

**정밀 궤도 계산법**  
**METHOD OF HIGH PRECISION ORBIT CALCULATION**

**김갑성**

**경희대학교 우주과학과**

**KIM, KAP-SUNG**

**Department of Astronomy & Space Science, KyungHee University**

*(Received November 20, 1998; Accepted December 7, 1998)*

**ABSTRACT**

We have carried out high precision orbit calculation, by using various numerical techniques with accuracy of higher than fourth order, in order for exact prediction on position and velocity of celestial bodies and artificial satellites. General second order ordinary differential equation has been solved numerically to test the performance for each of numerical methods. We have compared computed values with exact solution obtained by using universal variables for two body problem and discussed overall results of numerical methods used in our calculation. As a result, it is found that high order difference table method called as Gauss-Jackson method is best one with easiness and efficiency in the increase of accuracy by number of initial values.

**1. 서론**

현재 지구 주변에는 수많은 위성들이 각각의 임무를 띄고 궤도상을 선회하면서 우리 지구와 드넓은 우주를 감시하고 있다. 더욱이 인류의 꿈과 희망을 안고 미지의 태양계 탐사를 위해 긴 여정을 떠난 우주선도 어두운 태양계 공간 속 이곳 저곳을 하염없이 떠다니고 있다. 지구 밖의 우주를 보다 잘 알기 위해 위성을 올리거나 우주선을 보내는 일은 우리에게 필수적이다. 우리 나라도 과학위성 우리별호, 방송통신위성 무궁화호 등을 보유하고 과학로켓 발사 성공으로 자체 추진체 개발에 성공하여 선진 우주개발에 대열에 진입하고 있다. 올해에는 특히 북한의 대포동에서 발사된 비행체가 미사일이나 위성이나 하는 논란으로 국제적인 많은 관심과 우려를 낳았으나 모든 우주정보를 미국에 의존할 수밖에 없는 현실에서 우리나라의 위성정보 및 감시체제와 궤도역학의 수준을 간접적으로 가능하게 되었다.

천체역학의 연구는 가우스, 야코비, 르베리에, 아담즈, 뉴우컴, 힐, 프랑카레 등 19세기의 많은 해석학 학자들에 의해 수행되어 그 전성기를 맞이하였다. 특히 천왕성의 운동이 일정치 않은 사실로부터 섭동을 일으키는 미지의 행성 위치를 이론적으로 계산, 예측하여 실제의 해왕성을 발견하였는데 이는 천체역학의 큰 개가라 할 수 있다. 그 뒤 레비-시비타, 버코프,선드만

등의 연구를 바탕으로 천체역학이 더욱 발전하였으며 20세기 후반으로 접어들면서 인공위성의 발사와 대형컴퓨터의 등장으로 천체역학중 수치궤도역학 연구에 결정적인 활력소와 생명력을 부여하였다.

천체역학에 기초를 둔 궤도분야의 연구가 국내에서도 여러 학자(김갑성 1995, 신종엽외 4인 1995, 윤재철외 2인 1997, 지명국의 2인 1997)들에 의해 수행되었다. 본 연구는 정확한 천체력계산을 기초로 행성간을 여행하는 우주선이나 지구의 근접위성의 궤도를 파악하는데 보다 정밀한 방법의 궤도역학 계산이 요구되었던 바, 여기에서 그 수치계산 방법을 비교 연구하였다. 일반적으로 주로 4차의 정밀도를 갖는 계산 방법이 주로 이용되지만 초기치만을 갖고 열린 계의 미분방정식을 적분해 나아가는 데에는 많은 오류가 수반되어 6차이상의 정밀도로 궤도계산을 수행하고자 하였다.

## II. 궤도방정식의 수치계산

본 연구에서 다루는 궤도방정식의 일반적 형태는 2차 미분방정식으로 식(1)과 같다.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (1)$$

위의 2차 미분방정식은 아래와 같이 두 개의 연립 1차 미분방정식(2), (3)으로 나누어 표현할 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (3)$$

위의 일차 미분식은 많은 연구자들에 의해 다양한 유한차분식으로 정리되어 수치계산에 활용되었다. 본 연구에서는 고정도의 계산에 요구되는 수치계산방법을 소개한 다음, 서로의 계산결과를 비교할 것이다.

### 1. 룬게-컷타-펠버그(Runge-Kutta-Fehlberg) 방법

이 방법(이하 RKF 방법으로 지칭)은 오직 하나의 초기치만을 갖고 이후 시간에 대한 물리량을 계산해 나가는 일단계 적분방법이다. 4차의 정확도로 정리한 룬게-컷타 방법이 잘 알려져 있으나 이 정도로는 정밀한 역계산이 가능하지 않아 보다 개선된 방법인 RKF 방법을 이용하였다. 계산방법은 식(4), (5), (6)을 이용하는데 일반적으로 시각  $t_0$  때의 초기치  $\mathbf{v}_0, \mathbf{r}_0$  ( $n=0$ )가 주어지면 이 값으로부터 다음시각의 속도 가속도는 6차의 정확도로 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \left( \frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right) \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \left( \frac{16}{135} q_1 + \frac{6656}{12825} q_3 + \frac{28561}{56430} q_4 - \frac{9}{50} q_5 + \frac{2}{55} q_6 \right) \quad (5)$$

$$a_{n+1} = f(t_{n+1}, r_{n+1}, v_{n+1}), \quad t_{n+1} = t_n + h \quad (6)$$

여기에서

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, r_n, v_n), & q_1 &= h v_n \\ k_2 &= hf(t_n + \frac{h}{4}, r_n + \frac{q_1}{4}, v_n + \frac{k_1}{4}), & q_2 &= h(v_n + \frac{k_1}{4}) \\ k_3 &= hf(t_n + \frac{3}{8}h, r_n + \frac{3}{32}q_1 + \frac{9}{32}q_2, v_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2), & q_3 &= h(v_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2) \\ k_4 &= hf(t_n + \frac{12}{13}h, r_n + \frac{1932}{2197}q_1 - \frac{7200}{2197}q_2 + \frac{7296}{2197}q_3, v_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3) \\ q_4 &= h(v_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3) \\ k_5 &= hf(t_n + h, r_n + \frac{439}{216}q_1 - 8q_2 + \frac{3680}{513}q_3 - \frac{845}{4104}q_4, v_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4) \\ q_5 &= h(v_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4) \\ k_6 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, r_n - \frac{8}{27}q_1 + 2q_2 - \frac{3544}{2565}q_3 + \frac{1859}{4104}q_4 - \frac{11}{40}q_5, \\ & \quad v_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5) \\ q_6 &= h(v_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5) \end{aligned}$$

