물리탐사
Vol. 1, No. 2, 1998, p. 127~135

확장된 Born 근사에 의한 시추공간 전자탐사 2.5차원 모델링

조인기[1] · 서정희[2]

Crosshole EM 2.5D Modeling by the Extended Born Approximation

Cho, In Ky and Suh, Jung Hee

요 약 : 전자탐사에서 Born 근사는 이상체내에서의 전기장을 이상체가 없는 균질 매질에서의 일차장으로 대치하는 방법으로 복잡한 전자기 산란(EM scattering)문제를 근사하는데 널리 사용되고 있는 방법이다. 그러나 Born 근사는 이상체의 전도도가 주변 매질에 비하여 너무 크거나, 이상체의 크기가 클 때는 상당히 부정확한 결과를 나타낸다. 확장된 Born 근사법은 이러한 Born근사의 문제점을 해결하기 위하여 제안된 방법으로 이상체내의 전기장을 탈분극 텐서와 일차 전기장의 곱으로 근사하는 방법이다. 한편 전자탐사에 3차원 송신원을 사용하는 2차원 모델링은 주로 유한차분법과 유한요소법이 이용되었다. 일반적으로 이들 미분 방정식을 이용하는 2차원 전자탐사 모델링에서 3차원 송신원 문제의 해결을 위하여 Fourier 변환을 통해 파수영역(wavenumber domain)으로 이동하는 방법이 사용되어 왔다. 또한 파수영역에서 계산된 결과는 Fourier 역변환을 통하여 다시 공간영역(space domain)으로 이동해야 하는 번거로움이 있다. 따라서 이들 방법은 계산시간이 많이 걸리고 이상체가 없는 지역도 미소체로 분할해야 하므로 수치계산시 대량의 기억용량이 필요하다. 본 연구에서는 Born 근사의 문제점 및 전자탐사 2차원 모델링시 3차원 송신원 문제를 해결할 수 있는 확장된 Born 근사법에 근거한 전자탐사 2.5차원 모델링 프로그램을 개발하였다. 이 모델링 프로그램을 이용하여 수직 자기 쌍극자를 송신원으로 하는 시추공간 전자탐사법에 대한 2차 자기장을 계산하고 적분 방정식에 의한 3차원 모델링 결과와 비교, 분석하였다. 모든 주파수 대역에서 확장된 Born 근사에 의한 2.5차원 모델링 결과가 3차원 모델링 결과와 잘 일치하고 있다. 그러나 이상체의 전도도와 모암의 전도도 차이가 10배 이상의 경우일 때는 두 반응은 상당한 차이를 보인다. 따라서 본 연구에서 개발된 확장된 Born 근사에 의한 2.5차원 모델링은 이상체와 모암의 전도도 차이가 너무 크지 않을 경우 이상체의 위치 및 형상을 파악하는데 효과적일 것으로 기대된다.

Abstract : The Born approximation is widely used for solving the complex scattering problems in electromagnetics. Approximating total internal electric field by the background field is reasonable for small material contrasts as long as scatterer is not too large and the frequency is not too high. However in many geophysical applications, moderate and high conductivity contrasts cause both real and imaginary part of internal electric field to differ greatly from background. In the extended Born approximation, which can improve the accuracy of Born approximation dramatically, the total electric field in the integral over the scattering volume is approximated by the background electric field projected to a depolarization tensor. The finite difference and elements methods are usually used in EM scattering problems with a 2D model and a 3D source, due to their capability for simulating complex subsurface conductivity distributions. The price paid for a 3D source is that many wavenumber domain solutions and their inverse Fourier transform must be computed. In these differential equation methods, all the area including homogeneous region should be discretized, which increases the number of nodes and matrix size. Therefore, the differential equation methods need a lot of computing time and large memory. In this study, EM modeling program for a 2D model and a 3D source is developed, which is based on the extended Born approximation. The solution is very fast and stable. Using the program, crosshole EM responses with a vertical magnetic dipole source are obtained and the results are compared with those of 3D integral equation solutions. The agreement between the integral equation solution and extended Born approximation is remarkable within the entire frequency range, but degrades with the increase of conductivity contrast between anomalous body and background medium. The extended Born approximation is accurate in the case conductivity contrast is lower than 1:10. Therefore, the location and conductivity of the anomalous body can be estimated effectively by the extended Born approximation although the quantitative estimate of conductivity is difficult for the case conductivity contrast is too high.

Keywords : Extended Born approximation, 2.5차원 모델링, 3차원 모델링, 탈분극텐서

*1998년 8월 4일 접수
1) 강원대학교 자연과학대학 지구물리학과(Dept. of Geophysics, Kangwon National University)
2) 서울대학교 지구환경시스템공학부(Sch. of Urban, Civil & Geosystem Eng., Seoul National University)

서 론

전자탐사법은 현재 국내외에서 가장 널리 사용되고 있는 대표적인 물리탐사 기술중의 하나로 지하 광물 및 에너지 자원, 지하수 등의 조사에 적용된 바 있다. 최근에는 토목 및 환경 물리탐사 기술의 수요에 의한 정밀탐사 방법의 하나로 시추공 전자탐사에 관한 지속적인 연구가 수행되고 있다. 그러나 전자탐사법은 이론이 복잡하고 적절한 자료처리 및 해석 기술의 부재로 인하여, 잠재적인 능력에 비하여 현장적용은 아직 활발한 편이 아니다.

일반적으로 토목이나 환경분야에 요구되는 정밀탐사를 위해서는 시추공간 전자탐사법이 주로 이용된다. 시추공간 전자탐사법에서는 송신원과 수신기를 서로 다른 시추공에 위치시키고, 여러 개의 주파수 및 다양한 송 수신 위치의 조합에 의한 반응을 측정하게 된다. 사용되는 주파수는 수 Hz에서 수 MHz까지 가능하며, 송 수신 시추공 간격, 시추공 사이의 평균 전기 전도도, 주변의 잡음 수준 등 다양한 탐사조건에 따라 적정 주파수를 선정하여 사용하게 된다. 토목 및 환경 물리탐사의 경우 대개 짧은 시추공 간격에 대하여 수십 MHz 이상의 고주파를 사용하는 레이다 탐사가 사용되기도 하지만, 고주파 대역의 전자파는 전도성 매질에서 감쇠가 극심하므로 시추공 간격이 넓을 경우에는 적용이 어렵게 된다. 따라서 가탐심도를 증가시키기 위해서는 수십 Hz에서 수십 kHz의 주파수의 전자파를 송신원으로 사용하는 전자탐사(induction EM)가 적절하며, 이러한 주파수 대역에서는 전자파의 거동은 분산방정식에 지배된다. 이러한 시추공간 전자탐사법에 대해서는 다양한 연구가 수행된 바 있으며(Lee and Xie, 1993; Zhou and Becker, 1993; Spies and Habashy, 1995), 특히 EM 토모그래피는 탄성파, 레이다 및 전기 비저항 토모그래피법과 함께 매우 중요한 정밀탐사 기술로 다양한 연구결과가 보고되고 있다(Alumbaugh and Morrison, 1995; Torres-Verdin and Habashy, 1994; Wilt 등, 1995). 그러나 시추공간 전자탐사법은 앞서 언급한 바와 같이 전자파의 복잡한 분산특성 때문에 아직 확실한 해석기술이 개발되어 있지 않은 실정이다. 특히 EM 토모그래피의 기술 개발을 위해서는 계산시간이 짧고 안정적인 모델링 기법이 필요하나 이제까지 개발된 EM 모델링 프로그램은 유한요소 및 유한차분법 등을 사용하고 있다(Fox *et al.*, 1980; Lee, 1978; Stoyer and Greenfield, 1976). 일반적으로 이들 미분 방정식을 이용하는 2차원 전자탐사 모델링에서는 3차원 송신원 문제의 해결을 위하여 Fourier 변환을 통해 파수영역(wavenumber domain)에서 계산하는 방법이 사용되어 왔다. 물론 파수영역에서 계산된 결과는 Fourier 역변환을 통하여 다시 공간영역(space domain)으로 이동해야 하는 번거로움이 있다. 또한 이상체가 없는 지역도 요소로 분할해야 하므로 미분 방정식법은 계산시간이 많이 걸리고 큰 기억용량이 필요하다. 한편 문제를 단순화하고 계산시간을 단축시키기 위하여 이상체내의 전기장을 이상체가 없을 경우의 일차장으로 대치하는 Born 근사가 많이 사용되고 있으나, Born 근사는 이상체의 전도도가 주변 매질에 비하여 너무 크거나, 이상체의 크기가 클 때는 상당히 부정확한 결과를 나타낸다.

