임계좌굴하중 : 32.6415



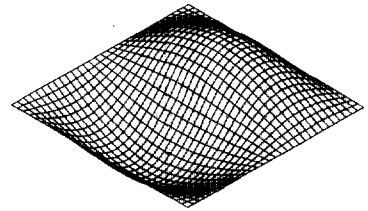
(d)모드 IV 임계좌굴하중 : 38.1717

그림 6. 0/90/90/0에서의 판의 모드별 좌굴 형상

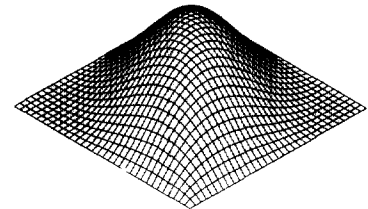
그림 7은 보강 각도를 달리하여 판의 좌굴 형상을 구하였다. 보강 각도는 각각 30/30/30/30, 45/45/45/45, 60/60/60/60으로 하였으며 그림에서 보는 바와 같이 화이버 보강방향으로 좌굴이 발생한다는 사실을 알 수 있다.



(a)좌굴모드 I (재료1, 30/30/30/30)  
임계좌굴하중 : 14.3487



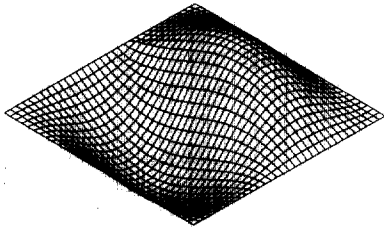
(b)좌굴모드 I (재료1, 45/45/45/45)  
임계좌굴하중 : 12.6372



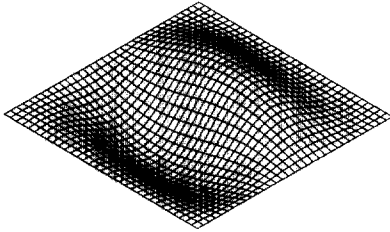
(c)좌굴모드 I (재료1, 60/60/60/60)  
임계좌굴하중 : 10.6845

그림 7. 보강각도의 변화에 따른 적층판의 좌굴 형상 및 임계좌굴하중





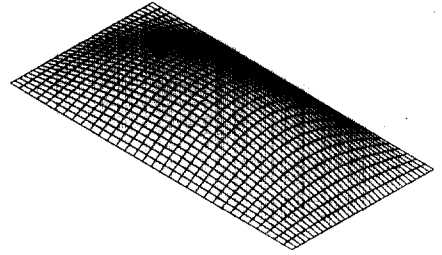
좌굴모드 I (45/-45/-45/45)  
임계 좌굴 하중 : 21.1215  
(a) 4변이 단순지지된 적층판



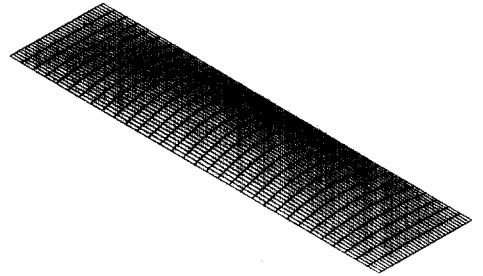
좌굴모드 I (45/-45/-45/45)  
임계 좌굴 하중 : 24.5546  
(b) 4변이 고정지지된 경우

그림 8. 경계조건의 변화에 따른 적층판의 좌굴 모드 및 임계 좌굴 하중

그림 8은 경계조건의 변화에 따른 판의 좌굴형상의 변화를 분석하기 위하여 4변이 고정지지된 경우와 4변이 단순지지된 경우에 대하여 45/-45/-45/45의 보강각도로 비교하여 나타낸 것이다. 고정지지된 경우는 처짐각이 발생하지 않으므로 단순지지된 경우에 비하여 경계면을 중심으로 좌굴모양이 작게 나타나며 임계 좌굴 하중도 다소 크다는 사실을 알 수 있다. 그림 9는 판의 길이비의 변화에 따른 적층판의 좌굴 형상 및 임계좌굴하중에 관한 그림이다. 그림 9는 y방향으로의 길이는 고정시키고 x길이를 일정한 비율로 줄였을 때의 좌굴형상이다.



