

---

 論 文
 

---

大韓造船學會論文集  
 第34卷第4號 1997年 11月  
 Journal of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 34, No. 4, November 1997

## 비선형 자유표면파의 수치해석을 위한 경계요소법에 대한 연구 (I)

성흥근\*, 홍사영\*\*, 최항순\*\*\*

### A Study on the Boundary Element Method for Numerical Analysis of Nonlinear Free Surface Waves(I)

by

Hong G. Sung\*, Sa Y. Hong\*\* and Hang S. Choi\*\*\*

#### 요 약

비선형 자유표면파 현상은 여러 가지 수치해법에 의하여 연구되고 있으나 이들 중에서 경계요소법이 가장 유망한 것으로 알려져 있다. 그러나, 경계요소법에 의한 수치과정에 해결해야 할 몇 가지 문제점들이 남아있는 것도 주지의 사실이다. 본 논문에서는 경계요소해석에 의한 비선형 자유표면파의 수치해석과정을 보다 정확하고 신속하게 처리하기 위하여, 요소적분의 수치적분과 선형계에 대한 반복해법 등을 심도있게 논의하였다. 그리고 해석해가 있는 경우에 대하여, 개발된 경계요소법의 우수성을 확인하였다.

#### Abstract

Nonlinear free surface flow phenomena have been studied by several kinds of numerical methods, of which boundary element method has been known as most promising one. There, however, remain many difficulties to be solved in the numerical procedures by boundary element analysis. In this paper, an efficient calculation of elemental integrals and iterative solution algorithm for the resulting system of equations were thoroughly investigated in order to enhance the procedure of the boundary element analysis. Advantages of the herein developed boundary element analysis code are demonstrated in terms of accuracy and convergence for typical boundary-value problems with free surface.

---

발 표 : 1996년도 대한조선학회 춘계연구발표회('96. 11. 8.)

접수일자 : 1997년 1월 2일, 재접수일자: 1997년 8월28일

\* 학생회원, 서울대학교 조선해양공학과 대학원

\*\* 정회원, 선박해양공학연구원

\*\*\* 정회원, 서울대학교 조선해양공학과

## 1. 서론

최근에 많은 관심의 대상이 되고 있는 “수치조파 구조기법”은 새롭고 다양한 형태의 해양구조물에 대한 정확하고 엄밀한 설계는 물론이고, 실험 조파구조의 여러 가지 문제점을 극복하기 위해서도 매우 필요한 기법이라고 할 수 있다(Kim, 1995). 그리고 이를 위한 수치방법으로는 경계요소법을 이용한 해석법이 가장 효율적인 것으로 알려져 있다(Romate, 1989). 한편, 경계요소법을 이용한 비선형 자유표면파의 수치해석으로는, Longuett-Higgins & Cokelet(1976)이 2차원에서 수치해를 구한 것이 처음으로 알려져 있다. Dommermuth et al.(1988)은 경계요소법을 이용하여 2차원 플러저형 쇄파를 계산하여 실험과 비교함으로써, 파형과 유체입자의 속도까지 상당한 정확도로 추정할 수 있음을 입증하였다. 이러한 연구가 본격적으로 3차원으로 확대된 것은 Xu(1992)와 Boo(1993), 그리고 Lee et al.(1994) 등에 이르러서인 것으로 알려져 있다.

본 연구에서는 해상에 존재하는 비선형 자유표면 유동을 전통적인 이상유체의 범주내에서 포텐셜유동으로 모사한다. 이러한 가정하에 유동은 조화함수인 속도포텐셜에 의해 표현될 수 있으며, 자유표면의 시간의존성에 의하여 속도포텐셜 또한 시간에 관한 함수가 된다. 고려하는 유체의 영역을  $\Omega$  라하고, 공간좌표를  $\mathbf{x}$ , 시간을  $t$  그리고 속도포텐셜을  $\phi$ 라 하면 지배 방정식은 잘 알려진 다음과 같은 라플라스 방정식이 얻어진다.