이 방법은 미분식인 가속도 함수를 자주 호출하기 때문에 시간도 많이 소요될 뿐 아니라 적분 간격을 줄이더라도 시간이 갈수록 오차가 많이 누적되어 정밀계산에 부적합하였다. 따라서 본 연구에서는 전체의 궤도를 계산하는데 이 방법을 사용하기보다는 다단계 적분 방법에서 요구되는 연속된 시각의 초기치를 계산하는데 이용하였다.

## 2. 아담-배시포드-몰턴(Adams-Bashforth-Moulton) 방법

이 계산방법(이하 ABM 방법으로 지칭)은 일차 미분방정식을 유한차분법에 의해 아담-배시포드가 정리한 관계식과 아담-몰턴이 유도한 유한 차분식을 함께 이용하는 방법으로 아담-배시포드의 방법만으로 계산하는 것 보다 훨씬 정확도가 높은 결과를 얻는다.

아담-배시포드에 의해 차분화된 연립 운동방정식 (2), (3)의 유한차분식은 (7), (8)과 같이 차수에 따라 여러 등급의 정확도를 구현할 수 있는 데 이 차분식에서 사용된 계수값은 표 1에 차수별로 나타나 있다. 정밀한 궤도계산을 위해서는 보다 높은 차수의 차분식이 요구되는 바, 표 1에 있는 6차의 계수를 이용하여 비교하였다.

$$r_{n+1}^p = r_n + bh(a_0 v_n + a_{-1} v_{n-1} + a_{-2} v_{n-2} + a_{-3} v_{n-3} + a_{-4} v_{n-4} + a_{-5} v_{n-5}), \quad (7)$$

$$v_{n+1}^p = v_n + bh(a_0 f_n + a_{-1} f_{n-1} + a_{-2} f_{n-2} + a_{-3} f_{n-3} + a_{-4} f_{n-4} + a_{-5} f_{n-5}), \quad O(h^k) \quad (8)$$

따라서 연속된 여섯 시각의 초기 가속도  $f_{-5}, f_{-4}, f_{-3}, f_{-2}, f_{-1}, f_0$  와 초기 속도  $v_{-5}, v_{-4}, v_{-3}, v_{-2}, v_{-1}, v_0$  값이 주어지면 위의 관계식으로 다음 시각의 거리, 속도, 가속도를 차례로 계산해 나아갈 수 있다.

이전 시각의 물리량 값들로부터 그 다음 시각의 물리량을 계산하는 아담-배시포드 방법에 반하여 아담-몰턴(Adams-Moulton)에 의해 유도된 유한차분식 (9), (10)에서는 이전 시각의 물리량은 물론 계산하고자 하는 시각의 물리량 값이 다음 시각의 물리량을 계산하는데 요구되고 있다. 아담-몰턴 차분식 (9), (10)에 등장하는 차수에 따른 계수는 표 2에 자세히 나타나 있다.

$$r_{n+1} = r_n + dh ( c_1 v_{n+1}^p + c_0 v_n + c_{-1} v_{n-1} + c_{-2} v_{n-2} + c_{-3} v_{n-3} + c_{-4} v_{n-4} ), \quad (9)$$

$$v_{n+1} = v_n + dh ( c_1 f_{n+1}^p + c_0 f_n + c_{-1} f_{n-1} + c_{-2} f_{n-2} + c_{-3} f_{n-3} + c_{-4} f_{n-4} ), \quad O(h^k) \quad (10)$$

여기에서  $f_{n+1}^p = f(t_{n+1}, r_{n+1}, v_{n+1})$ 을 의미한다.

따라서 식 (9), (10) 우변의 제2항에 있는  $v_{n+1}^p, f_{n+1}^p$  값으로서 아담-배시포드관계식 (7), (8)로 계산한 값을 사용하면 보다 정밀한 계산이 가능하다. 6차의 정밀도를 갖는 계산을 위해서는 6개의 시각에 대한 속도 및 위치 값이 초기조건으로 요구된다. 이들 다단계 적분에 요구되는 초기치는 일단계 적분법인 RKF 방법으로 계산한 다음 일반화된 ABM 방법으로 넘어가 계산한다.

이상과 같이 아담-배시포드-몰턴 방법에 차분화 과정에서 생략된 절단오차를 고려하면 훨씬 계산의 정확도를 높일 수 있다.