본 연구에서는 상기한 미분 방정식법과 Born 근사의 문제점을 해결하기 위한 방안으로 Born 근사를 개선한 확장된 Born 근사(Habashy 등, 1993)에 의한 무한공간에서의 2.5차원 전자탐사 모델링 프로그램을 개발하고 이를 시추공간 전자탐사에 적용하였다. 이 방법은 계산 과정이 간단하기 때문에 계산시간이 짧을 뿐 아니라 거의 모든 경우에 매우 안정적인 결과를 보이는 것으로 나타났다. 이 모델링 프로그램을 이용하여 수직 자기 쌍극자를 송신원으로 하는 시추공간 전자탐사법에 대한 2차 자기장의 수직성분을 계산하고 적분 방정식법에 의한 3차원 모델링(조인기, 정승환, 1998) 결과와 비교, 분석하였다. 전 주파수 대역에서 확장된 Born 근사에 의한 2.5차원 모델링 결과가 3차원 모델링 결과와 매우 잘 일치하고 있다. 그러나 이상체와 모암간의 전도도 차이가 클 경우에는 확장된 Born 근사에 의한 해가 부정확한 것으로 나타났다. 따라서 본 연구에서 개발된 확장된 Born 근사에 의한 2.5차원 모델링은 이상체와 모암간의 전도도 차이가 너무 크지 않을 경우 이상체의 위치 및 형상 파악에 매우 효과적일 것으로 기대된다.

기본 이론

전도성 매질에서 전기장은 다음과 같은 벡터 파동 방정식을 만족한다(Habashy 등, 1993).

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) - k_b^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega\mu_0\sigma_a(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) - i\omega\mu_0\mathbf{J}_P(\mathbf{r}) - i\omega\mu_0\nabla\times\mathbf{M}_P(\mathbf{r}) \quad (1)$$

(1)식에서 k_b는 주변 매질에서의 파수(wavenumber)로서

$$k_b^2 = -i\omega\mu\sigma_b + \omega^2\mu_0\varepsilon_b \quad (2)$$

로 주어진다. (1)식에서 $\sigma_a(\mathbf{r})$는 매질의 전기 전도도 σ_b와 이상체의 전도도 차이로

$$\sigma_a(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) - \sigma_b \quad (3)$$

로 정의된다. (1)식에서 $J_P(\mathbf{r})$, $\mathbf{M}_P(\mathbf{r})$은 전기(electric) 및 자기(magnetic) 전류원(current sources)이다. (1)식의 해는 주어진 경계조건을 만족하는 Green 텐서로, 이 Green 텐서는 다음 방정식을 만족한다.

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') - k_b^2\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \mathbf{I}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (4)$$

(4)식에서 $\mathbf{I}$는 단위 Green 텐서이다.

균질 무한공간에 대한 (4)식의 해는

$$\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{\sigma_b}\left[k^2\mathbf{I} + \nabla\nabla\right] g(\mathbf{r},\mathbf{r}') \quad (5)$$

이며, $\mathbf{g(r, r')}$은 균질 무한공간에 대한 scalar Green 함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-ik_b|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{6}$$

(1)식의 해는 제 2종 Fredholm 적분 방정식으로 측정점(field point) $\mathbf{r}$이 이상체 외부에 존재할 경우에는

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_P(\mathbf{r}) + \int_{v_s} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \sigma_a(\mathbf{r}')\, \mathbf{E}(\mathbf{r}')dv', \quad \mathbf{r} \notin v_S \tag{7a}$$

이 되며, 내부에 존재할 경우에는

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_P(\mathbf{r}) + \frac{1}{\sigma_b}\left[k_b^2\mathbf{I} + \nabla\nabla\right]\int_{v_s} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \sigma_a(\mathbf{r}')\, \mathbf{E}(\mathbf{r}')dv'$$
$$\mathbf{r} \in v_S \tag{7b}$$

이다(Hohmann, 1988). (7)식에서 $\mathbf{E_P(r)}$은 송신원에 의한 일차 전기장(primary electric field)으로 (1)식을 만족한다. 또한 적분으로 주어지는 두 번째 항은 이상체에 의한 2차장(secondary field, scattered field)이다. (7b)식 적분에서 $\mathbf{r=r'}$인 점에서 scalar Green 함수 $\mathbf{g(r, r')}$가 발산하므로 계산에 주의가 필요하다. 한편 (7)식에서 2차장은 다음과 같이 Faraday의 전자기 유도법칙에 의한 유도전류(induction current)와 표면전하에 의한 전하전류(galvanic current)로 나누어진다. 수식을 간단하게 하기 위해서

$$\hat{\sigma}(\mathbf{r}') = \frac{\sigma_a(\mathbf{r}')}{\sigma_b} \tag{8}$$

라 하면, (7)식의 적분항은 다음과 같이 유도전류와 전하전류를 나타내는 항으로 나누어 쓸 수 있다.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_P(\mathbf{r}) + k_b^2\int_{v_s} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, \hat{\sigma}(\mathbf{r}')\, \mathbf{E}(\mathbf{r}')dv'$$
$$+ \nabla\nabla\int_{v_s} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{\sigma}(\mathbf{r}')\, \mathbf{E}(\mathbf{r}')dv' \tag{9}$$

(9)식에서 첫 번째 적분이 유도전류를 나타내며 두 번째 적분항이 전하전류에 의한 2차장을 의미한다. (7)식과 (9)식에서 임의의 일점에서의 전기장은 일차장과 이상체에 유도된 전기장에 의한 산란전류(유도 및 전하전류)가 생성하는 2차장의 합으로 주어진다.

