

---

 論 文
 

---

大韓造船學會論文集  
 第 34 卷 第 4 號 1997年 11月  
 Journal of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 34, No. 4, November 1997

## 혼합형 유한요소법에 의한 박판보의 구조해석

박성환\*

### Structural Analysis of Thin-walled Beams by Using a Mixed Finite Element Method

by

Seong-Whan PARK\*

#### 요 약

본 논문에서는 박판보 구조물의 전단변형 효과를 보다 정확히 해석할 수 있는 모델인 불균일 전단 뒤틀림 보이론에 대하여 혼합형 유한요소 해석법을 적용하였다. 일반적으로 알려져 있는 바와 같이 혼합형 유한요소는 구조물의 변위 및 응력을 해석함에 있어서 변위형 유한요소에 비해서는 정도면에서 보다 균형 잡힌 해석 결과를 제공하는 특성이 있음을 밝힌다. 계산예로서, 단면의 형상이 불연속적으로 변화하는 변단면 박판보에 양단 비틀림 모멘트가 작용하는 전형적인 보의 굽힘-비틀림 연성 거동 문제에 대하여 개발된 유한요소 해석모델을 적용함으로써 그 유용성을 확인하였다.

#### Abstract

A mixed type finite element method is applied to the nonuniform shear warping beam theory which is very useful for the structural analysis of thin-walled sectional beams considering the shear deformation. As known generally, it is shown that the mixed type finite element method, compared with the displacement type one, can give more balanced accuracy of results in calculating the stresses and displacements of the structure. In this paper, one typical example, the flexural-torsional problem of a discontinuously variable sectional beam under coupled end torsional moments, is selected and analyzed to validate the usefulness of the developed beam element.

---

발 표 : 1997년도 대한조선학회 춘계연구발표회 ('97. 4. 26)

접수일자 : 1997년 5월 28일, 재접수일자 : 1997년 7월 26일

\* 한국기계연구원 구조시스템연구부

1. 서 언

박판보는 조선, 토목, 건축, 항공기산업 등 여러 공간, 수송 산업분야에서 널리 활용되고 있는 기본적인 구조형태로서, 이는 선체, 교량, 초고층빌딩, 항공기동체 등과 같이 전체구조물의 형태로 나타나기도 하고, 혹은 판구조물에 부착된 보강재의 형태로 나타나기도 한다. 이렇게 폭넓은 활용성에 기인하여 구조역학 분야에서는 금세기 초부터 박판보의 구조거동을 보다 정확히 해석하고자 하는 노력이 체계적으로 있어 왔다. 특히, 보의 길이가 짧아지거나 혹은 보의 단면이 비대칭 개단면 형상으로 인하여 굽힘-비틀림 연성변형이 발생하게 되면 전단변형의 효과가 커지게 되는데, 이러한 경우 통상의 Bernoulli-Kirchhoff 가정에 기초한 Euler-St. Venant의 보 이론으로서는 그 적용의 한계가 있다.

굽힘 및 비틀림거동에 관한 전단변형의 효과를 고려하는 한 방법으로서, 저자는 Euler의 굽힘회전각, 혹은 St. Venant의 순 비틀림률과는 별개로서의 전단변형을 보의 축방향 변위장에 독립적으로 고려하는, 소위 불균일 전단 뒤틀림 보이론(nonuniform shear warping beam theory)에 관하여 일련의 논문을 발표하고 있다.<sup>[1-4]</sup> 먼저, 논문 [1]과 [2]에서는 본 불균일 전단 뒤틀림 보이론의 기본가정 및 전단 뒤틀림함수에 관한 설명과 함께, 이를 대칭 단면보의 굽힘 및 비틀림 문제에 국한하여 그 해석해를 도출해 봄으로써 그 유용성을 확인한 바 있다. 한편, 문헌 [3]과 [4]에서는 본 박판보 이론에 유한요소법을 적용하여 그 활용성을 보다 일반화하고 있는데, 특히 문헌 [4]에서는 본 이론에 유한요소법을 활용할 경우, 불연속 변단면보의 굽힘-비틀림 연성거동에서 나타나는 불연속 접합부의 응력집중 현상 또한 높은 정도의 정확도로서 추정이 가능함을 구체적인 수치계산을 통하여 보이고 있다.