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{for } \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

편미분방정식의 이론에 의하면, 라플라스 방정식이 해를 가지기 위해서는 경계에 적절한 조건이 부과되어야만 한다. 유체영역의 경계 ( $\partial\Omega \equiv S$ )는 다음과 같이 자유표면 ( $S_f$ )과 바닥경계면 ( $S_b$ ), 물체경계면 ( $S_b$ ), 그리고 수치방사경계면 ( $S_r$ ) 등으로 구성된다. 이때 해당 경계면에 대한 경계조건은 이미 잘 알려져 있는 바와 같이 다음

과 같이 기술된다.

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - gz - p_f, & \mathbf{x} \in S_f \\ \frac{D \mathbf{x}_f}{Dt} &= \nabla \phi, & \mathbf{x} \in S_f \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) &= 0, & \mathbf{x} \in S_b \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in S_b \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서  $D/Dt$ 는 전미분,  $p_f$ 는 자유표면에 서의 압력을 나타낸다. 그리고 위의 두번째 식에서  $\mathbf{x}_f$ 는 자유표면위에 놓여 있는 유체입자에 대한 “material coordinates”으로 해석되어야 하며,  $\mathbf{n}$ 은 경계면에서 영역 바깥 방향으로의 단위법선 벡터이고,  $\mathbf{V}$ 는 물체표면의 속도이다. 또한 이 문제가 유일한 해를 가지기 위해서는 수치방사경계면에도 적절한 조건이 부과되어야 한다. 수치조파 구조기법에서 일반적으로 사용되는 수치방사조건으로는 Sommerfeld-Orlanski 방법과 Romate (1989)에 의한 편미분방정식법 등이 효과적인 것으로 알려져 있다.

이 문제의 본격적인 풀이를 염두하면서, 본 연구에서는 효율적인 경계요소법의 개발을 도모한다. 즉, 3차원 혼합 경계치문제를 효과적으로 풀기 위하여 고차경계요소를 채용하였고, 요소적분의 정확한 수치적분을 가능하게 하였으며, 그리고 GMRES 알고리즘을 이용하여 거대선형계를 신속히 풀 수 있도록 하였다. 해석해가 있는 경우에 대하여, 개발된 방법의 정확성 및 효율성을 확인하였다.

## 2. 경계요소법

일반적으로 초기경계치문제는 경계치문제와 시적분 알고리즘의 결합을 통하여 효과적으로 풀려지게 된다. 따라서 수치해법의 성능은 경계치문제에 대한 해법과 시적분 알고리즘의 특성에 의존하게 된다. 그리고 일반적으로 3차원 라플라스 방정식에 대하여, 경계요소법이 매우 효율적인 것으로

알려져 있으므로(Romate, 1989), 본 절에서는 정확하고 효율적인 경계요소법에 대하여 논의하고자 한다. 한편 분리과정에 의해 얻어진 단위문제는 "혼합 Dirichlet Neumann 문제"가 되는데, 경계요소해석에서는 이에 대한 경계적분방정식을 도출한다. 즉, 다음과 같은 자유공간 Green 함수(free space Green's function)를 도입하고,

$$G(\xi, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\xi - \mathbf{x}|} \quad (3)$$

Green의 제 2 정리를 이용하여 다음과 같은 경계적분방정식을 얻게된다.

$$\alpha(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} [\phi(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} G(\xi, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial n_\xi} \phi(\xi) G(\xi, \mathbf{x})] dS(\xi), \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (4)$$

여기에서  $\alpha(\mathbf{x})$ 는 "내부곡면각"으로서 매끈한(smooth) 곡면위에서는 1/2이 되는데, 일반적인 곡면에 대하여 다음과 같이 해석적인 형태로 표현할 수 있다.

$$\alpha(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_\xi} G(\xi, \mathbf{x}) dS \quad (5)$$

이 식을 이용하면 (4)의 특이성을 없앨 수 있고, 요소적분을 구할 때 매우 유용하게 사용된다.