3차원 모델링

무한 균질 매질 내에 3차원 전도도 이상체가 존재할 경우 전기장은 (7)식의 제2종 Fredholm 방정식으로 주어진다. (7)식의 해를 구하기 위해서는 우선 이상체를 여러 개의 미소 육면체로 나눈 다음 각 미소체에서의 산란전류를 계산해야 한다. 미소체 내에서의 전기장이 일정하다고 가정하면 (7b)식은

$$\frac{1}{\sigma_a}\mathbf{J}_{sc}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_P(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{N} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{J}_{sc}(\mathbf{r}_n) \tag{10}$$

와 같이 고쳐 쓸 수 있다. (9)식에서

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) = \int_{v_n} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, dv', \tag{11}$$

$\mathbf{J_{sc}(r_n)}$은 n번째 미소체에서의 산란전류이다. (11)식에서 $\boldsymbol{\Gamma}_{mn}=\boldsymbol{\Gamma}_A+\boldsymbol{\Gamma}_V$로 나누어 생각할 수 있으며, $\boldsymbol{\Gamma}_A$는 Faraday 법칙에 의한 유도전류(vortex current)를 $\boldsymbol{\Gamma}_V$는 이상체의 표면에 집적된 표면전하가 Coulomb의 법칙에 의해 발생시키는 전하전류(galvanic current)를 나타낸다. $\boldsymbol{\Gamma}_V$의 계산은 여러 방법이 있으나 본 연구에서는 프로그래밍이 용이하고 정확도가 뛰어난 것으로 알려진 스칼라 포텐샬의 차분 근사법(Hohmann, 1988)을 사용하였다. 이제 $\boldsymbol{\Gamma}_{mn}$을 n번째 미소체내의 산란전류가 m번째 미소체의 중심에 미치는 영향을 계산해주는 Green Tensor라 하면 (10)식은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{\sigma_a}\mathbf{J}_{sc}^m = \mathbf{E}_P^m + \sum_{n=1}^{N} \Gamma_{mn} \cdot \mathbf{J}_{sc}^n \tag{12}$$

마지막으로 (12)식을 선형방정식의 형태로 표현하면

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{\sigma_a}\delta_{mn} - \Gamma_{mn}\right] \cdot \mathbf{J}_{sc}^n = \mathbf{E}_P^m \tag{13}$$

이 되며, (13)식에서

$$\delta_{mn} = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{for } m=n \\ 0 & \text{for } m\neq n \end{cases} \tag{14}$$

이다. 이 때 $\mathbf{0}$는 0 텐서이다. 일단 (13)식을 이용하여 이상체 내에서의 산란전류가 계산되면 측정점에서의 전기장 및 자기장은 다음 식을 이용하여 간단히 계산할 수 있다(Hohmann, 1988).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_P(\mathbf{r}) + \int_v \mathbf{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_S(\mathbf{r}')\, dv' \tag{15}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_P(\mathbf{r}) + \int_v \mathbf{G}_H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_S(\mathbf{r}')\, dv' \tag{16}$$

(15), (16)식에서 $\mathbf{G_E}$ 및 $\mathbf{G_H}$는 무한공간에 대한 전기장 및 자기장의 Green 텐서이다.

확장된 Born 근사법

Born 근사법은 (7)식에서 이상체내에서의 전기장을 이상체가 없을 경우의 일차 전기장으로 근사하는 방법이다. 즉

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_P(\mathbf{r}) + [k_b^2\mathbf{I} + \nabla\nabla]\int_{v_s} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{\sigma}(\mathbf{r}')\, \mathbf{E}_P(\mathbf{r}')\, dv',$$
$$\mathbf{r} \in v_S. \tag{17}$$

따라서 Born 근사법이 정확한 해를 나타내기 위해서는 이상체내에서의 전기장이 이상체가 없을 경우의 전기장과 같아야 한다. 그러나 이 근사법은 이상체의 전도도가 주변 매질의 전도도에 비하여 너무 클 경우에는 적용이 불가능한 것으로 알려져 있다. 특히 Born 근사에서 (7)식의 유도전류는 비

교적 정확하게 근사할 수 있으나, 전하전류는 전도도 차이가 클 경우에 매우 부정확한 것으로 알려져 있다. 이러한 문제점의 해결을 위하여 도입된 방법이 확장된 Born 근사법이다 (Habashy 등, 1993).

(7)식은 이상체 내부의 일점에서

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_P(\mathbf{r}) + \{[k_b^2\mathbf{I} + \nabla\nabla]\int_{v_s} dv'\, g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\hat{\sigma}(\mathbf{r}')\}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \int_{v_s} dv'\,\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\hat{\sigma}(\mathbf{r}')\cdot[\mathbf{E}(\mathbf{r}')-\mathbf{E}(\mathbf{r})],\quad \mathbf{r}\in v_S \tag{18}$$

로 표현할 수 있다. (18)식은 수학적으로 간단한 과정이나 물리적으로는 매우 중요한 의미를 갖는다. (18)식은 (7)식에서 나타나는 발산이 없어진 형태이다. 즉 (18)식의 두 번째 적분항을 살펴보면 **r=r'**인 점에서 두 번째 항이 정확하게 2차장을 의미하며 **E(r')-E(r)**=0이므로 적분이 가능하다. (18)식을 다시 정리하면

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \tilde{\Gamma}(\mathbf{r})\cdot[\mathbf{E}_P(\mathbf{r}) + \int_{v_s} dv'\,\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\hat{\sigma}(\mathbf{r}')\cdot[\mathbf{E}(\mathbf{r}')-\mathbf{E}(\mathbf{r})]],\quad \mathbf{r}\in v_S \tag{19}$$

이다. 여기서 $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r})$은 탈분극(depolarization) 텐서라 불리며 (Habashy 등, 1993)

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}) = [\mathbf{I} - (k_b^2\mathbf{I} + \nabla\nabla)\int_{v_s} dv'\, g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\hat{\sigma}(\mathbf{r}')]^{-1},\quad \mathbf{r}\in v_S \tag{20}$$

로 주어진다. 일반적인 Born 근사에서는 이상체 내부에서의 전기장을 이상체가 없을 경우의 일차장으로 근사하지만, 확장된 Born 근사에서는 이상체 내부에서의 전기장을 다음과 같이 근사한다.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \tilde{\Gamma}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_P(\mathbf{r}),\quad \mathbf{r}\in v_S \tag{21}$$

(7)식에서 전도체 내부에서의 전기장은 주로 **r=r'**인 점 부근에서의 Green 텐서 **G(r, r')**값에 좌우된다. 이는 **G(r, r')**이 **r=r'**인 점에서 발산하기 때문이다. (18)식에서 세 번째항은 확장된 Born 근사에서의 오차항이 된다. 따라서 (21)식의 확장된 Born 근사가 정확한 해를 나타내기 위해서는 일차장이 오차항에 비하여 매우 커야 한다. 즉

$$|\mathbf{E}_P(\mathbf{r})| \gg \left|\int_{v_s} dv'\,\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\hat{\sigma}(\mathbf{r}')\cdot[\mathbf{E}(\mathbf{r}')-\mathbf{E}(\mathbf{r})]\right|,\quad \mathbf{r}\in v_S \tag{22}$$

의 조건을 만족하고, 내부 전기장이 **r=r'** 부근에서 매우 완만하게 변화하고 **G(r, r')**이 급속하게 감소한다면 (21)식의 확장된 Born 근사는 적절한 근사법이 된다. (22)식에서 우변의 적분은 **r=r'**인 점에서 **E(r')-E(r)**=0이며 **G(r, r')**은 발산하므로 매우 작은 값을 기대할 수 있다. 따라서 이 근사법은 **G(r, r')**이 **r'**가 **r**에서 멀어짐에 따라 매우 빨리 감소하고, 내부 전기장이 매우 완만하게 변할 경우 정확한 근사가 된다. 또한 확장된 Born 근사는 일반적인 Born 근사와는 달리 전도도 이상 σ_a에 대하여 비선형이므로 Localized nonlinear 근사로 불리기도 한다(Habashy 등, 1993).