(a) 좌굴모드 I (재료1, 4변단순지지, 0/90/90/0)  
임계 좌굴 하중 : 6.6699 (x:y=1:2)



(b) 좌굴모드 I (재료1, 4변고정지지, 0/90/90/0)  
임계 좌굴 하중 : 2.3988(x:y=1:4)

그림 9. 적층판의 길이비에 따른 좌굴형상 및 임계 좌굴 하중

## 5. 결 론

본 논문에서는 일차전단변형 판이론을 사용하여 유한차분법에 의한 좌굴해를 분석하고 이와 유한요소법을 이용한 좌굴해를 비교, 분석함으로써 복합적층판의 효율적인 해석방법을 제안하고자 하였다. 수치해석 결과에서 알 수 있듯이 적층판의 임계좌굴하중은 유한차분에 의하여 해석한 결과, 같은 절점을 갖는 경우 화이버의 보강각도, 적층갯수, 탄성계수비 등에 따른 유한차분법에 의한 해가 다소 우수한 수렴성을 갖는 것으로 나타났다. 이는 유한차분법이 갖는 Largest Lower Bound 때문에 다소 안정적인 값을 갖는 것으로 판단된다. 그러나 유한차분법은 자유단을 포함하고 있는 경우 각각의 차분식을 새로이 구성해야 하는 난해함을 가지고 있으며 탄성 강성행렬이 비

대칭 특성을 가지는 단점을 포함하고 있다. 그러나 유한차분법을 유한요소법에 비하여 판의 모델링이 용이하며 동일한 요소를 갖는 경우, 수직전개의 편리함과 높은 수렴성을 가지고 있으므로 비교적 간단한 경계조건을 가진 일반적인 적층판의 경우는 유한차분법이 유리하다고 판단된다. 또한, 1차 전단변형을 고려한 판의 문제와 관련하여 전단에 의한 변형효과로 인하여 판의 두께와 관련된 경우, 그렇지 않은 경우보다 작은 임계좌굴하중을 갖게 되는데, 이것은 전단효과에 의하여 판의 강성이 저하됨에 따라 임계좌굴하중값도 작아짐을 의미한다. 또한 고유벡터로 구성된 적층판의 좌이변보강각도, 길이비 등에 따른 좌굴모드형상은 적층판의 전반적인 좌굴형상을 규명하는 데 도움이 될 것으로 판단된다.

### 참 고 문 헌

- (1) 이상열, 임성순, 장석윤, "수치 해석법을 이용한 보강된 직교 이방성 판의 좌굴 해석" 서 울시립대학교 산업기술연구소 논문집 제5집 (1997), pp 17~24.
- (2) 이병홍, 윤석호, 한성천, "고차전단변형을 고려한 복합 적층판 및 셸 구조의 좌굴해석" 한국구조학회지 9권 제1호(1997), pp 3~11.
- (3) J. N. Reddy, "Mechanics of Laminates Composite Plates" CRC Press, 1997
- (3) N. G. R. Iyengar, "Structural Stability of Columns and Plates " John Wiley & Sons, 1988.
- (5) Kim, J. K., "Stability of Multi-Layered Composite Plates", Fiber Science and Technology, Vol 8, 1975, Pp. 81-89.
- (6) Alexander, A. W. and Tooley, J. R., "Numerical Methods in Engineering Practice,"Holt, Rinehart and Winston, inc., 1986, pp 342-370.
- (6) Szilard, R. , "Theory and Analysis of Plates " Prentice-hall, inc., 1974.
- (7) Dhatt, G. ,and Touzot, G , "The Finite Element Method Displayed," John Wiley & Sons, 1982. pp207-230.
- (8) Walter D. Pilkey Walter Wunderlich, "Mechanics of Structures Variational and Computational Methods",CRC Press, 1994.
- (9) Wiliam H. Saul, "Fortran Recipes in Fortran," Cambridge University Press, 1992.
- (10) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, "Theory of Plates and Shells," 2nd Edition, New York : Mcgraw-Hill, 1959, pp364-425.

(접수일자 : 1998년 7월 6일)

부 록

다음은 강성행렬 및 기하학적 행렬에 대한 유한 차분 행렬을 나타내며 각 행렬의  $i, (i-1 \sim j+1)$ 는  $1/(\Delta x)^2$ ,  $(i-1 \sim i+1)$ ,  $j$ 는  $1/(\Delta y)^2$ . 그 외의 위치에서는  $1/4\Delta x\Delta y$ 를 각각 곱한다.