표 2. 일반화된 아담-배시포드(Adams-Bashforth) 유한 차분식의 계수

차수 (k)	b	a <sub>0</sub>	a <sub>-1</sub>	a <sub>-2</sub>	a <sub>-3</sub>	a <sub>-4</sub>	a <sub>-5</sub>
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1/2	3	-1	0	0	0	0
3	1/12	23	-16	5	0	0	0
4	1/24	55	-59	37	-9	0	0
5	1/720	1901	-2774	2616	-1274	251	0
6	1/1440	4277	-7923	9982	-7298	2877	-475

표 1. 일반화된 아담-몰턴의 유한차분식 계수

k	d	c <sub>1</sub>	c <sub>0</sub>	c <sub>-1</sub>	c <sub>-2</sub>	c <sub>-3</sub>	c <sub>-4</sub>
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1/2	1	1	0	0	0	0
3	1/12	5	8	-1	0	0	0
4	1/24	9	19	-5	1	0	0
5	1/720	251	646	-264	106	-19	0
6	1/1440	475	1427	-798	482	-173	27

식 (9)에 대한 예측자로서의 아담-배시포드 차분식과 수정자로서의 아담-몰턴 차분식에 절단 오차(truncation error)를 고려하여 각각 다시 기술하면 다음과 같다.

$$v_{n+1} \cong v^p_{n+1} + \frac{19087}{60480} h^7 f^{(6)}(\tau_p) \tag{11}$$

$$v_{n+1} \cong v^c_{n+1} - \frac{863}{60480} h^7 f^{(6)}(\tau_c) \tag{12}$$

여기에서  $f^{(6)}(\tau_p) = f^{(6)}(\tau_c) = f^{(6)}(\tau)$ 라 가정하고 두식 (11), (12)을 연립하면

$$h^7 f^{(6)}(\tau) = \frac{60480}{(19087 + 863)} (v^c_{n+1} - v^p_{n+1}) \tag{13}$$

와 같다. 그런데  $v^p_{n+1} - v^c_{n+1} \cong v^p_n - v^c_n$ 라 가정한 다음 이식을 (11), (12)식에 대입하여 정리하면 보정 예측치라 할 수 있는 (14)식과 보정 수정치로서의 (15)식이 유도된다.

$$v^{p,m}_{n+1} = v^p_{n+1} + \frac{19087}{(19087 + 863)} (v^c_n - v^p_n) \tag{14}$$

$$v^{c,m}_{n+1} = v^c_{n+1} - \frac{863}{(19087 + 863)} (v^c_n - v^p_n) \tag{15}$$

위에서 설명한 6차의 아담-배시포드-몰턴 ABM 방법에 추가적으로 절단오차를 고려한 보정 예측치와 보정 수정치를 사용하여 보정하면 한 차수 높은 정밀도의 계산 결과를 얻을 수 있다.

이상과 같은 과정으로 궤도방정식을 수치 적분하는 방법을 정리하면 다음과 같다.

- 1) 초기치로 사용할 연속된 여섯 시각의 초기 위치  $r_{-5}, r_{-4}, r_{-3}, r_{-2}, r_{-1}, r_0$ , 초기 속도  $v_{-5}, v_{-4}, v_{-3}, v_{-2}, v_{-1}, v_0$  및 초기 가속도  $f_{-5}, f_{-4}, f_{-3}, f_{-2}, f_{-1}, f_0$  값을 룽게-컷터-펠버그 방법으로 계산한다. 그리고 초기  $t_0$  시각 ( $n=0$ )의 예측치, 수정치값을 다음과 같이 초기치의 값으로 대체한다.  $r^p_0 = r^c_0 = r_0$ ,  $v^p_0 = v^c_0 = v_0$
- 2) 6차의 아담-배시포드 방법에 의한 차분식을 이용하여 다음 시각  $t_{n+1}$ 의 거리, 속도, 가속도에 대한 예측치  $r^p_{n+1}$ ,  $v^p_{n+1}$ 를 계산한다.

표 3. 아담-배시포드, 아담-몰턴 유한차분식의 절단오차

차수(order)	절단오차(Truncation Error)	
	Adams-Bashforth	Adams-Moulton
2	$\frac{5}{12} h^3 f^{(2)}(\tau)$	$-\frac{1}{12} h^3 f^{(2)}(\tau)$
3	$\frac{9}{24} h^4 f^{(3)}(\tau)$	$-\frac{1}{24} h^4 f^{(3)}(\tau)$
4	$\frac{251}{720} h^5 f^{(4)}(\tau)$	$-\frac{19}{720} h^5 f^{(4)}(\tau)$
5	$\frac{475}{1440} h^6 f^{(5)}(\tau)$	$-\frac{27}{1440} h^6 f^{(5)}(\tau)$
6	$\frac{19087}{60480} h^7 f^{(6)}(\tau)$	$-\frac{863}{60480} h^7 f^{(6)}(\tau)$

$$r_{n+1}^p = r_n + \frac{1}{1440} h (4277 v_n - 7923 v_{n-1} + 9982 v_{n-2} - 7298 v_{n-3} + 2877 v_{n-4} - 475 v_{n-5}),$$

$$v_{n+1}^p = v_n + \frac{1}{1440} h (4277 f_n - 7923 f_{n-1} + 9982 f_{n-2} - 7298 f_{n-3} + 2877 f_{n-4} - 475 f_{n-5})$$

3) 거리, 속도에 대해 얻어진 예측치와 수정치를 이용하여 보정예측치를 계산한다.

$$r_{n+1}^{p,m} = r_{n+1}^p + \frac{19087}{(19087+863)} (r_n^c - r_n^p)$$

$$v_{n+1}^{p,m} = v_{n+1}^p + \frac{19087}{(19087+863)} (v_n^c - v_n^p)$$

4) 이렇게 얻어진 보정예측치를 아래의 아담-몰턴 차분 관계식에 넣어 수정치를 구한다.

$$r_{n+1}^c = r_n + \frac{1}{1440} h (475 v_{n+1}^{p,m} + 1427 v_n - 798 v_{n-1} + 482 v_{n-2} - 173 v_{n-3} + 27 v_{n-4}),$$

$$v_{n+1}^c = v_n + \frac{1}{1440} h (475 f_{n+1}^{p,m} + 1427 f_n - 798 f_{n-1} + 482 f_{n-2} - 173 f_{n-3} + 27 f_{n-4})$$

5) 여기에서 얻어진 수정치와 앞의 예측치를 이용하여 다음과 같은 보정 수정치를 계산하고 이 값을 최종계산 값으로 한다.

$$r_{n+1} = r_{n+1}^c - \frac{863}{(19087+863)} (r_{n+1}^c - r_{n+1}^p)$$

$$v_{n+1} = v_{n+1}^c - \frac{863}{(19087+863)} (v_{n+1}^c - v_{n+1}^p)$$

6)  $t_{n+1} = t_n + h$  관계로 시간을 증가시키고 다음단계의 계산에 사용할 초기치 값과 예측치, 수정치를 결정한다.