이러한 일련의 연구에 이어서, 본 논문에서는 본 불균일 전단 뒤틀림 보이론에 혼합형 유한요소법(mixed type finite element method)을 적용함으로써, 기 발표된 변위형 유한요소 해석법의 결

점에 대한 보완과 함께, 본 박판보 이론의 활용성을 극대화하고자 한다. 일반적으로 혼합형 유한요소는 변위 및 응력 등을 해석함에 있어서 변위형 유한요소에 비해서는 보다 균형잡힌 정도(balanced accuracy)의 해석결과를 제공하는 특징이 있는 것으로 알려져 있는 바, 본 연구에서는 구체적인 계산예를 통하여 이 사실을 확인하기로 한다. 혼합형 유한요소법의 정식화는 Hellinger-Reissner의 변분원리로부터 출발하며, 본 논문에서는 인접 요소간 응력의 연속성이 보장되지 않는 불연속 응력형 혼합유한요소(mixed elements with discontinuous stresses)를 개발한다. 또한, 혼합형 유한요소 정식화에서 필수적으로 요구되는 보의 일반화된 응력-변형을 관계식은 본 박판보 이론의 변위장에 3차원 일반 탄성론적인 접근법을 이용하여 도출한다. 구체적인 계산예로서는 참고문헌 [5]와 [6]에서 나타나고 있는 불연속적 변단면 박판보에 양단 비틀림 모멘트가 작용하는 전형적인 보의 굽힘-비틀림 연성거동 문제를 대상으로 한다

2. 혼합형 유한요소 정식화

2.1 변위장

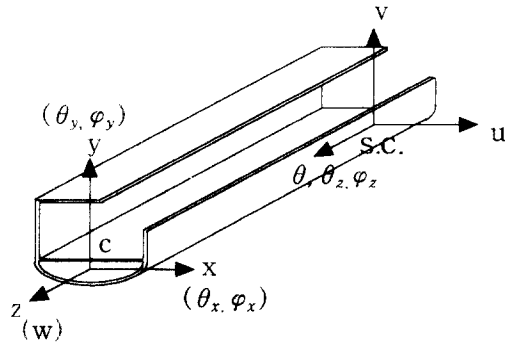


Fig 1 Coordinates and degrees of freedom

임의 형상의 박판 단면보에 있어서, Fig. 1에서 보이는 바와 같은 좌표계 즉, 보의 길이방향으로 z 축을, 단면의 도심(혹은 중심)을 원점으로 하여 주축방향으로 x, y 축을 갖는 직각 우수좌표계에 대하여, 불균일 전단변형을 고려한 3차원 변위장

은 다음과 같이 설정될 수 있다.<sup>[3,4]</sup>

$$U(x, y, z) = u(z) - (y - y_s)\theta(z),$$

$$V(x, y, z) = v(z) + (x - x_s)\theta(z),$$

$$W(x, y, z) = w(z) - x\psi_y(z) + y\psi_x(z) + \omega(x, y)\psi_z(z) + V_x(x, y)\psi_{nx}(z) + V_y(x, y)\psi_{ny}(z) + V_\omega(x, y)\psi_{nz}(z). \quad (1)$$

여기서,  $u(z), v(z), \theta(z)$  는 단면의 전단중심  $(x_s, y_s)$ 에 있어서의  $x, y$  각 방향의 변위 및 비틀림각을 나타내며,  $w(z)$  는 단면 중심에서의 축방향 변위,  $\psi_x(z), \psi_y(z), \psi_z(z)$  는  $x, y$  각방향의 유효 단면 회전각과 비틀림률(rate of torsional angle)을  $\omega(x, y)$  는 St. Venant의 비틀림에 관한 뒤틀림함수(torsional warping function)를 의미한다. 또한,  $V_x(x, y), V_y(x, y), V_\omega(x, y)$  와  $\psi_{nx}(z), \psi_{ny}(z), \psi_{nz}(z)$  는 각 변형모드에 있어서의 전단 뒤틀림 변형의 면내 분포함수와 축방향 분포함수를 의미하는 바, 특히, 전단 뒤틀림 변형의 면내분포함수  $V_x(x, y), V_y(x, y), V_\omega(x, y)$  는 다음과 같이 정의되는 단면 특성치 함수이다.

$$G \left\{ \frac{\partial^2 V_x(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x(x, y)}{\partial y^2} \right\} = -Ex \quad \text{in sectional area,} \quad (2-1)$$

$$G \frac{\partial V_x(x, y)}{\partial n} = 0 \quad \text{on boundary contour,}$$

$$G \left\{ \frac{\partial^2 V_y(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y(x, y)}{\partial y^2} \right\} = -Ey \quad \text{in sectional area,} \quad (2-2)$$

$$G \frac{\partial V_y(x, y)}{\partial n} = 0 \quad \text{on boundary contour,}$$

$$G \left\{ \frac{\partial^2 V_\omega(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_\omega(x, y)}{\partial y^2} \right\} = -E\omega(x, y) \quad \text{in sectional area,} \quad (2-3)$$

$$G \frac{\partial V_\omega(x, y)}{\partial n} = 0 \quad \text{on boundary contour,}$$

단, 여기서  $E, G$  는 재료상수로서, 탄성계수 및 전단 탄성계수를 의미한다.