확장된 Born 근사법에 의한 2.5차원 모델링

일반적으로 2차원 모델링은 유한요소법이나 유한차분법 등의 미분 방정식법이 주로 사용되고 있다. 이는 전자탐사에서 사용되는 송신원이 3차원이므로 지하 모델을 2차원으로 가정해도 Fourier 변환을 이용하여 3차원 송신원 문제를 해결해야 하는 데, 적분 방정식법의 경우 수식이 너무 복잡해지고 역 Fourier 변환시 결국은 수치 접근을 해야 하므로 적분방정식법의 장점이 없어지기 때문이다.

이제 지하 매질이 y축 방향을 따라 변화가 없는 2차원 모델을 가정하자. j번째 2차원 정사각형 미소체의 변의 길이를 Δ라 하면, (20)식에 주어지는 적분은

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}) = [\mathbf{I} - (k_b^2\mathbf{I} + \nabla\nabla)\sum_{j=1}^{N}\int_{\Delta S_j}\hat{\sigma}(\mathbf{r}')\{\int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,dy'\}\,dx'dz']^{-1} \tag{23}$$

와 같이 쓸 수 있다. (23)식에서 ΔS_j는 j번째 2차원 사각형 미소체의 면적분을 의미한다. (23)식에서 scalar Green 함수의 y'에 대한 적분을 이론적으로 계산하면

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,dy' = \frac{1}{2\pi}K_0(ik_b\,\rho) \tag{24}$$

이 된다(부록 A). 이 때 $\rho^2=(x-x')^2+(z-z')^2$, K_0는 제2종 Bessel 함수이다. (24)식의 적분값이 측정점의 y값에 좌우되지 않는 이유는 지하 모델이 2차원으로 y'의 적분구간이 -∞에서 ∞이기 때문이다. 이 경우 y의 값이 변해도 (24)식의 적분에는 아무런 영향이 없다. 이는 물리적으로 y방향으로 ∞의 길이를 갖는 이상체에 의한 이상은 단지 x-z 평면상의 거리에만 좌우되며 측정점의 y 좌표 값과는 무관함을 의미한다. 그러나 3차원 송신원에 의한 일차장은 y 좌표의 함수이므로 (24)식의 경우와는 다르다. (23)식에 (24)식을 대입하면

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}) = [\mathbf{I} + \sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j\,\Lambda_j]^{-1} \tag{25}$$

로 간단히 표현된다. 여기서

$$\Lambda_j = -(k_b^2\mathbf{I} + \nabla\nabla)\sum_{j=1}^{N}\int_{\Delta S_j}\frac{1}{2\pi}K_0(ik_b\,\rho)\,ds' \tag{26}$$

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} 1+\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j\Lambda_{zz} & 0 & \sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j\Lambda_{xz} \\ 0 & D/(1+\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j\Lambda_{yy}) & 0 \\ \sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j\Lambda_{xz} & 0 & 1+\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j\Lambda_{xx} \end{bmatrix} \tag{27}$$

이며, D는 다음과 같다(부록 B).

$$D = (1+\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j\Lambda_{xx})(1+\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j\Lambda_{zz}) - \sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j\Lambda_{xz}\cdot\sum_{j=1}^{N}\hat{\sigma}_j\Lambda_{xz} \tag{28}$$

(27), (28)식에서 첨자는 각 방향의 편미분을 의미한다. 이제 (21)식을 (7)식에 대입하면 측정점에서의 전기장을 계산할 수 있다. 즉

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_P(\mathbf{r}) + \int_{v_s} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \sigma_a(\mathbf{r}') \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_P(\mathbf{r}')\, dv' \quad (29)$$

으로 주어진다. 한편 자기장은 Ampere의 법칙에서

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_P(\mathbf{r}) - \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times \int_{v_s} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \sigma_a(\mathbf{r}')\, \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_P(\mathbf{r}')\, dv' \quad (30)$$

이 되며, (30)식에 (5)식을 대입하면

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_P(\mathbf{r}) + \int_{v_s} \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \sigma_a(\mathbf{r}')\, \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_P(\mathbf{r}')\, dv' \quad (31)$$

이 되므로 자기장을 계산할 수 있다. (31)식의 y'에 관한 적분 시 $\sigma_a(\mathbf{r}')\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}')$는 y'의 함수가 아니므로 상수로 취급되며, (8)식과 (20)식을 이용하여 전체 적분을 계산할 수 있다.

(31)식의 적분은 이론해가 존재하지 않는다. 무한 균질 매질에서 수직 자기 쌍극자에 의한 일차 전기장은

$$\mathbf{E}_P(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{m}k_b^2(1 + ik_b|\mathbf{r} - \mathbf{r}_T|)}{4\pi\sigma_b |\mathbf{r} - \mathbf{r}_T|^2} e^{-ik_b|\mathbf{r}-\mathbf{r}_T|} \cdot \left(-\frac{y - y_T}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_T|}\mathbf{u}_x + \frac{x - x_T}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_T|}\mathbf{u}_y \right) \quad (32)$$

이다. 여기서 m은 송신원의 자기 쌍극자 모멘트, $\mathbf{r}_T=(x_T, y_T, z_T)$로 송신원의 위치 벡터이다. $\nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$은 (6)식에 주어진 바와 같이 수신기의 위치 벡터 $\mathbf{r}$의 함수이다. 자기장의 수치계산을 위해서 (31)식을 바꾸어 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_P(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^{N} \sigma_{aj} \int_{\Delta S_j} \int_{-\infty}^{\infty} [\nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_P(\mathbf{r}')\, dy']\, dx'\, dz' \quad (33)$$

이 적분에서 피적분 함수는 매우 부드럽게 변화하며 y'의 값이 커짐에 따라 매우 빠르게 수렴하므로 안정적인 수치적분의 계산이 가능하다.

(33)식의 확장된 Born 근사를 이용한 2.5차원 모델링은 다음과 같은 이점이 있다. 우선 2.5차원 모델링 문제의 해결을 위한 Fourier 변환이 필요하지 않다. 이는 Fourier 역변환시 적절한 샘플링 간격의 설정 등에 수반되는 어려움을 방지할 수 있으며, 역변환을 위하여 파수영역에서 여러 개의 파수에 대한 모델링에 소요되는 계산시간을 단축할 수 있다. 현재 대부분 전자탐사 2.5차원 모델링은 유한요소법이나 유한차분법 등의 미분 방정식법에 의존하고 있으며, 이 경우 얻어지는 선형 방정식의 크기가 커서 계산시간이 많이 걸릴 뿐 아니라 행렬식이 불안정할 경우도 종종 발생한다. 그러나 (33)식에 나타난 바와 같이 확장된 Born 근사법에 의한 모델링에서는 언제나 안정적인 결과를 나타내며, 계산시간도 매우 짧다. 한편 이 방법은 Born 근사에 비해서는 정확하지만 어차피 근사에 의한 계산이므로 정확한 해가 될 수는 없다. 특히 이상체와 주변 매질과의 전도도 차이가 클 경우에는 그 오차가 상당히 커지는 것으로 알려져 있다(Habashy 등, 1993; Torres-Verdin and Habashy, 1995).