7) 단계 2)로 돌아가 반복계산하여 원하는 시간에서 계산을 종료한다.

절단 오차를 고려하지 않고 단순 ABM 방법으로 계산하는 경우는 단계 3), 5)를 생략하면 계산 정밀도는 다소 떨어지지만 보다 간단히 계산할 수도 있다.

### 3. 차분량의 표계산에 의한 적분방법

위의 방법과 달리 초기치로 부여한 각시간에 대해 적분 시간간격  $h$ 와 미분식  $f(t, r)$ 을 곱한 양  $hf$  값의 내림 차분표 값으로부터 다음시간의 물리량을 계산하는 방법인데 수치계산 방법은 다음과과정에서 이해될 수 있다.

$r = r(t)$ 을 시각에 대해 테일러 전개식으로 정리하고 지수함수의 수열관계식을 대입하면 다음의 (16), (17)식과 같이 나타낼 수 있다.

$$r_{n+1} = r_n + h dr_n/dt + (h^2/2!) d^2 r_n/dt^2 + (h^3/3!) d^3 r_n/dt^3 + \dots = r_n + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (hd/dt)^n / n! \right] r_n \quad (16)$$

$$\Delta r_n = (e^{hD} - 1) r_n \quad (17)$$

여기에서  $\Delta r_n \equiv r_{n+1} - r_n$ ,  $h = t_{n+1} - t_n$ ,  $D \equiv d/dt$  이다.

따라서 (17)식에서 알 수 있는 것 처럼 올림차의 연산자는  $\Delta = e^{hD} - 1$ 와 같다.

동일한 방법을 이용, 내림차 순으로 정리한 테일러 전개식은 (18)과 같고 이 식을  $\nabla r_n \equiv - (r_{n-1} - r_n)$  관계와 지수의 수열관계식으로 다시 정리하면 (19)식이 얻어진다.

$$r_{n-1} = r_n + \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (-hd/dt)^i / i! \right] r_n \quad (18)$$

$$\nabla r_n = (1 - e^{-hD}) r_n \quad (19)$$

따라서 내림차 연산자는  $\nabla = 1 - e^{-hD}$  와 같이 구해지고 이 연산자 관계로 부터  $hD = -\ln(1 - \nabla)$  식을 얻을 수 있다.

이 식에 올림, 내림차 연산자의 상호 관계  $\Delta = \nabla(1 - \nabla)^{-1}$  을 곱하여 정리하면  $\Delta = -\frac{\nabla}{(1 - \nabla)\ln(1 - \nabla)} hD$  로 되어 분모의 자연 대수를 수열로 정리 대입한 다음 물리량  $r_n$  에 적용하면 아래와 같다.

$$\Delta r_n = \left(1 + \frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \frac{3}{8} \nabla^3 + \frac{251}{720} \nabla^4 + \frac{95}{288} \nabla^5 + \dots\right) hD r_n$$

따라서  $t_{n+1}$  시각의 값은 표 4에 나타난 바와 같은 내림차의 양을 계산하여 아래의 관계식에서 구할 수 있다.

$$r_{n+1} = r_n + R_n + \frac{1}{2} \nabla R_n + \frac{5}{12} \nabla^2 R_n + \frac{3}{8} \nabla^3 R_n + \frac{251}{720} \nabla^4 R_n + \frac{95}{288} \nabla^5 R_n + \dots \quad (20)$$

여기에서  $R_n \equiv hD r_n = h dr_n/dt = hf(t, r, v)$  을 뜻한다.

#### 4. 가우스-잭슨 방법

앞과 같이 차분표로 부터 2차 미분식을 적분하지만 앞의 수치계산 방법과 달리 연립 1차 미분식에 대한 계산과정을 거치지 않고 직접 구하는 방법이다. 이 계산방법은 초기치의 갯수를 늘려가면 갈수록 정확도가 증가하는 고정밀도의 다단계 적분법으로서 가우스 잭슨법이라 불리우고 있다.

표5의 차분 테이블에서 보는 바와 같이 제2차 차분량은  $\Delta r_n - \nabla r_n = K r_n$ 로 연산자  $K$ 는

$$K = \Delta - \nabla = e^{hD} + e^{-hD} - 2 = hD^2 + (1/12)h^4D^4 + (1/360)h^6D^6 + (1/20160)h^8D^8 + \dots$$

와 같이 전개되어 이를 정리하면 식 (21)로 나타낼 수 있다.

$$1 = [K^{-1} + 1/12 - (1/240)K + (31/60480)K^2 - (289/3628800)K^3 + (317/22809600)K^4 - \dots] h^2 D^2 \quad (21)$$

따라서 위의 차분표에서 사용한 자료의 다음 시각  $t_m$ 에 대한 물리량은 위의 (21)식 양변에  $r_m$  을 곱하여 얻은 관계식 (22)로 구한다.

$$r_m = K^{-1} X_m + (1/12) X_m - (1/240)K X_m + (31/60480)K^2 X_m - (289/3628800)K^3 X_m + (317/22809600)K^4 X_m - \dots \quad (22)$$

여기에서  $X_m \equiv h^2 D^2 r_m = h^2 d^2 r_m / dt^2 = h^2 f(t, r_m)$  을 말하고 이  $K^p X_m$ , ( $p = -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ ) 값은 차분 표를 만들어 구한다. 자세한 과정은 이전에 발표된 천체력 및 궤도계산 논문(김갑성 1995)에 자세히 설명되어 있다.