본 연구에서 고려해야 하는 혼합 경계치문제에 대해서는 일정패널법이 적합하지 않은 것으로 알려져 있으므로(Xü, 1992), 본 연구에서는 "isoparametric bi-quadratic boundary element(이하 isobqe로 줄임)"를 이용하여 경계면을 이산화하고 요소위의 미지수를 표현한다. isobqe에 의하여 근사된 경계면은 매개변수화되는데, 근사된 경계면과 매개변수공간의 관계는 Fig. 1에 잘 나타나 있다.

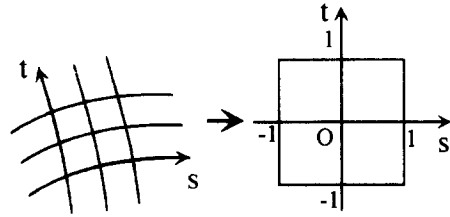


Fig.1 Nine nodes bi-quadratic element and its parameter space

이렇게 하여 근사된 경계면과 근사된 면위에서 정의되는 미지량에 대한 식은 다음과 같아진다.

$$\Psi = \sum_{m=0}^8 N_m(s, t) \Psi_m \quad (6)$$

여기에서  $N_m$ 은 Lagrange 내삽함수이고  $\Psi$ 는 포텐셜과 포텐셜의 법선미분 그리고 근사된 경계면의 위치벡터를 포함한다. 이제 (6)식을 (4)와 (5)식에 대입하고 "collocation"방법에 의하여 각 절점에 적용하면, 속도포텐셜과 법선미분치에 관한 선형방정식이 얻어진다.

$$\alpha(\mathbf{x}_i)\phi(\mathbf{x}_i) = \sum_j \sum_m [ \phi_m^j D_m^j(\mathbf{x}_i) - \phi_{n,m}^j S_m^j(\mathbf{x}_i) ] \quad (7)$$

where,

$$D_m^j(\mathbf{x}_i) = \int_{E_i} N_m \frac{\partial}{\partial n_\xi} G(\xi, \mathbf{x}_i) dS \quad (8)$$

$$S_m^j(\mathbf{x}_i) = \int_{E_i} N_m G(\xi, \mathbf{x}_i) dS$$

$$\alpha(\mathbf{x}_i) = \sum_j \sum_m D_m^j(\mathbf{x}_i)$$

그리고 위의 선형방정식을 재배열하면 Neumann 경계에서의 포텐셜과 Dirichlet 경계에서의 법선미분으로 구성된 미지벡터에 대한 선형방정식을 얻게 된다.

$$A \begin{bmatrix} \phi \\ \phi_n \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad (9)$$

### 3. 수치적분

식 (8)에 나타나는 요소적분의 계산은 전체 수치과정 중에서 가장 시간이 많이 걸리는 부분 중 하나로서, 일반적인 경계면과 요소에 대하여 수치적분에 의존할 수 밖에 없다. 그리고 요소와 계산점간의 거리에 따라 서로 다른 방법을 적용하는 것이 가장 효율적인 것으로 알려져 있다.

#### 3.1 적분요소밖에 계산점이 있는 경우

계산점이 적분요소위에 있지 않은 경우 피적분함수에 특이성이 없으므로, 매개변수공간에서 "product Gauss-Legendre quadrature"를 사용할 수 있다. Gauss 적분의 우수성은 이미 잘 알려져 있으므로(Conte & de Boor, 1981), 본 절에서는 적분차수의 결정에 대하여 논의한다. 본 연구에서는 3가지의 기하학적 매개변수를 정의하여 그에 따라 적분의 차수를 결정한다. 도입한 매개변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 p_0 &= r_{\min} / l_c ; l_c - \text{요소의 특성길이} \\
 p_1 &= \max \{ \angle Q_0 P Q_2, \angle Q_7 P Q_3, \angle Q_6 P Q_4 \} / \pi \quad (10) \\
 p_2 &= \max \{ \angle Q_0 P Q_6, \angle Q_1 P Q_5, \angle Q_2 P Q_4 \} / \pi
 \end{aligned}$$