2.5차원 및 3차원 모델링 결과

본 논문에서는 3차원 모델링 결과를 기준으로 확장된 Born 근사에 의한 2.5차원 모델링 결과의 정확성을 검증하고자 한다. 이를 위해서는 과연 주향방향의 길이가 얼마 이상이 되어야 3차원 이상체를 2차원 이상체로 가정할 수 있는가에 대한 검증이 필요하다. Fig. 1에 나타낸 바와 같이 이상체의 x 및 z방향 크기는 10 m×10 m로 고정시키고, 주향방향(y방향)의 길이를 변화시키면서 2차 자기장을 계산하였다. 이 때 주변 매질의 전기 전도도는 0.01 S/m, 이상체의 전도도는 0.1 S/m이며, 사용된 주파수는 10 kHz, 송 수신 시추공 간격은 50 m이다. 한편 시추공-시추공 전자탐사에서는 송 수신점이 항상 시추공 내에 존재해야 하므로 2차원과 3차원의 판단 기준은 두 시추공간의 거리에 좌우된다. 따라서 이상체의 주향방향 길이를 시추공 사이의 간격으로 나누어 준 값의 변화에 따른 2차장을 Fig. 2에 나타내었다.

Fig. 2에 나타난 바와 같이 3차원 모델링의 경우 y축 방향

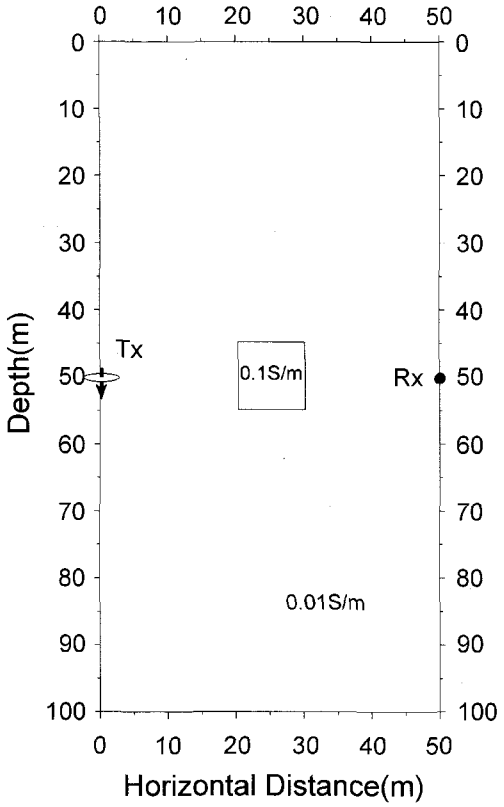

Fig. 1. Cross section of 2D model. A vertical magnetic dipole provides the source of excitation and is located on the point (0, 50). The receiver is fixed at the point (50, 0).

으로의 이상체의 길이가 증가함에 따라 2차장이 선형적으로 증가하다가 송 수신 시추공 간격의 2배 이상이 되면서 수렴하는 결과를 보여주고 있다. 특히 이상성분은 1.6배에서 이미 수렴하는 양상을 보이며, 동상성분도 약 2배 이상이 되면 일정한 값에 수렴한다. 한편 주파수가 감소하게 되면 표피심도(skin depth)가 증가하게 되어 주향 방향의 길이가 더 증가해야 2차원 가정을 만족하게 된다(Spies and Habashy, 1995). 그러나 Fig. 1에 주어진 모델의 경우 주파수를 1 kHz로 했을 경우에도 주향방향의 길이가 송 수신 시추공 간격의 2배 이상이 되면 10 kHz에서와 같이 수렴한다. 이러한 결과는 일반적으로 시추공 전자탐사에서 이상체의 길이가 시추공 간격의 2배 이상이 되면 3차원 이상체를 2차원 이상체로 보아도 무방하다는 의미가 되며, 이는 Spies and Habashy(1995)의 결과와도 일치한다.

확장된 Born 근사에 의한 2.5차원 모델링 결과의 정확성을 검토하기 위하여 적분 방정식법에 의한 3차원 모델링 결과와 비교하여 보았다. 이를 위해서 Fig. 3에서와 같이 간격 100 m인 두 시추공 사이에 크기 20 m×20 m인 동일한 두 개의 이상체가 있을 경우에 대한 2차장을 주파수를 변화시키면서 계산하였다. 이 때 주변 매질의 전기 전도도는 0.1 S/m, 이상체의 전도도는 1 S/m이다. 송 수신원은 심도 50 m에 고정하였다. 이 모델은 Torres-Verdin과 Habashy(1994)가 확장된 Born 근사의 계산결과를 유한 차분법의 결과(Druskin and Knizhnermna, 1992)와의 비교를 위하여 사용한 모델과 같다. Fig. 4는 Torres-Verdin과 Habashy(1994)의 결과와의 비교를 위하여 동일한 조건을 적용한 결과를 나타낸 것이다. Fig. 4에 Torres-Verdin과 Habashy의 결과를 표시하지는 않았으나, 본 연구의 적분 방정식을 이용한 3차원 모델링의 결과와 정확히 일치하고 있다. 한편 확장된 Born 근사에 의한 결과는 이와는 약간의 오차가 있으나 전반적으로 매우 양호한 결과를 보이고 있다. 이러한 오차는 Torres-Verdin과 Habashy는 탈분극 텐서의 계산을 위하여 이상체를 원래의 사각형 요소로 나누어 준데 비하여 본 연구에서는 이를 원형 요소로 가정하였기 때문인 것으로 판단된다. 그러나 계산시간의 측면에서 볼 때 사각형 요소를 사용하는 것 보다 원형 요소를 사용하는 것이 빠르므로, 두 방법을 정확성만으로 단순 비교하기는 어렵다.

Fig. 5는 Fig. 1과 동일한 이상체 및 배열에 대하여 이상체의 전도도를 변화에 따른 2차 자기장의 변화를 도시한 것이다. 사용된 주파수는 10 kHz 이다. Fig. 5에서 횡축은 이상체의 전기전도도와 주변 매질의 전기전도도 비이다. 우선 Fig. 5(a)의 2차장의 크기를 살펴 보면 전도도 차가 커져도 적분 방정식에 의한 3차원 모델링의 경우와 확장된 Born 근사에 의한 반응이 거의 같게 나타나고 있다. 특히 전도도비가 100

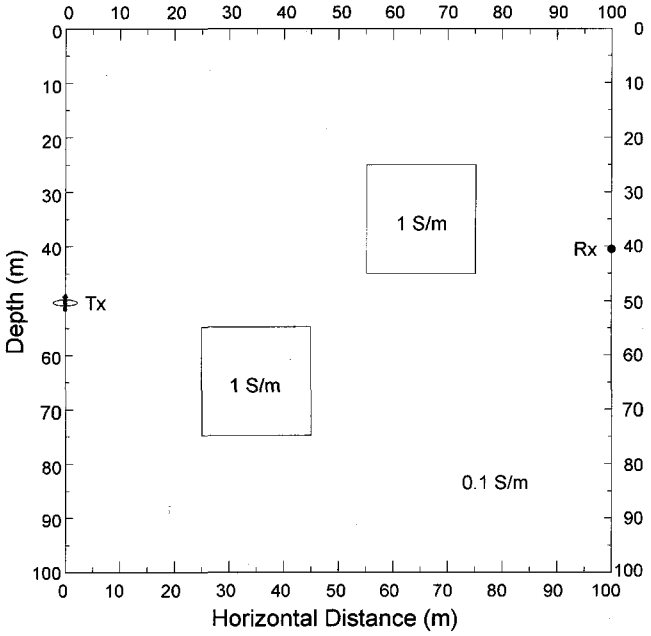

Fig. 3. Cross section of the 2D model used in validating the EM scattering under the extended Born approximation. A vertical magnetic dipole is located on the point 90, 50), and the receiver is fixed at the point 90, 40, 83).