본 연구에서는 연속한 9시간의 위치를 초기치로 주었는데 이들 값에서 도출한 차이값과 합을 이용하여 구한 차분표 값으로부터 구하고자 하는 위치, 속도 및 가속도 양을 차례대로 계산하였다.

### III. 2체 문제의 정밀 해

궤도 역학분야의 많은 문제 중에서 해석학적 정밀해가 구해진 것은 2체 문제라 할 수 있다. 이 2체 문제를 해석학적으로 다루어 해결한 사람은 뉴우튼이 최초였는데 태양-행성간의 이체 문제를 뉴우튼 역학체계를 이용하여 풀면 케플러 운동법칙이 유도되어 천체에 대한 모든 운동 역학적 현상이 자연스럽게 이해된다. 이후 많은 해석학자들에 의해 보다 일반적인 경우에도 적용할 수 있도록 독특하게 개발된 해법이 등장하였다.

실제로 임의의 시각에 대한 천체의 위치 및 속도는 케플러 제 2법칙에서 유도한 고전적 케플러 식을 이용하여 결정한다. 그러나 이심률이 1에 가까운 근 포물선 궤도에 대해서는 계산의 정확도가 상당히 감소하고 시행착오 방법으로 근을 구하는 계산시간도 증가하게 된다. 따라서 본 연구에서는 어느 형태의 궤도에서나 높은 정밀도로 그 궤적을 계산할 수 있도록 특수하게 개발된 만능변수(universal variable)를 도입한 방법을 선택하였다. 여기에서 만능변수  $x, z$  란 질량, 거리, 장반경에 관계된 양으로  $dx/dt = \sqrt{\mu}/r, z = x^2/a$  와 같이 정의(Bate 의 3인, 1971)되었다.

이체 문제의 정밀해를 만능변수로 구하는 단계적 계산과정은 다음과 같다.

1) 초기시각  $t_0$  때의 위치와 속도  $r_0, v_0$  값에서 거리  $r_0 = |r_0|$ 와 장반경  $a$ 를 궤도에너지  $E = v_0 \cdot v_0/2 - \mu/r_0$  값으로부터  $a = -\mu/2E$ 와 같이 구한다.

2) 시각  $t$  때의 만능변수  $x, z = x^2/a$  값을 다음과 같은 뉴우튼 반복계산 방법으로 구한다.

① 초기 추정치를 타원궤도 ( $E < 0$ )의 경우는  $x_0 \approx \frac{\sqrt{\mu}}{a}(t - t_0)$ , 쌍곡선궤도 ( $E > 0$ )의 경우는

$$r_0 = |r_0|, x_0 \approx \pm \sqrt{-a} \ln \left[ \frac{-2\mu(t - t_0)}{a[(r_0 \cdot v_0) \pm \sqrt{-\mu a(1 - r_0/a)}]} \right]$$

로 설정하고 이 값으로 결정되는 나머지 만능변수의 초기치  $z_0 = x_0^2/a$  를 각각 계산한다. 단 쌍곡선 궤도의 초기 추정치 관계식 중  $\pm$ 부호는  $t - t_0$  값의 부호에 따른다.

② 위의 추정치와 초기위치, 속도, 장반경 값에 대응되는 비행시간  $t_n$ 을 계산한다.

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[ \frac{r_0 \cdot v_0}{\sqrt{\mu}} x_n C(z_n) + (1 - \frac{r_0}{a}) x_n^3 S(z_n) + r_0 x_n \right]$$

③ 이 값에 대한 미분값을 계산한다.

$$\frac{dt}{dx} \Big|_n = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[ x_n^2 C_n + \frac{r_0 \cdot v_0}{\sqrt{\mu}} x_n (1 - z_n S_n) + r_0 (1 - z_n C_n) \right]$$

④ 추정치에 대한 보정작업을 다음과 같이 한다.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{t - t_n}{dt/dx \Big|_n}$$

⑤ 보정치  $\Delta x_n \equiv \frac{t-t_n}{dt/dx|_n}$  가  $|\Delta x_n/x_n| < 10^{-m}$  을 만족시켜 더 이상 보정할 필요가 없을 때

까지 단계 ②,③,④를 반복계산 ( $n=1,2,3,\dots$ )하여 근  $x$  를 결정한다.

여기에서  $m$ 은 6 혹은 더 큰 값으로 설정한다.

3) 위에서 구한  $x, z$  값과 다음의  $f, g$  값으로부터 위치  $r = fr_0 + gv_0$ 을 결정한다.

$$f = 1 - \frac{a}{r_0} \left(1 - \cos \frac{x}{\sqrt{a}}\right) = 1 - \frac{x^2}{r_0} C(z), \quad g = t - \frac{x^3}{\sqrt{\mu}} S(z)$$

4) 다음의  $\dot{f}, \dot{g}$  값을 계산하여 속도  $v = \dot{f}r_0 + \dot{g}v_0$ 를 결정한다.