## 2.2 Hellinger-Reissner의 변분원리

혼합형 유한요소는 변위형 혹은 응력형의 유한

요소와는 달리, 한 개의 요소내 복수장 변수(two-fields variable)를 사용하는 것으로 Hellinger-Reissner의 변분원리에 기초한다.<sup>[7]</sup> 일반 탄성론에 있어서 물체력(body force)이 무시되고, 적합 변위조건(compatible displacement condition)이 항상 만족되는 문제로 그 범위를 국한할 경우, Hellinger-Reissner의 미소변형에 관한 에너지 범함수를 유한요소 형태로 표현하면 다음과 같다.<sup>[7,8]</sup>

$$\begin{aligned} \Pi_R &= \sum_m \Pi_{Rm} \\ &= \sum_m \int_{V_m} \frac{1}{2} \{ \sigma^T (\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}) - \sigma^T \mathbf{C}^{-1} \sigma \} dV \\ &\quad - \int_{S_a} \overline{\mathbf{T}}^T \mathbf{u} dS. \end{aligned} \quad (3)$$

위식에서  $\sigma$  는 응력벡터,  $\mathbf{C}$  는 응력-변형을 관계행렬,  $\overline{\mathbf{T}}$  는 주어진 표면력벡터,  $\mathbf{u}$  는 변위 벡터,  $m$  은 유한요소의 개수를 의미한다.

식 (3)의 범함수는 그 변수로서 변위와 요소응력을 포함하고 있는 바, 이에 관련한 유한요소는 혼합형 유한요소이다. 통상, 이 혼합형 유한요소에는 상기의 두 변수 각각에 관하여 근사계산을 수행하는 혼합형 혼합유한요소(mixed elements in mixed form)와 응력분포에 관해서는 요소간 연속성을 만족시키지 않는 조건하에 정식화의 최종단계에서 변위만을 최종변수로 하는 불연속 응력형 혼합유한요소(mixed elements with discontinuous stresses)의 두 종류가 있는 바<sup>[7]</sup>, 본 논문에서는 후자의 형태를 적용한다.

식 (3)을, 고려하고자 하는 보해석 문제의 유한요소 정식화에 활용하기 위해서는, 해석대상 보이론에 관한 일반화된 응력-변형을 관계식과 단면 절점력 벡터를 미리 정의하여야만 한다. 만일, 본 연구의 대상이 되는 보이론에 대한 일반화된 응력-변형을 관계식과 절점변위벡터  $\mathbf{d}$  에 대응하는 단면 절점력 벡터  $\overline{\mathbf{Q}}_m$  를 다음과 같이 도입할 수 있다면,

$$\sigma_R = \mathbf{C} \epsilon_R, \quad (4)$$

$$\int_{S_a} \overline{\mathbf{T}}^T \mathbf{u} dS = \overline{\mathbf{Q}}_m^T \mathbf{d}, \quad (5)$$

식 (3)은 다음과 같이 변환하여 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi_R &= \sum_m \Pi_{Rm} \\ &= \sum_m \left[ \int_l (\beta^T P^T B d - \frac{1}{2} \beta^T P^T C^{-1} P \beta) dz \right. \\ &\quad \left. - \overline{Q_m^T} d \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

단, 여기서  $l$ 은 보요소의 길이를 의미하며,  $B$ 는 절점변위벡터  $d$ 와 기하학적 변형률벡터  $\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ 와의 변환관계를 나타내는 행렬로서 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\hat{\epsilon} = Lu = LNd = Bd. \quad (7-a)$$

또한,  $\sigma_R, \epsilon_R$ 은 일반화된 보 응력, 보 변형률 벡터로서 다음의 2.3절에서 자세히 정의되며, 절점 변위벡터  $d$ 는 식 (1)의 변위장에서 주어진 바와 같이 각 절점당 다음의 10 자유도를 가진다.

$$d^T = \{u \ v \ w \ \psi_x \ \psi_y \ \theta \ \psi_z \ \psi_{nx} \ \psi_{ny} \ \psi_{nz}\} \quad (7-b)$$

한편, 식 (6)의 변환에는 변위벡터  $u$ 와 요소내 일반화 보응력  $\sigma_R$ 에 관하여 다음과 같이 근사를 포함하고 있다.

$$u \approx Nd, \quad (8)$$

$$\sigma_R \approx P\beta, \quad (9)$$

여기서,  $N$ 은 요소내 절점변위 형상함수를,  $P$ 는 응력분포 함수를,  $\beta$ 는 응력 파라메타를 의미한다.

본 논문에서 사용되고 있는 불연속 응력형 혼합 유한요소는 상기 식 (9)의 응력 분포함수를 가정함에 있어서, 각 요소상호간의 연속성은 보장하지 않은 채, 각 요소내부에서의 평형조건만을 만족하는 응력분포를 가정하는 것으로, 식 (6)의 단면절점력 벡터  $\overline{Q_m}$ 가 응력 파라메타  $\beta$ 에 독립적인 것으로 간주된다. 따라서, 응력 파라메타  $\beta$ 에 대하여 식 (6)의 범함수를 변분하게 되면, 다음과 같은 정류조건(stationary condition)을 얻을 수 있고,

$$\beta = H^{-1} Gd, \quad (10)$$

단,

$$G = \int_l P^T B dz, \quad H = \int_l P^T C^{-1} P dz.$$

이를 식 (6)에 대입하여 정리하면, 절점 변위벡터  $d$ 만이 최종의 미지수로 남게되는 다음과 같은 범함수를 얻게된다.

$$\sum_m \Pi_{Rm} = \sum_m \left[ \frac{1}{2} d^T K_m d - d^T \overline{Q_m} \right], \quad (11)$$

단,

$$K_m = G^T H^{-1} G, \quad (12)$$

여기서,  $K_m$ 는 요소강성행렬을 의미한다.