Fig. 2에서 매개변수에 대한 정의를 보다 자세히 볼 수 있다. 근사적으로  $p_0$ 는 요소와 계산점의 상대거리이며,  $p_1, p_2$ 는 각 매개변수방향으로의 최대투영각이다. 이에 의하여 각 매개변수방향의 적분차수는 다음과 같이 결정된다

$$\begin{aligned}
 \nu_s &= [f(p_0, p_1)] \\
 \nu_t &= [f(p_0, p_2)] \quad (11) \\
 \text{where } [f] &= \nu, \text{ if } \nu - \frac{1}{2} \leq f < \nu + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

여기에서  $\nu_s, \nu_t$ 는 각각 s, t 방향의 적분차수이며,  $[ \cdot ]$ 은 일종의 반올림함수이다. 고려하는 요소가 정해지면 많은 반복계산과 fitting을 통하여 위의 함수  $f(p, q)$ 의 형태를 결정하게 된

다. 이러한 과정에서 필요한 적분의 참값을 계산하기 위해서는 "adaptive integration"과 "Romberg integration"(Conte & de Boor, 1981)을 사용하였다.

여러 가지 경우에 대한 수치실험으로부터 요소와 계산점이 요소의 특성길이와 비슷한 거리에 위치한 경우에, 이 방법의 성능이 발휘되는 것을 확인하였다.

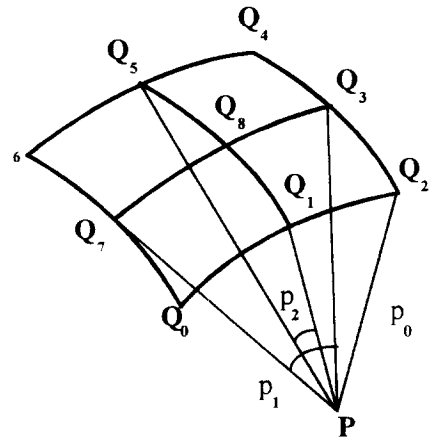


Fig. 2 Geometric parameters to determine the order of quadrature

#### 3.2 적분요소위에 계산점이 있는 경우

자기영향계수를 계산할 때, 피적분함수의 특이성을 적절히 처리하지 않으면 너무나 많은 계산점을 필요로 하는 것으로 알려져 있다. 본 연구에서는 Li et al.(1985)이 개발한 삼각극좌표변환을 이용하여, 삼각극좌표평면에서 요소적분을 "regular"하게 만든다. 특이점이  $(s_0, t_0)$ 에 있다고 할 때 삼각극좌표변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 (s, t) &= (1 - \sigma)(s_0, t_0) + \sigma(1 - \tau)(s_1, t_1) \\
 &\quad + \sigma\tau(s_2, t_2) \quad (12)
 \end{aligned}$$

Fig. 3에서 보듯이 삼각극좌표변환에 의하여 특이점이  $\tau$ 축으로 변환됨을 보일 수 있다. 이러한

“퇴행성(degeneracy)”에 의하여 특이성차수를 줄일 수 있게 된다.

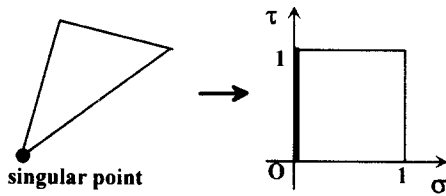


Fig. 3 Triangle polar coordinate transformation

수치적분의 과정을 간략히 기술한다. 먼저 매개 변수공간의 사각형에서 특이점을 한 꼭지점으로 하는 삼각형들로 나눈다. 즉, Fig. 4에서와 같이, 특이점의 위치에 따라 삼각형화가 이루어진다. 그 다음으로 각 삼각형에 대하여 삼각극좌표변환을 적용하여 피적분함수를 매개변수공간으로부터 삼각극좌표공간으로 변환시킨다. 기저함수와 위치벡터 그리고 jacobian 등의 값을 삼각극좌표평면에서 구하면, 요소적분이 “regular”하게 됨을 확인할 수 있다. 물론 이를 위해서는 많은 노력이 필요하지만 일관성있게 수행할 수 있다.