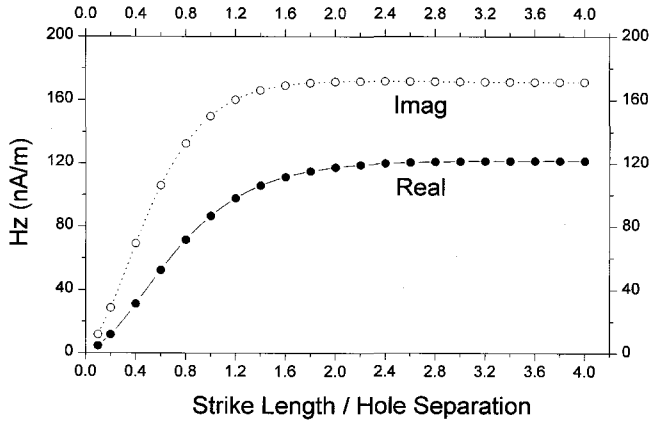

Fig. 2. Secondary magnetic feid (Hz) plotted as a function strike length, for the model in Fig. 1.

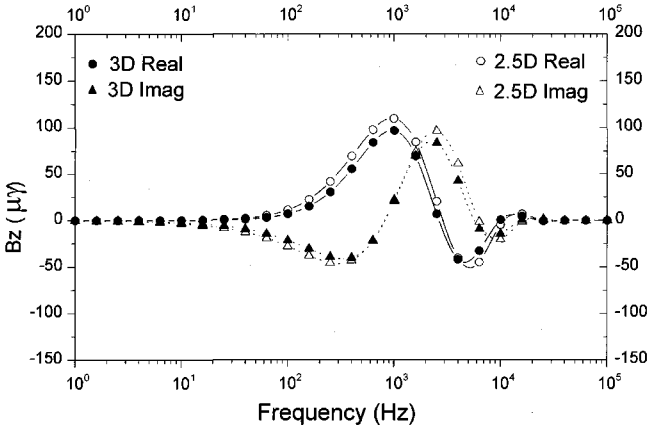

Fig. 4. Secondary magnetic field (Bz) plotted as a function of frequency, for the model in Fig. 3.

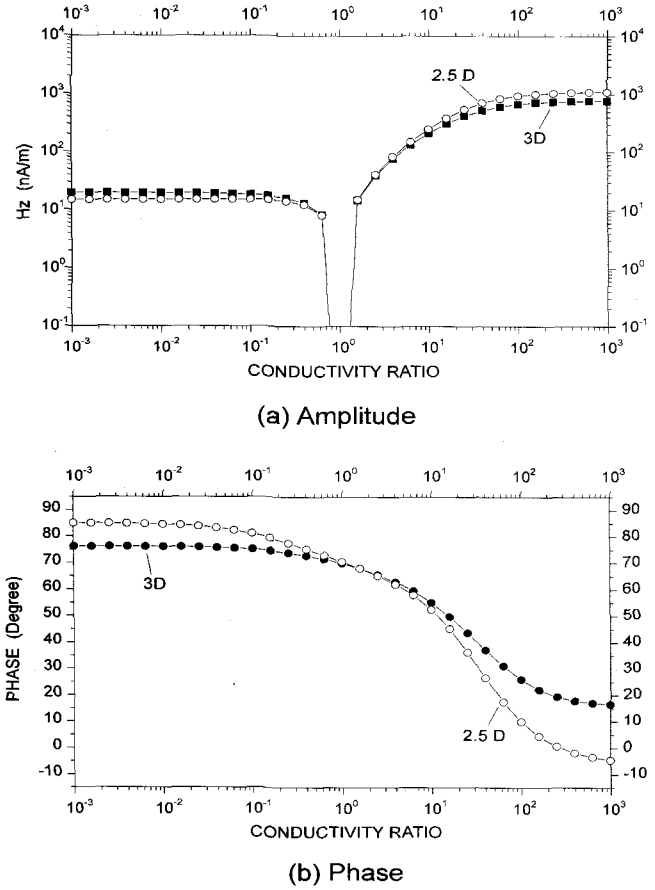

Fig. 5. Secondary magnetic field (Hz) plotted as a function of conductivity ratio (σ/σ_b), for the model in Fig. 1.

이상이 되면서는 유도전류 포화(current saturation) 현상에 의해 2차장의 크기가 수렴하는 양상을 나타낸다. 한편 Fig. 5(b)의 위상곡선의 경우에는 3차원 모델링 결과와 2.5차원 모델링 결과가 상당한 차이를 나타낸다. 전도도가 10배 이상 차이가 나게 되면, 위상이 약 10° 이상 차이를 보이고 있다. 따라서 특히 전도성 이상체의 경우 1000배 정도에서 20° 이상의 차이를 보이고 있어 확장된 Born 근사법의 한계인 것으로 해석된다.

이상에서 확장된 Born 근사에 의한 2.5차원 모델링은 상당히 정확한 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다. 비록 이론해에 가까운 적분 방정식 3차원 모델링보다는 정확도에서 떨어지지만 계산시간이 짧고 이론이 간단하다는 점에서 매우 강력한 모델링 기법 중의 하나인 것으로 판단된다. 한편 적분 방정식을 이용한 3차원 전자탐사 모델링을 이용하여 2.5차원 반응을 계산하기 위해서는 물성 변화가 없는 주향 방향으로 이상체를 분할해야 하므로 요소 수의 증가하고, 결국은 (13)식에 주어진 행렬식의 크기가 매우 커지게 된다. 방대한 행렬식은 수치적으로 다루기에 매우 어려울 뿐 아니라, 역 행렬의 계산에 많은 시간이 걸리게 된다. 경우에 따라서는 행렬식이 불안정하여 역행렬의 계산 자체가 불가능해 질 수도 있다. 또한 역산에서는 요소의 수가 증가하면 추정 변수의 증가를 의미하며, 이의 정확한 추정을 위해서는 더욱 많은 측정값이 요구된다. 이러한 요인들이 실질적으로 3차원 역산을 가로막는 실질적인 문제점들이다. 확장된 Born 근사에 의한 2.5차원 모델링은 지하를 여러 개의 요소로 분할할 때 요소의 수를 획기적으로 줄여준다. 따라서 현실적으로 확장된 Born 근사법에 의한 2.5차원 모델링을 이용하게 되면, 역산에 의한 2차원 지하영상의 구현이 가능하다. 이 점이 확장된 Born 근사에 의한 2.5차원 모델링의 가장 큰 장점이라 할 수 있다. 특히 이 방법은 유한요소 및 유한차분법에 비하여 계산시간이 매우 짧기 때문에 현장에서의 일차적인 자료처리에도 효과적으로 사용 가능할 것으로 예상된다.