### 2.3 일반화된 보 응력-변형률 관계

전항에서 서술한 바와 같이 혼합형 유한요소 정식화를 위해서는 응력-변형률 관계식이 반드시 전제되어야 한다. 식 (4)의 일반화된 응력-변형률 관계식을 정의하는 한 방법으로서 3차원 일반 탄성론에서 주어지는 가상일의 개념이 활용될 수 있다. 즉, 3차원 탄성론에서 보의 양단에 작용하는 표면력  $\overline{\tau_{xz}}, \overline{\tau_{yz}}, \overline{\sigma_z}$ 에 의한 가상일은 다음과 같이 주어진다.

$$\delta W_{ext} = \int_A (\overline{\tau_{xz}} \delta U + \overline{\tau_{yz}} \delta V + \overline{\sigma_z} \delta W) dA \quad (13)$$

식 (13)에 식 (1)의 변위장을 대입하게 되면, 다음과 같은 일반화된 보응력을 도출할 수 있다

$$\begin{aligned} \sigma_R^T &= \{ P M_{z-St}, F_x, F_y, M_{z-\omega}, M_y, M_x, M_\omega, \\ &\quad T_V, T_V, T_V, B_V, B_V, B_V \} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, 각각의 보 단면력은 다음과 같이 정의되어지는 것이다.

(a) axial force :  $P \equiv \int_A \sigma_z dA,$

(b) St. Venant's torsional moment :

$$\begin{aligned} M_{z-St} &\equiv \int_A \left\{ \tau_{xz} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y + y_s \right) \right. \\ &\quad \left. + \tau_{yz} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x - x_s \right) \right\} dA, \end{aligned}$$

(c) x-dir. shear force :  $F_x \equiv \int_A \tau_{xz} dA,$

(d) y-dir. shear force :  $F_y \equiv \int_A \tau_{yz} dA,$

(e) torsional warping moment :

$$M_{z-\omega} \equiv \int_A -(\tau_{xz} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial \omega}{\partial y}) dA,$$

(f) y-dir. bending moment :  $M_y \equiv - \int_A x \sigma_z dA,$

(g) x-dir. bending moment :  $M_x \equiv \int_A y \sigma_z dA,$

(h) torsional warping bimoment :

$$M_\omega \equiv \int_A \omega \sigma_z dA,$$

(i) x-dir. nonuniform shear warping moment :

$$T_{V_x} \equiv \int_A \left\{ \frac{\partial V_x}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \tau_{yz} \right\} dA,$$

(j) y-dir. nonuniform shear warping moment :

$$T_{V_y} \equiv \int_A \left\{ \frac{\partial V_y}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \tau_{yz} \right\} dA,$$

(k) torsional nonuniform warping moment :

$$T_{V_\omega} \equiv \int_A \left\{ \frac{\partial V_\omega}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial V_\omega}{\partial y} \tau_{yz} \right\} dA,$$

(l) x-dir. nonuniform shear warping bimoment :

$$B_{V_x} \equiv \int_A V_x \sigma_z dA,$$

(m) y-dir. nonuniform shear warping bimoment:

$$B_{V_y} \equiv \int_A V_y \sigma_z dA,$$

(n) torsional nonuniform warping bimoment :

$$B_{V_\omega} \equiv \int_A V_\omega \sigma_z dA.$$

한편, 식 (14)의 일반화된 보 응력에 대응하는 일반화된 보의 변형률은 다음과 같다.

$$\epsilon_R^T = \{ w' \ \theta' \ \overline{\gamma_x} \ \overline{\gamma_y} \ \overline{\gamma_z} \ \psi_y' \ \psi_x' \ \psi_z' \ \psi_{nx} \ \psi_{ny} \ \psi_{nz} \ \psi_{nx}' \ \psi_{ny}' \ \psi_{nz}' \}, \quad (15)$$

여기서,

$$\overline{\gamma_x} = u' - \psi_y, \quad \overline{\gamma_y} = v' + \psi_x, \quad \overline{\gamma_z} = \theta' - \psi_z.$$

식 (14)와 (15)의 일반화된 응력 및 변형률의 관계를 나타내는 행렬  $C$ 는 보의 단면계수들로 구성되어 지는 값으로 이들 각각의 성분에 관해서는 부록에서 자세히 기술된다.