$$A_k u^d = \begin{matrix} & u_{j-1} & u_j & u_{j+1} \\ u_{i-1} & \begin{bmatrix} -2A_{16} & A_{66} & 2A_{16} \end{bmatrix} \\ u_i & \begin{bmatrix} A_{11} & -2(A_{11} + A_{66}) & A_{11} \end{bmatrix} \\ u_{i+1} & \begin{bmatrix} 2A_{16} & A_{66} & -2A_{16} \end{bmatrix} \end{matrix} v_j$$

$$A_j v^d = \begin{matrix} & v_{j-1} & v_j & v_{j+1} \\ v_{i-1} & \begin{bmatrix} -A_{12} - A_{66} & A_{26} & A_{12} + A_{66} \end{bmatrix} \\ v_i & \begin{bmatrix} A_{16} & -2(A_{16} + A_{26}) & A_{16} \end{bmatrix} \\ v_{i+1} & \begin{bmatrix} A_{12} + A_{66} & A_{26} & -A_{12} - A_{66} \end{bmatrix} \end{matrix} v_{j+1}$$

$$B_m \phi_1^d = \begin{matrix} & \phi_{1j-1} & \phi_{1j} & \phi_{1j+1} \\ \phi_{1i-1} & \begin{bmatrix} -B_{66} - B_{12} & B_{26} & B_{66} + B_{12} \end{bmatrix} \\ \phi_{1i} & \begin{bmatrix} B_{16} & -2(B_{16} + B_{26}) & B_{16} \end{bmatrix} \\ \phi_{1i+1} & \begin{bmatrix} B_{66} + B_{12} & B_{26} & -B_{66} - B_{12} \end{bmatrix} \end{matrix} \phi_{1j+1}$$

$$B_n \phi_2^d = \begin{matrix} & \phi_{2j-1} & \phi_{2j} & \phi_{2j+1} \\ \phi_{2i-1} & \begin{bmatrix} -B_{26} - B_{12} & B_{22} & B_{26} + B_{12} \end{bmatrix} \\ \phi_{2i} & \begin{bmatrix} B_{66} & -2(B_{66} + B_{22}) & B_{66} \end{bmatrix} \\ \phi_{2i+1} & \begin{bmatrix} B_{26} + B_{12} & B_{22} & -B_{26} - B_{12} \end{bmatrix} \end{matrix} \phi_{2j+1}$$

$$A_v w^d = \begin{matrix} & w_{j-1} & w_j & w_{j+1} \\ w_{i-1} & \begin{bmatrix} -2A_{45} & A_{44} & 2A_{45} \end{bmatrix} \\ w_i & \begin{bmatrix} A_{55} & -2(A_{44} + A_{55}) & A_{55} \end{bmatrix} \\ w_{i+1} & \begin{bmatrix} 2A_{45} & A_{44} & -2A_{45} \end{bmatrix} \end{matrix} w_{j+1}$$

$$A_{v1} \phi_1^d = \begin{matrix} & \phi_{1j-1} & \phi_{1j} & \phi_{1j+1} \\ \phi_{1i-1} & \begin{bmatrix} 0 & A_{45} & 0 \end{bmatrix} \\ \phi_{1i} & \begin{bmatrix} A_{55} & -2(A_{45} + A_{55}) & A_{55} \end{bmatrix} \\ \phi_{1i+1} & \begin{bmatrix} 0 & A_{45} & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \phi_{1j+1}$$

$$A_{v2} \phi_1^d = \begin{matrix} & \phi_{2j-1} & \phi_{2j} & \phi_{2j+1} \\ \phi_{2i-1} & \begin{bmatrix} 0 & A_{45} & 0 \end{bmatrix} \\ \phi_{2i} & \begin{bmatrix} A_{55} & -2(A_{45} + A_{55}) & A_{55} \end{bmatrix} \\ \phi_{2i+1} & \begin{bmatrix} 0 & A_{45} & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \phi_{2j+1}$$

$$D_k \phi_1^d = \begin{matrix} & \phi_{1j-1} & \phi_{1j} & \phi_{1j+1} \\ \phi_{1i-1} & \begin{bmatrix} -D_{16} & D_{66} & D_{16} \end{bmatrix} \\ \phi_{1i} & \begin{bmatrix} D_{11} & -2(D_{11} + D_{66}) & D_{11} \end{bmatrix} \\ \phi_{1i+1} & \begin{bmatrix} D_{16} & D_{66} & -D_{16} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[K_{tot}]_G = \begin{matrix} & u & v & w & \phi_1 & \phi_2 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N(W)^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$N(W)^d = \begin{matrix} & w_{j-1} & & w_{j+1} \\ w_{i-1} & \begin{bmatrix} -\lambda_{xy} & w_j \lambda_y & \lambda_{xy} \end{bmatrix} \\ w_i & \begin{bmatrix} \lambda_x & -2(\lambda_x + \lambda_y) & \lambda_x \end{bmatrix} \\ w_{i+1} & \begin{bmatrix} \lambda_{xy} & \lambda_y & -\lambda_{xy} \end{bmatrix} \end{matrix}$$