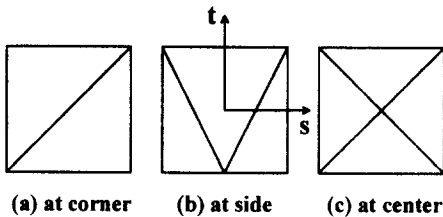


Fig. 4 Possible triangulations in the self influence evaluations

#### 4. GMRES 알고리즘

유한요소법 등에서 빈번히 나타나는 “lagre sparse symmetric positive definite”의 선형방정식 계를 푸는 가장 효율적인 반복해법중의 하나는 전

처리(preconditioning) 기법과 결합된 “공액경사법 (conjugate gradient method)”(Golub & Van Loan, 1989)으로 알려져 있다. 한편 최근에는 비대칭 문제를 다루기 위한 몇가지 일반화된 방법들이 제시되었다. 이러한 공액경사법의 일반화 중에서는 본 연구에서는 GMRES(generalized minimal residual) 알고리즘(Saad & Shultz, 1986)에 중점을 둔다.

GMRES알고리즘은 Minimal Residual 알고리즘의 일반화로서 Lanczos 알고리즘의 비대칭 행렬에 대한 유추인 Arnoldi 과정에 기본을 둔다. Arnoldi 과정에 의하여 생성된  $l_2$  - orthonormal basis를 이용하여, Krylov 부공간  $K_k$  위에서 residual norm의 크기를 최소로 하는 근사해를 구하게 된다. 한편 Saad & Schultz(1986)에 의하면 GMRES는 GCR(generalized conjugate residual), ORTHODIR(orthogonal direction)과 수학적으로 동등하고 이들보다 더 안정적이며 효율적이다. 그리고 GMRES는 GCR보다 메모리가 1/2 그리고 산술연산은 1/3만 요구된다. 아래에 GMRES 알고리즘을 요약한다.

● GMRES algorithm for  $Ax = f$

1. Start : choose  $x_0$  and compute

$$r_0 = f - Ax_0 \quad \text{and} \quad v_1 = r_0 / \|r_0\|$$

2. Iterate: For  $j = 1, 2, \dots, k$ , until satisfied do:

$$h_{ij} = (Av_j, v_i) \quad i = 1, 2, \dots, j$$

$$\hat{v}_{j+1} = Av_j - \sum_{i=1}^j h_{ij} v_i$$

$$h_{j+1,j} = \|\hat{v}_{j+1}\|$$

$$v_{j+1} = \hat{v}_{j+1} / h_{j+1,j}$$

3. Form the approximate solution

$$x_k = x_0 + V_k y_k \quad \text{where } y_k \text{ minimizes}$$

$$\|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

and where,  $\beta = \|r_0\|$ ,

$$\bar{H}_m = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} & \cdots & \cdots & h_{1,m-1} & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & \cdots & \cdots & h_{2,m-1} & h_{2,m} \\ 0 & h_{3,2} & h_{3,3} & \cdots & \cdots & h_{3,m-1} & h_{3,m} \\ 0 & 0 & h_{4,3} & \cdots & \cdots & h_{4,m-1} & h_{4,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & h_{m,m-1} & h_{m,m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{m+1,m} \end{bmatrix}$$

$$V_m = [v_1 | v_2 | v_3 | \cdots | v_m],$$

$e_1 = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T$ ; 1st standard basis  
of  $R^{m+1}$ .

### 5. 수치결과 및 수렴성 연구

본 연구에서 개발된 경계요소법의 정확성, 수렴성 및 안정성을 검토하기 위하여 해석해가 있는 몇 가지 경우에 대하여 수치계산을 수행하였다. 직사각형 내부영역에 대한 (13)과 같은 선형 정현파 문제에 대하여 본 연구에서 개발한 전산코드의 정확도와 효율성 등을 검증해 보았다. 그리고 GMRES 알고리즘의 우수성도 검토해 보았다.