### 2.4. 요소강성행렬의 계산

일반화된 보의 응력-변형률 관계가 구해졌으므로, 식 (8)과 (9)에서 정의한 요소내 절점변위 형

상합수  $N$ 과 요소내 응력분포함수  $P$ 가 주어지는 경우, 전항에서 기술한 일련의 정식화 과정에 의해 식 (12)로 주어진 요소 강성행렬은 구체적으로 결정되어진다. 본 논문에서는 주어진 10개의 변위 자유도에 관하여서는 다음과 같은 요소 양절점간 선형분포를 가정하며,

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & N_{10} \end{bmatrix}, N_n = \left[ 1 - \frac{z}{l} \quad \frac{z}{l} \right], \quad (16)$$

요소내 응력분포에 관해서는 모든 응력 파라메타가 요소내 일정한 상수를 갖는 다음의 형태를 가정한다.

$$P = I_{14 \times 14}. \quad (17)$$

통상 응력 파라메타의 가정은 본 혼합형 유한요소의 특성을 결정하는 가장 중요한 인자이긴 하나, 변위의 가정처럼 결정적인 형태로 주어지지 않는다.<sup>[9]</sup> 참고문헌 [9]에서는 7자유도 보이론에 대하여 상기의 응력 파라메타 가정형태가 모든 zero-energy 운동모드를 포함시키지 않는 조건을 만족하면서 주어진 문제에 관한 해의 충분한 정도와 수렴성을 보장하고 있음을 보인 바 있다. 물론, 식 (17)과는 달리 선형분포로 가정하거나 혹은 그 이상의 차원을 갖는 분포형태를 가정할 수도 있으나, 저자의 실제 수치경험에 의하면 본 보 요소모델에 있어서는 해의 정도와 수렴성에 거의 영향을 주지 않았다. 식 (17)을 이용하면 식 (10)과 (12)에서 주어진 행렬  $G$ ,  $H$  및 요소 강성행렬  $K_m$ 은 다음과 같이 계산된다.

$$G = \int_l P^T B dz = \int_l B dz, \quad (18)$$

$$H = \int_l P^T C^{-1} P dz = l C^{-1}, \quad (19)$$

$$K_m = G^T H^{-1} G = \frac{1}{l} G^T C G. \quad (20)$$

한편, 본 혼합형 유한요소를 단면의 형상이 보의 길이방향으로 변화하는 변단면 보의 해석에 적용하기 위하여서는 단면중심의 불일치에 관한 수정변환을 가해 주어야한다.[4,5] 즉, 관심을 갖는

한 단면에 인접한 두 보요소의 단면형상이 다른 경우, 그 단면 불연속부에서는 각 단면의 중심 혹은 전단중심의 불일치로 인하여 전단 뒤틀림 변형의 불일치가 발생하며, 따라서, 이러한 불연속부의 영향을 보다 정확히 표현하기 위해서는 전단 뒤틀림 변형에 관한 적합조건을 제한조건으로서 포함시켜야 한다.

불연속 변단면의 전단 뒤틀림 변형에 관한 적합조건을 나타내는 변환행렬을  $T_{wc}$  라하고, 전체 좌표계에 관한 국부 요소좌표계의 회전 및 수평 이동에 관한 변환행렬을  $T_R, T_T$  라 하면 전체좌표계에 관한 국부 요소 강성행렬의 변환관계식은 다음과 같이 주어진다.

$$K_{Gm} = T_{wc}^T T_T^T T_R^T K_m T_R T_T T_{wc} \quad (21)$$

여기서, 각각의 변환행렬의 내용에 관해서는 참고문헌 [4]를 참조할 수 있다.

### 3. 수치계산

개발된 혼합형 유한요소의 특성을 고찰하기 위하여, Fig. 2에서 보이는 바와 같은 불연속 변단면보의 비틀림문제에<sup>[4,6]</sup> 수치해석을 수행하였다. Fig. 2에서 보는 바와 같이, 본 대상 박판보는 그 양단이 상자형상의 폐단면 형상이며, 그 중앙부가 U형상의 개단면으로서, 컨테이너 선박의 대형 갑판개구부를 연상케 하는 계산모델이다. 본 박판보의 양단에 비틀림 모멘트가 작용하는 경우 개단면과 폐단면이 만나는 불연속 접합부에서는 그 불연속성으로 인하여 상당히 복잡한 굽힘-비틀림 연성 거동이 발생한다. 이에 관하여, 참고문헌 [4]에서는 불균일 전단 뒤틀림 보 모델이 이러한 문제의 해석에 매우 효과적임을 증명한 바 있으나, 본 논문에서는 전술한 혼합형 유한요소 모델이 변위형 유한요소 모델과 어떤 차이를 보이는가에 관하여 보다 자세히 검토하고자 한다.