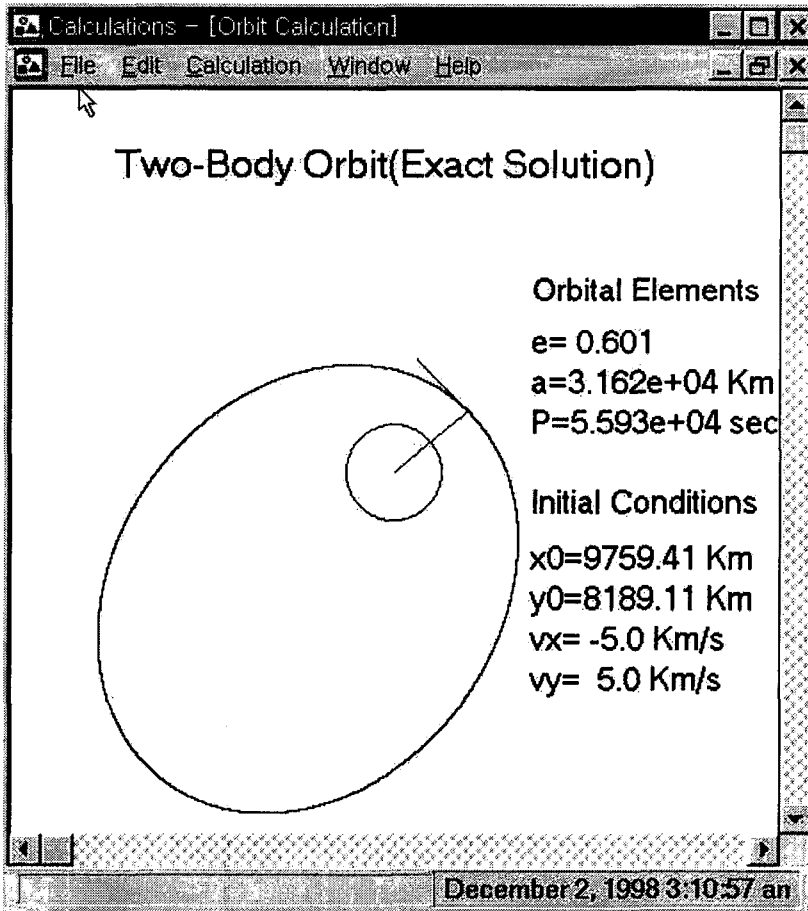


그림 1. 만능변수방법을 이용하여 구한 2체 정밀궤도

$$f = -\frac{\sqrt{\mu a}}{r_0 r} \sin \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{\mu}}{r_0 r} x(zS(z) - 1), \quad \dot{g} = 1 - \frac{a}{r} (1 - \cos \frac{x}{a}) = 1 - \frac{x^2}{r} C(z)$$

여기에서 사용된 함수  $C(z)$ ,  $S(z)$ 는  $z$ 값에 따라 각각 다음과 같다.

- ① 타원궤도( $z > 0$ )의 경우 :  $C(z) = (1 - \cos \sqrt{z})/z$ ,  $S(z) = (\sqrt{z} - \sin \sqrt{z})/\sqrt{z}^3$
- ② 쌍곡선궤도의 ( $z < 0$ ) 경우 :  $C(z) = (1 - \cosh \sqrt{-z})/z$ ,  
 $S(z) = (\sinh \sqrt{-z} - \sqrt{-z})/\sqrt{-z}^3$

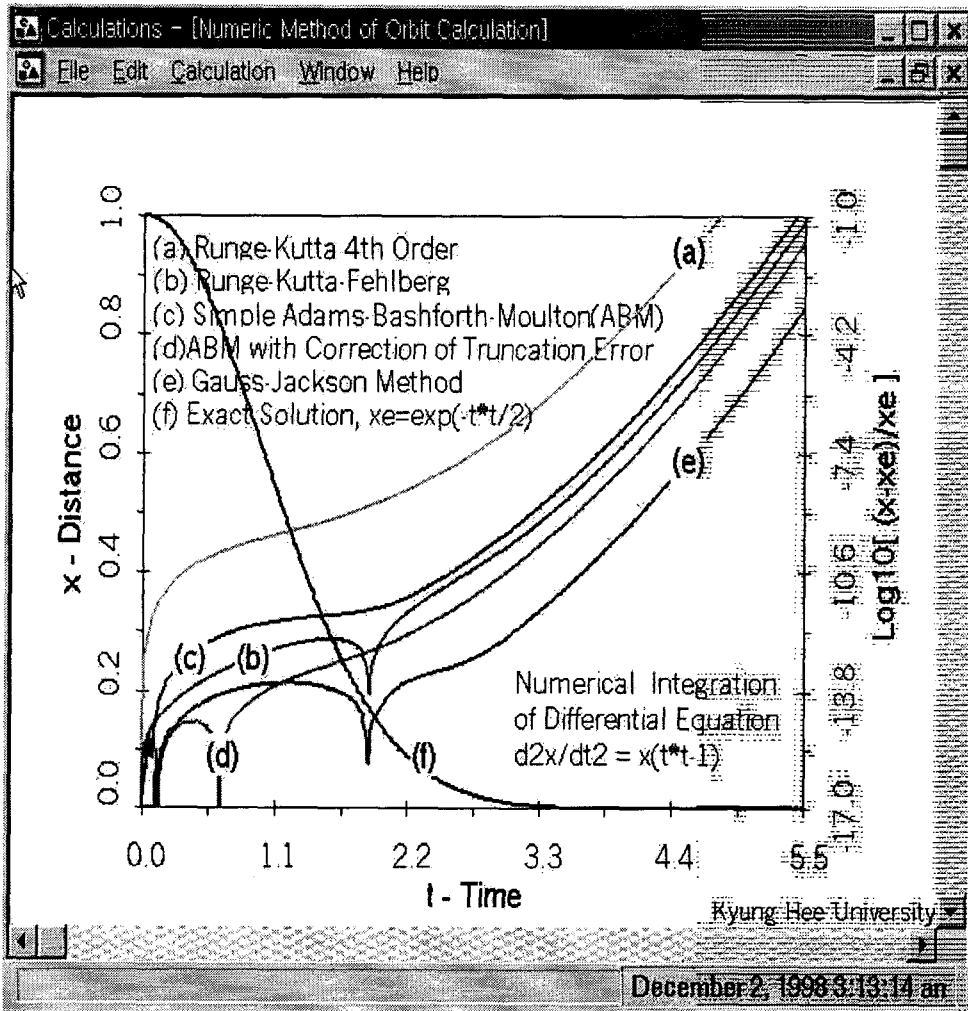


그림 2. 수치계산방법의 정밀도 검증

③ 근 포물선 ( $|z| \ll 1$ )의 경우 :  $C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [(-z)^k / (2k+2)!]$ ,

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [(-z)^k / (2k+3)!]$$

이상의 계산과정에 이심률이 1에 근접할 경우 ( $|z| \ll 1$ )는 수식의 삼각함수를 계산하는데 정밀도가 상당히 떨어지기 때문에 단계 4)의 ③과 같이 수열로 표시한 관계식을 이용하면 높은 정밀도로 구할 수 있다.