토의 및 결론

3차원 송신원에 의한 2차원 지하모델의 모형반응을 계산하는 전자탐사 2.5차원 모델링은 주로 유한차분 및 유한요소법 등이 사용되고 있다. 그러나 이들 방법은 수치계산시 대형 행렬식을 다루어야 하는 어려움과, 3차원 송신원 문제를 해결하기 위해서 Fourier 변환을 통하여 공간영역에서 파수영역으로 이동하여 반응을 계산한 다음 다시 역 Fourier 변환을 통하여 공간영역으로 돌아와 최종적으로 반응을 계산해야 하는 번거로움이 있다. 본 연구에서는 확장된 Born 근사에 근거하여 2차원 지하 모델에 대한 탈분극 텐서를 유도하고, 이를 이용하여 2.5차원 전자탐사 모델링 프로그램을 개발하였다. 이 방법은 적분 방정식법에서와 마찬가지로 이상체만을 여러 개의 정사각형 요소로 분할하여 간단한 수치적분만을 수행하기 때문에 이론이 간단하고 계산시간이 단축된다. 또한 계산과정에 선형 방정식이 포함되어 있지 않으므로 모든 경우에 안정적인 해를 구할 수 있다는 장점이 있다.

확장된 Born 근사에 의한 전자탐사 2.5차원 모델링 프로그램을 이용하여 수직 자기 쌍극자원을 신호원으로 하는 시추공간 전자탐사법에 대한 2차 자기장의 수직성분을 계산하고, 이를 적분 방정식에 의한 3차원 모델링 결과와 비교하였다. 주파수 변화, 이상체의 전도도 변화 등에 대한 반응을 분석한 결과, 비록 이상체와 주변 매질간의 전도도 차이가 클 경우에는 확장된 Born 근사에 의한 위상 자료는 상당한 오차를 수반하는 것으로 나타났지만, 전반적으로 확장된 Born 근사에 의한 2.5차원 모델링은 매우 정확한 결과를 보여주고 있다. 특히 확장된 Born 근사는 이론적으로 간단하고 계산시간이 짧기 때문에 2.5차원 전자탐사 자료의 역산에 모형 반응 알고리듬으로 매우 유리한 조건을 갖추고 있다. 또한 지표면을 고려한 확장된 Born 근사에 대한 연구가 수행된다면, 전자탐사 2.5차원 모델링을 시추공 전자탐사 뿐 아니라 지표 전자탐사에 대해서도 확장 가능할 것으로 보인다.

감사의 글

본 논문은 한국과학재단 특정기초연구비의 지원을 받은 "전자탐사법에 의한 지하영상화" 과제의 일부로 수행되었다. 당 기관에 감사한다.

참고문헌

1. 조인기, 정승환, 1998, 시추공간 전자탐사법의 3차원 모델링: 한국자원공학회지, **35**, 50-58.
2. Ambramowitz and Stegun, 1964, Handbook of mathematical functions: N.B.S., U.S. Gov't. Printing Office.
3. Druskin, V. and Knizhnerman, L., 1992, On application of Lanczos method to solution of some partial differential equations: Res. Note EMG-92-27, Schlumberger-Doll Res., Ridgefield, Conn.
4. Fox, R. C., Hohmann, G. W., Killpack, J. J., and Rijo, L., 1980, Topographic effects in resistivity and induced polarization surveys: Geophysics, **45**, 75-93.
5. Habashy, T. M., Groom, R. W. and Spies, B. R., 1993, Beyond the Born and Rytov approximations: A nonlinear approach to electromagnetic scattering: Journal of Geophysical Research, **98**, 1759-1775.
6. Hohmann, G. W., 1988, Numerical Modeling for Electromagnetic Methods of Geophysics, in Nabighian, M.N. Ed., Electromagnetic methods in applied geophysics-theory, Vol. 1: Soc. Explor. Geophys., 312-363.
7. Lee, K. H. and Morrison, H. F., 1985, A numerical solution for the electromagnetic scattering by a two dimensional inhomogeneity: Geophysics, **50**, 466-472.
8. Lee, K. H., and Xie, G. Q., 1993, A new approach to imaging with low frequency electromagnetic fields: Geophysics, **58**, 780-796.
9. Prudnikov, A. P., Brychkow, Y. A. and Marchev, O. I., 1986, Integrals and Series: Golden and Breach Science Publishers.
10. Spies, B. R. and Habashy, T. M., 1995, Sensitivity analysis of crosswell electromagnetics: Geophysics, **60**, 834-845.
11. Stoyer, C. H. and Greenfield, R. J., 1976, Numerical solution of the response of a two dimensional earth to an oscillating magnetic dipole source: Geophysics, **49**, 519-530.
12. Torres-Verdin, C. and Habashy, T. M., 1994, Rapid 2.5 dimensional forward modeling and inversion via a new nonlinear scattering approximation: Radio Science, **29**(4), 1051-1079.
13. Torres-Verdin, C. and Habashy, T. M., 1995, A two-step linear inversion of two-dimensional electrical conductivity: IEEE, Trans. Antennas Propag., **43**(4), 405-415.
14. Watson, G. N., 1966, A treatise on the theory of Bessel functions: Cambridge, Univ. Press.
15. Wilt, M, Alumbaugh, D. L., Morrison, H. F., Becker, A., Lee, K. H. and Deszcz-Pan, M., 1995, Crosswell electromagnetic tomography: System design considerations and field results: Geophysics, 60, 871-885.
16. Zhou, Q., Becker, A. and Morrison, H. F., 1993, Audio-frequency electromagnetic tomography in 2-D: Geophysics, **58**, 482-495.

부록 A : 스칼라 Green 함수의 적분

균질 무한공간에서 y축 방향으로 물성변화가 없는 2차원 스칼라 Green 함수의 적분은

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,dy' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_b|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dy' \tag{A1}$$

이다. 여기서 $\rho^2=(x-x')^2+(z-z')^2$, $\eta=y-y'$라 하면, 괄호안의 y'에 관한 적분은

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_b|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dy' = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-ik_b\sqrt{\eta^2+\rho^2}}}{2\pi\sqrt{\eta^2+\rho^2}}\,d\eta$$

으로 변형된다. $\xi^2=\eta^2+\rho^2$라 하면

$$\int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{-ik_b\xi}}{2\pi\sqrt{\xi^2-\rho^2}}\,d\xi = \frac{K_0(ik_b\rho)}{2\pi} \tag{A2}$$

로 계산된다(Prudnikov, 1986).

부록 B : 탈분극 텐서 $\tilde{\Gamma}$의 유도

(25)식에 주어진 탈분극 텐서는 하나의 원통형 이상체를 가정할 때 다음과 같이 주어진다.

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}) = [\mathbf{I} + \hat{\sigma}\Lambda]^{-1} \tag{B1}$$

(B1)식에서 탈분극 텐서는 결국 $\Lambda(\rho)$를 구하는 문제가 된다. 이제

$$f(\rho) = -\int_{\Delta S_j} \frac{1}{2\pi} K_0(ik_b|\rho-\rho'|)\,ds \tag{B2}$$

라 하면, (26)식은

$$\Lambda(\rho) = (k_b^2\mathbf{I} + \nabla\nabla)\,f(\rho) \tag{B3}$$

로 간단하게 표현된다. 여기서 $\boldsymbol{\rho}=x\mathbf{a}_x+z\mathbf{a}_z$, $\boldsymbol{\rho}'=x'\mathbf{a}_x+z'\mathbf{a}_z$이다.