작용하중의 대칭성과 대상부위의 길이방향 대칭성을 고려하여 실제 계산모델은 길이방향 반쪽만을 택하는데, 이의 길이방향 유한요소 분할은 Fig. 2에서 보이는 바와 같다. 또한, Fig. 2에서는

단면계수의 계산을 위한 단면내 요소분할 상태도

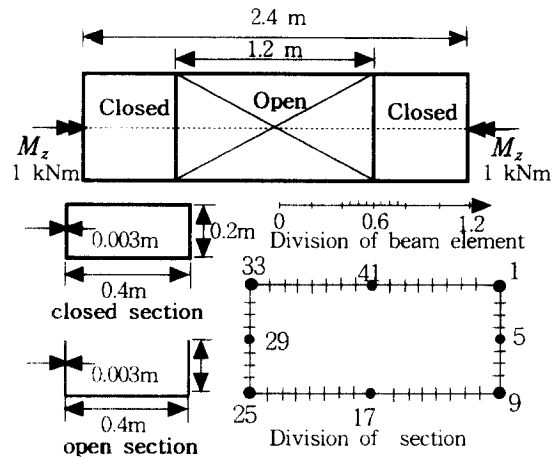


Fig. 2 Torsional problem of a box girder structure with open cross-section

보이고 있는데, 본 단면내 요소 분할은 식 (2)에서 정의하고 있는 전단 뒤틀림 분포함수를 계산하기 위한 것이다.<sup>[1]</sup>

계산의 결과로서 Fig. 3과 Fig. 4는 단면 비틀림각과 비틀림 모멘트 값에 관한 길이방향 분포를 변위형 유한요소 해석결과와 비교하고 있다. 먼저, 변위(비틀림각)에 대해서 양 방법은 거의 동일한 정도의 결과를 제공하고 있으나, 대표적인 응력 결과로서의 단면 비틀림 모멘트에 대해서는 그 차이가 매우 큼을 알 수 있다. 즉, 혼합형 유한요소의 단면 결과력은 가해준 외력 비틀림 모멘트와 정확히 평형을 이루고 있으나, 변위형 유한요소의 경우 그 오차가 매우 크다. 이는 변위형 유한요소는 변위에 관한 적합성만을 정확히 만족할 뿐, 결과되는 응력의 평형에 관해서는 근사적인 해만을 제공한다는 본질적인 제약조건에 기인하는 바, 본 계산예와 같은 고도의 불연속 변단면보 해석의 경우에 있어서는 그 결점이 심각하게 나타남을 알 수 있다. 여기에 비하여, 혼합형 유한요소는 그 출발점에서부터 변위의 가정과는 독립된 형태의 응력분포를 가정하고 있기 때문에, 가정되는 응력 파라메타 및 응력 분포함수가 적절한 경우, 본 해석에서 보는 바와 같이 고정도의 응력결과를 얻을 수 있는 장점이 있다.

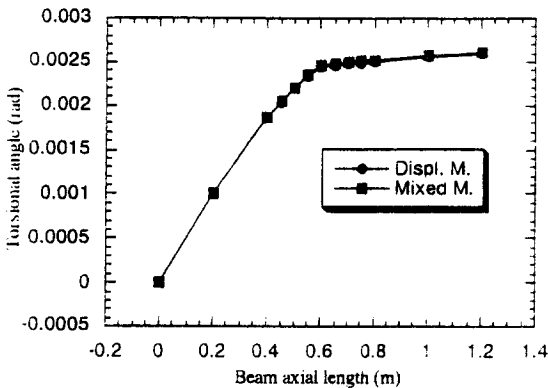


Fig. 3 Torsional angle distribution along the length.

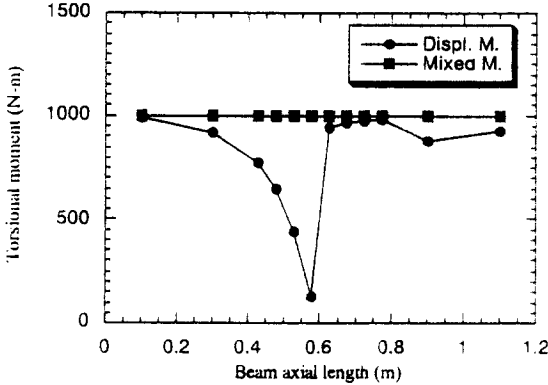


Fig. 4 Torsional moment distribution along the length.

일반적으로, 혼합형 유한요소를 적용하는 경우, "어떠한 응력 파라메타를 도입하고, 또는 어떤 형상의 응력 분포함수를 가정하여야만 고정도의 해석 결과를 얻게 되는가" 하는 문제에 있어서는 그 확실한 이론적 배경이 정립되어 있지 않고, 단지 실제 해석을 통하여서만 그 정도를 보장할 수 있다는 이론적 결함을 가지기는 하지만[7], 본 계산을 통하여, 본 논문에서 도출한 응력 파라메타 및 일반화 응력-변형률 관계식은 본 연구의 대상이 되는 박판보 이론에 매우 유효함을 확인할 수 있다.