그림 1에 만능변수를 도입한 케플러 방법으로 계산한 2차원 정밀 궤도가 나타나 있다. 초기위치 및 초기속도는 각각  $r_0 = x_0i + y_0j$ ,  $v_0 = vx_i + vy_j$  와 같이 주어져 있다. 이 방법을 이용하여 궤적을 그릴 경우 미분식의 수치 계산방법으로 구하는 것 처럼 특정시각의 물리량을 초기치로 부터 지루하게 적분해 나가야 얻어지는 것과 달리 어느 시각이든 순간에 정확한 위치를 알 수 있어 손 쉽게 수치 계산의 정밀도를 판별할 수 있다.

#### IV. 결과 및 토의

본 연구에서는 궤도역학계산 등에 이용되는 수치적분방법의 정밀도 점검을 위해  $d^2x/dt^2 = f(t, x)$  형태의 상 미분방정식을 선택, 시험 계산하였는데 해석학적인 해가 유도되는 함

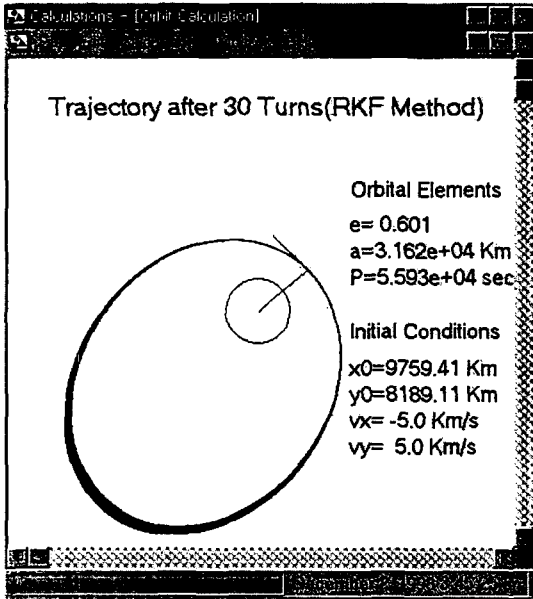


그림 3. RKF 방법을 이용하여 수치계산 한 30회전 후의 궤적

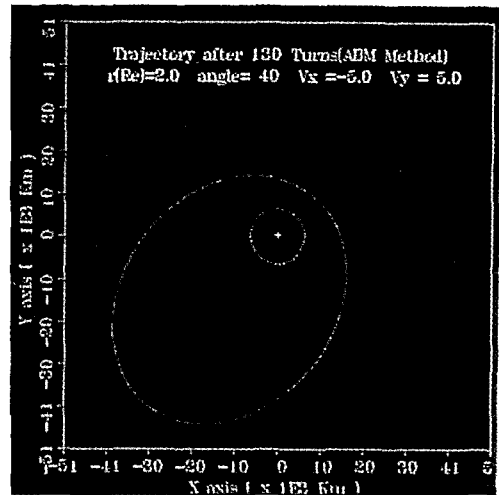


그림 4. ABM 방법으로 수치계산 한 130회전 후의 궤적

수  $f(t, x) \equiv -x(t^2 - 1)$  을 대상으로 일차원 수치계산을 수행하였다. 그림 2에 위의 미분방정식을 수치 적분한 계산결과와 정밀해  $x = \exp(-t^2/2)$ 가 비교되었다. 여기에서 시각  $t$ 의 정밀해를  $x_e(t)$ , 수치적분으로 구한 계산치를  $x(t)$ 라 할 때 이 값들의 편차의 정도를 알아보려고 시각  $t$ 에 따른  $\log(|(x-x_e)/x_e|)$  값을 계산하여 정밀해  $x_e(t)$ 와 함께 그림에 나타내었다.

사용된 수치 적분 방법은 4차의 룽게-쿠타 방법, 6차의 RKF 방법, 단순 아담-배시포드-몰튼 방법, 절단오차까지 보정한 아담-배시포드-몰튼 방법, 9개의 초기치를 사용하는 가우스 잭슨 방법으로 모두 5가지 이다.

계산결과에 의하면 단순 ABM 방법(c)보다는 6차의 RKF 방법(b)이 정밀도가 높고 이보다는 절단오차가 고려된 ABM 방법(d)이 보다 정확한 계산결과를 보인다. 그러나 그림에 나타나 있는 바와 같이 (d) 곡선의 ABM 방법보다 (e)의 가우스 잭슨 방법이 약 1000배 정도의 정밀도를 계속 유지하는 것으로 보아 다른 어떠한 방법보다는 가우스 잭슨 방법에 의한 수치적분방법이 가장 우수한 것으로 나타났다.