이제 반경 a인 2차원 원통형 이상체를 가정하자. 제2종 Bessel 함수의 addition theorem (Watson, 1966)에서

$$K_0(ik_b|\rho-\rho'|) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(ik_b\rho)\,K_m(ik_b\rho)\cos(\phi-\phi'),$$
$$\rho \le \rho' \tag{B3a}$$

$$K_0(ik_b|\rho-\rho'|) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(ik_b\rho')\,K_m(ik_b\rho)\cos(\phi-\phi'),$$
$$\rho \ge \rho' \tag{B3b}$$

원통 좌표계에서 함수 $f(\rho)$는 ϕ에 대하여 대칭이므로

$$f(\rho)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_0^{2\pi}K_0(ik_b|\rho-\rho'|)\,\rho'\,d\phi'\,d\rho' \tag{B4}$$

이 된다. (B3)식을 (B4)식에 대입하면 m=0인 경우만 남고 나머지 항은 모두 없어진다. 이 경우 피적분 함수는 ϕ'의 함수가 아니므로 ϕ'에 대한 적분은 함수 $f(\phi)$에 2π를 곱해주는 것과 동일하다.

(B4)식의 적분은 (B3)식에 의해 $\rho\le a$인 경우와 $\rho\ge a$인 2가지 경우로 나누어 진다. 우선 $\rho\le a$인 경우에는 (B4)식은

$$f(\rho)=-K_0(ik_b\rho)\int_0^{\rho}I_0(ik_b\rho')\,\rho'd\rho'-I_0(ik_b\rho)\int_{\rho}^{a}K_0(ik_b\rho')\,\rho'd\rho' \tag{B5}$$

여기서 $\int_0^z tI_0(t)dt=zI_1(z)$, $\int zK_0(z)dz=-zK_1(z)$, $K_0(z)I_1(z)+K_1(z)I_0(z)=z^{-1}$의 관계식(Watson, 1966; Ambramowitz and Stegun, 1964)을 이용하여 (B5)식의 적분을 수행하면

$$f(\rho)=\frac{1}{k_b^2}\left[1-ik_b\rho K_1(ik_b a)\,I_0(ik_b\rho)\right],\quad \rho\le a \tag{B6}$$

이 된다. 이는 ρ=0을 대입하면 Hohmann(1988)의 결과와 같다. 또한 $\rho\ge a$인 경우에는

$$f(\rho)=-K_0(ik_b\rho)\int_0^a I_0(ik_b\rho)\,\rho'\,d\rho' \tag{B7}$$

이 되며, 적분을 수행하면

$$f(\rho)=\frac{1}{k_b^2}\,ik_b a\,K_0(ik_b\rho)\,I_1(ik_b a),\quad \rho\ge a \tag{B8}$$

이 된다.

한편 (B3)식에서 $\Lambda(\rho)$는

$$\Lambda(\rho)=\begin{bmatrix} k_b^2 f+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & 0 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}\\ 0 & k_b^2 f & 0\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} & 0 & k_b^2 f+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{bmatrix} \tag{B9}$$

이다. (B6)식과 (B8)식을 (B9)식에 대입하면 $\Lambda(\rho)$의 각 성분을 구할 수 있다. 먼저 $\rho\le a$인 경우

$$\Lambda_{xx}=1-ik_b a\,K_0(ik_b a)\left[\frac{z^2}{\rho^2}I_0(ik_b\rho)+\left(1-\frac{2z^2}{\rho^2}\right)\frac{I_1(ik_b\rho)}{ik_b\rho}\right]$$

$$\Lambda_{xz}=\Lambda_{zx}=ik_b a\,K_0(ik_b a)\,\frac{xz}{\rho^2}I_2(ik_b\rho)$$

$$\Lambda_{yy}=1-ik_b a\,K_0(ik_b a)\,I_0(ik_b\rho)$$

$$\Lambda_{zz}=1-ik_b a\,K_0(ik_b a)\left[\frac{x^2}{\rho^2}I_0(ik_b\rho)+\left(1-\frac{2x^2}{\rho^2}\right)\frac{I_1(ik_b\rho)}{ik_b\rho}\right] \tag{B10}$$

이 된다. 또한 $\rho\ge a$인 경우는

$$\Lambda_{xx}=ik_b aI_1(ik_b a)\left[K_0(ik_b\rho)-\frac{(x-x')^2}{\rho^2}K_2(ik_b\rho)-\frac{i}{k_b\rho}K_1(ik_b\rho)\right]$$

$$\Lambda_{xz}=\Lambda_{zx}=-ik_b aI_1(ik_b a)\frac{(x-x')}{\rho}\frac{(z-z')}{\rho}K_2(ik_b\rho)$$

$$\Lambda_{yy}=ik_b aI_1(ik_b a)\,K_0(ik_b\rho)$$

$$\Lambda_{zz}=ik_b aI_1(ik_b a)\left[K_0(ik_b\rho)-\frac{(z-z')^2}{\rho^2}K_2(ik_b\rho)-\frac{i}{k_b\rho}K_1(ik_b\rho)\right] \tag{B11}$$

이 된다. $\rho\ge a$인 경우의 탈분극 텐서는 여러 개의 이상체에 대한 반응을 계산할 때 필요하다.

이상 (B10), (B11)식을 (B1)식에 대입하여 탈분극 텐서의 각 요소를 계산할 수 있다. 최종적으로 탈분극 텐서는

$$\tilde{\Gamma}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}1+\hat{\sigma}\Lambda_{zz} & 0 & \hat{\sigma}_j\Lambda_{xz}\\ 0 & D/(1+\hat{\sigma}\Lambda_{yy}) & 0\\ \hat{\sigma}\Lambda_{xz} & 0 & 1+\hat{\sigma}_j\Lambda_{xx}\end{pmatrix} \tag{B12}$$

이며, D는 다음과 같다.

$$D=(1+\hat{\sigma}\Lambda_{xx})(1+\hat{\sigma}\Lambda_{zz})-\hat{\sigma}\Lambda_{xz}\cdot\hat{\sigma}\Lambda_{xz} \tag{B13}$$

한편 ρ=0일 경우 (B10)식은

$$\Lambda_{xx}=1-ik_b a\,K_0(ik_b a)/2$$

$$\Lambda_{yy}=1-ik_b a\,K_0(ik_b a)$$

$$\Lambda_{zz}=1-ik_b a\,K_0(ik_b a)/2 \tag{B14}$$

가 된다. 이 때 $ik_ba\to 0$, 즉 DC 문제의 경우에는 탈 분극텐서는

$$\tilde{\Gamma}=[\mathbf{I}+\frac{\hat{\sigma}}{2}(\mathbf{a}_x\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_z\mathbf{a}_z)]^{-1} \tag{B15}$$

이 된다. 만약 이상체의 전도도가 0인 부도체의 경우에는 ($\hat{\sigma}$=-1)

$$\tilde{\Gamma}=2\mathbf{a}_x\mathbf{a}_x+\mathbf{a}_y\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z\mathbf{a}_z \tag{B16}$$

가 되어, 이상체내에서 x 및 z방향 전기장의 크기가 일차장의 2배가 됨을 의미한다. 반면 이상체의 전도도가 매우 높을 경우에는($\hat{\sigma}$=∞)

$$\tilde{\Gamma}=\mathbf{a}_y\mathbf{a}_y \tag{B17}$$

가 되어, x 및 z방향의 전기장은 서로 상쇄되어 없어짐을 의미한다(Torres-Verdin and Habashy, 1994).