한편, Fig 5 와 Fig. 6은 단면내 대표적인 각 점에서의 (수직응력의 경우에는 단면 상단 모서리점을, 전단응력의 경우에는 측면판의 중앙점을 나타

냄) 수직 굽힘응력  $\sigma_z$  과 전단응력  $\tau_{xz}$  의 길이 방향 분포를 변위형 유한요소 결과와 비교하여 나타낸 것이다. 수직응력 분포에 있어서는 두 방법의 오차가 미소하며, 전단응력 분포에 있어서는 약간의 오차가 발생함을 알 수 있다. Fig. 4에서 보인 비틀림 모멘트는 다음식과 같이 정의되는 것으로,

$$M_z \equiv M_{z-SI} + M_{z-\omega} = \int_A \{-\tau_{xz}(y-y_s) + \tau_{yz}(x-x_s)\} dA, \quad (22)$$

전단응력의 크기에 전적으로 의존한다. 다시 말하자면, 단면내 각 점에서의 전단응력의 크기를 식 (22)에 따라 적분한 값이 단면 비틀림 모멘트이므로, 전단응력의 계산결과는 직접적으로 비틀림 모멘트 계산결과에 상응한다. 즉, Fig. 4에서 보이는 바와 같이 단면 비틀림 모멘트에 대한 혼합형 유한요소의 결과가 변위형 요소의 결과보다는 훨씬 정확한 것이므로, Fig. 6의 전단응력에 관하여서도 본 혼합유한요소 해석 결과가 보다 신뢰할 만한 것으로 추정된다. 한편, Fig. 4 과 Fig. 6를 비교할 때, 단면내 전단응력의 분포에 나타난 약간의 오차들이, 그 적분값으로 표현되는 단면 비틀림 모멘트의 계산결과에서는 크게 누적되어 나타남을 알 수 있다.

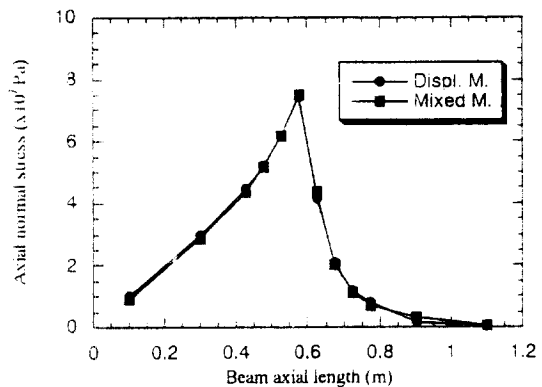


Fig. 5 Axial bending stress distribution at upper corner point

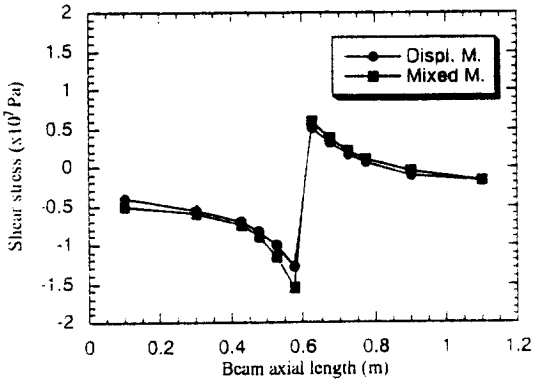


Fig. 6 Shear stress distribution at the center point of side plate

#### 4. 결론

불균일 전단 뒤틀림 보이론에 혼합형 유한요소법을 적용한 결과 다음과 같은 사실들을 확인할 수 있었다.

(1) 불균일 전단 뒤틀림 보이론에 혼합형 유한요소의 적용이 가능하며, 또한 본 논문에서 도출한 일반화된 보 응력-변형률 관계식은 매우 유용함을 확인할 수 있었다.

(2) 본 논문에서 개발된 혼합형 유한요소는 불연속 변단면보의 해석에 있어서 변위 및 응력 두 역학변수의 계산에 공히 높은 정도의 해석결과를 제공하고 있다. 특히, 응력에 관한 계산결과에 있어서는 통상의 변위형 유한요소법에 비해 월등한 정도의 해석결과를 제공한다.

#### 참 고 문 헌

[1] Seong-Whan Park, Daiji Fujii, and Yoshinobu Fujitani, "A Research for the Thin-walled Beam Theory by Using Shear Warping Function : Bending Analysis by Using Nonuniform Shear Warping Function", 일본건축학회 구조계논문집 473호, pp.107- 116, 1995년 7월 (일본어).

[2] Seong-Whan Park, Daiji Fujii, and Yoshinobu Fujitani, "A Research for the Thin-walled Beam Theory by Using Shear Warping Function : Part 2 Torsional Analysis by Using Nonuniform Shear Warping Function", 일본건축학회'96 추우고쿠-큐우슈우지부 연구보고 (제10회), 일본쿠마모토시, pp.345-348, 1996년 3월 (일본어).

[3] Seong-Whan Park, Daiji Fujii, and Yoshinobu Fujitani, "Finite Element Analysis of Thin-Walled Beam Considering Shear Warping Deformation", 일본건축학회 구조계논문집 484호, pp.65-74, 1996년 6월 (일본어).