마찬가지의 목적으로 본 연구에서는 2체문제  $d^2r/dt^2 = -G(M_e + m_s)r/r^3$ 를 대상으로 제 3장에서 기술한 만능변수도입 방법의 정밀해와 제 2장에서 언급한 각각의 수치방법으로 계산한 수치해를 비교하였다. 우선 2차원 극좌표의 초기위치 ( $r=2Re, \theta=40^\circ$ ), 초기속도  $V_x=-5km/s; V_y=5km/s$ 가 주어진 위성체의 지구-위성간의 2체문제를 정밀해와 수치해로 풀어보았는데 이때 결정되는 위성의 궤도요소로 장반경, 주기, 이심률이 각각  $a = 3.162e + 04$  Km,  $P = 5.593e + 04$ (sec),  $e = 0.601$ 와 같다. 섭동항을 전혀 고려하지 않았기 때문에 그림 1과 같이 정밀해는

표 6. 가우스 잭슨 방법으로 계산한 수치해와 정밀해의 비교

t(sec)	calculated r	calculated v	(r-re)/re	(v-ve)/ve
1.0e+05	3.766253e+07	2.926665e+03	6.321525e-07	-3.831623e-05
5.0e+05	1.851130e+07	5.520790e+03	3.935151e-05	-4.631298e-05
1.0e+06	2.705386e+07	4.107562e+03	9.937523e-05	-1.337172e-04
1.5e+06	3.427287e+07	3.265034e+03	1.423690e-04	-1.963943e-04
2.0e+06	3.997732e+07	2.709012e+03	1.688653e-04	-2.612086e-04
2.5e+06	4.432338e+07	2.319893e+03	1.777265e-04	-3.189316e-04
3.0e+06	4.745148e+07	2.048243e+03	1.655059e-04	-3.428831e-04
3.5e+06	4.945834e+07	1.874313e+03	1.264071e-04	-2.906689e-04
4.0e+06	5.040256e+07	1.791878e+03	5.145078e-05	-1.176715e-04
4.5e+06	5.031090e+07	1.799894e+03	-7.334167e-05	1.947416e-04
5.0e+06	4.918137e+07	1.898358e+03	-2.704400e-04	6.246174e-04
5.5e+06	4.698296e+07	2.088717e+03	-5.778834e-04	1.135377e-03
6.0e+06	4.365213e+07	2.378735e+03	-1.064571e-03	1.718971e-03
6.5e+06	3.908618e+07	2.791664e+03	-1.866552e-03	2.425714e-03
7.0e+06	3.313950e+07	3.384724e+03	-3.281253e-03	3.397316e-03

위의 궤도요소를 갖는 타원궤도이다. 그러나 수치 계산한 값은 계산상의 오차가 포함되어 누적되기 때문에 시간이 경과할수록 정밀해의 궤도로부터 벗어나는 결과를 가져온다. 본 연구에서는 계산을 시작한 지점의 위치와 속도가 공전을 거듭할수록 얼마나 정밀해와 차이가 나는지를 표와 그림3과 4에 나타내었다. 룽게-컷터-펠버그(RKF)의 방법으로 초기위치에서 수치계산을 시작하여 30바퀴를 돌고 난 후의 궤적을 보면 그림 3에 나타난 바와 같이 원지점 부근은 중심으로 넓은 폭의 궤적 자국을 확인할 수 있다. 이것은 계산상 많은 오차가 누적되었기 때문인데, 프로그램 상 모든 단계에서 가속도 함수를 호출함으로 인해  $n$ 체 문제나 다수의 섭동항을 포함할 경우에 상대적으로 많은 시간이 소요된다. 또한 다른 방법에 비해 많은 오차를 가져왔는데 적분간격을 좁히지 않으면 비슷한 정밀도의 결과를 얻을 수 없었다. 적분간격을 1/10로 줄일 경우 10배 이상의 계산시간이 소요되었으며 그럼에도 정밀도가 많이 뒤떨어져 궤도 계산에 전혀 적합하지 않는 것으로 나타났다. 그에 비해 그림 4의 ABM 방법으로 계산할 경우 130회전 한 이후에도 거의 정밀해와의 오차가 크지 않은 것으로 나타나 있다. 가우스 잭슨 방법에 의한 결과도 눈으로 보기에는 그림 4와 동일한 모습을 보인다. 표 6에 같은 초기 조건으로 130회전 선회하는 동안  $10^5$ 초 단위로 가우스 잭슨 방법을 이용하여 계산한 거리  $r$  및 속도  $v$  를 정밀해의 거리  $r_e$ , 속도  $v_e$ 와 비교한 것으로 상대적으로 높은 정밀도가 유지되고 있는 것을 알 수 있다.

궤도 계산결과 ABM 방법의 경우 6차의 정밀도로 계산되는 차분법을 이용하고 절단오차도 고려하였지만 실제로 절단오차를 고려한 효과가 그리 크지 않은 것으로 나타났다. 그러나 가우스 잭슨법처럼 많은 수의 초기치를 사용하여 훨씬 높은 차수의 정밀도로 계산할 수 있는 방법이 다른 계산방법 보다는 정확하게 궤도계산을 수행할 수 있는 것으로 나타났다. RKF 방법은 초기의 정밀도를 계속 유지할 수 없어 장시간의 적분을 수행하는 궤도계산에는 적합하지 못하지만 다단계적분에 요구되는 초기치를 제공하는 계산으로 유용하게 활용될 수 있으며 ABM방법이나 차분법 정도라면 어느 정도 궤도 계산에 적당한 방법이라 할 수도 있지만, 정밀 궤도계산에는 역시 차분 표로부터 정밀도를 자유롭게 조절할 수 있는 가우스 잭슨 방법이 가장 적합하다는 결론을 얻었다.

### 참고 문헌

- 김갑성, 1995, 천문학논총, 제 8권 1호, 187  
 신종엽, 안영숙, 박필호, 박은광, 박종욱, 1995, 한국우주과학회지, 제 12권, 1호, 78  
 윤재철, 김은규, 1997, 한국우주과학회지, 제 14권 1호, 136  
 지명국, 박필호, 1997, 한국우주과학회지, 제 14권 2호, 375  
 R. Bate, D. Mueller, J. White 1971, "Fundamentals of Astrodynamics", Dover