[4] Seong-Whan Park, Daiji Fujii, and Yoshinobu Fujitani, "A Finite Element Analysis of Discontinuous Thin-Walled Beams Considering Nonuniform Shear Warping Deformation", *Computers & Structures* (to be published).

[5] Geir A. Gunnlaugsson and P. Terndrup Pedersen, "A Finite Element Formulation for Beams with Thin-walled Cross-sections", *Computers & Structures* Vol. 15, pp. 691-699, 1982.

[6] P. Terndrup Pedersen, "Beam Theories for Torsional- Bending Response of Ship Hulls", *Journal of Ship Research* Vol. 35, pp.254-265, 1991.

[7] H. Kardestuncer, *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill, 1987.

[8] Kyuichiro Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, 1980.

[9] A. S. Gendy, A. F. Saleeb, and T. Y. P. Chang, "Generalized Thin-walled Beam Models for Flexural- torsional Analysis", *Computers & Structures* Vol. 42, pp. 531-550, 1992.

#### 부 록 : 응력-변형률 관계행렬

C 행렬은 대칭행렬이며, 따라서, 여기서는 행렬의 상부구성요소만을 기술한다. 또한, 여기서 정



의되지 않은 구성요소는 모두 제로이다.

$$c(1, 1) = EA \equiv \int_A E dA,$$

$$c(2, 2) = GK \equiv \int_A G \left[ \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial x} - (y - y_s) \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial y} + (x - x_s) \right\}^2 \right] dA$$

$$c(3, 3) = GA_x \equiv G \times (\text{x-dir. Area}),$$

$$c(3, 9) = GD_x \equiv \int_A G \frac{\partial V_x}{\partial x} dA,$$

$$c(4, 4) = GA_y \equiv G \times (\text{y-dir. Area}),$$

$$c(4, 10) = GD_y \equiv \int_A G \frac{\partial V_y}{\partial y} dA,$$

$$c(5, 5) = GA_\omega \equiv \int_A G \left\{ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right\} dA,$$

$$c(5, 11) = -GD_\omega \equiv - \int_A G \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial V_\omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial V_\omega}{\partial y} \right\} dA,$$

$$c(6, 6) = EI_{xx} \equiv \int_A E x^2 dA,$$

$$c(6, 12) = -EP_{xv_x} \equiv - \int_A E x V_x dA,$$

$$c(6, 13) = -EP_{xv_y} \equiv - \int_A E x V_y dA,$$

$$c(6, 14) = -EP_{xv_\omega} \equiv - \int_A E x V_\omega dA,$$

$$c(7, 7) = EI_{yy} \equiv \int_A E y^2 dA,$$

$$c(7, 12) = EP_{yv_x} \equiv \int_A E y V_x dA,$$

$$c(7, 13) = EP_{yv_y} \equiv \int_A E y V_y dA,$$

$$c(7, 14) = EP_{yv_\omega} \equiv \int_A E y V_\omega dA,$$

$$c(8, 8) = EI_{\omega\omega} \equiv \int_A E \omega^2 dA,$$

$$c(8, 12) = EP_{\omega v_x} \equiv \int_A E \omega V_x dA,$$

$$c(8, 13) = EP_{\omega v_y} \equiv \int_A E \omega V_y dA,$$

$$c(8, 14) = EP_{\omega v_\omega} \equiv \int_A E \omega V_\omega dA,$$

$$c(9, 9) = GD_{v_x v_x} \equiv \int_A G \left\{ \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^2 \right\} dA,$$

$$c(9, 10) = GD_{v_x v_y} \equiv \int_A G \left\{ \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{\partial V_y}{\partial y} \right\} dA,$$

$$c(9, 11) = GD_{v_x v_\omega} \equiv \int_A G \left\{ \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{\partial V_\omega}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{\partial V_\omega}{\partial y} \right\} dA,$$

$$c(10, 10) = GD_{v_y v_y} \equiv \int_A G \left\{ \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 \right\} dA,$$

$$c(10, 11) = GD_{v_y v_\omega} \equiv \int_A G \left\{ \frac{\partial V_y}{\partial x} \frac{\partial V_\omega}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \frac{\partial V_\omega}{\partial y} \right\} dA,$$

$$c(11, 11) = GD_{v_\omega v_\omega} \equiv \int_A G \left\{ \left( \frac{\partial V_\omega}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_\omega}{\partial y} \right)^2 \right\} dA,$$

$$c(12, 12) = EP_{v_x v_x} \equiv \int_A E V_x^2 dA,$$

$$c(12, 13) = EP_{v_x v_y} \equiv \int_A E V_x V_y dA,$$

$$c(12, 14) = EP_{v_x v_\omega} \equiv \int_A E V_x V_\omega dA,$$

$$c(13, 13) = EP_{v_y v_y} \equiv \int_A E V_y^2 dA,$$

$$c(13, 14) = EP_{v_y v_\omega} \equiv \int_A E V_y V_\omega dA,$$

$$c(14, 14) = EP_{v_\omega v_\omega} \equiv \int_A E V_\omega^2 dA.$$