$$\phi = \frac{ag}{w} e^{kz} \sin(k_x x + k_y y - wt)$$

$$\zeta = a \cos(k_x x + k_y y - wt) \tag{13}$$

where,  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  and  $w^2 = gk$

#### 5.1 직사각형영역에 대한 내부 혼합 Dirichlet-Neumann 문제

본 연구에서 개발한 경계요소법에 의하여 비선형 자유표면 현상이 효과적으로 계산될 수 있는지 알아보기 위하여, (13)의 선형 정현파에 대한 혼합 Dirichlet-Neumann 문제를 풀어 보았다. 직사각형 내부영역에 선형 정현파에 해당하는 속도포텐셜을 주고, 해당하는 파면까지 속도포텐셜을 해석적

로 확장하여 적용한다(Fig. 5). 이렇게하여 인위적으로 만들어진 문제에 대하여 자유표면에만 속도포텐셜값을 주고 나머지 경계면에는 법선미분치를 준다.

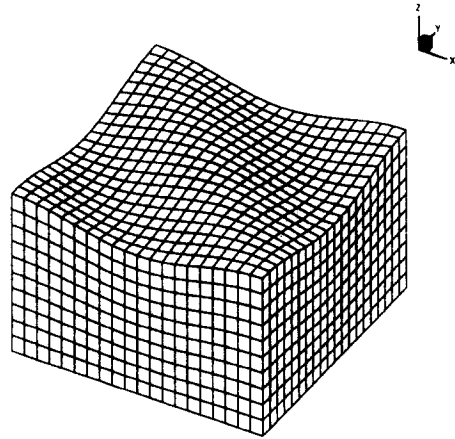


Fig. 5 Rectangular region with wavy top surface

이 문제의 정확도와 수렴성을 Fig. 6에 보였다. 그림의 가로축은 요소의 특성길이로서 역수를 취하면 대략적으로 한 파장당 배치한 요소의 수가 되며, 세로축은 해당면의 최대값으로 나누어진 오차이다. 따라서 1% 이하의 오차를 확보하기 위해서는 적어도 한 파장당 10개 정도는 배치하여야 함을 의미한다. 그리고 Fig. 6의 수렴성은 다음과 같이 평가된다.

$$\max |\phi_n(\mathbf{x}_i) - \phi_r| \leq C_1 h_n^{1.62} \tag{14}$$

$$\max |\phi(\mathbf{x}_i) - \phi_i| \leq C_2 h_n^{3.39}, C's \text{ const}$$

본 수치결과로부터 Dirichlet 경계에서의 오차와 Neumann 경계에서의 오차는 수렴성에서 한 차수 정도 차이가 나는 것을 알 수 있다. 3차원 혼합경계치문제에 대해서는 수학적 해석이 아직은 알려져 있지 않으므로, 단지 위 수치결과를 받아들이기로 한다. 그리고  $ka$ 가 작은 경우는 이보다 더 좋은 정확도를 보여주며 더 큰 경우는 정확도가 떨어지는 것을 확인하였다.

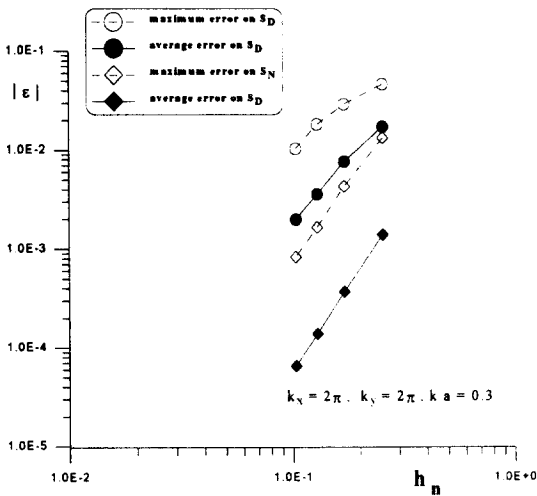


Fig. 6 Convergence of QBEM for mixed Dirichlet Neumann problem for rectangular box with wavy top surface

5.2 Gauss 소거법과 GMRES 알고리즘

선형방정식의 크기가  $N$ 이라고 할 때, 일반적으로 Gauss 소거법은  $N^3$ 의 연산수를 필요로 한다. 그리고 대부분의 선형방정식계에 대한 반복해법은  $O(N^2)$ 의 연산수를 필요로 하는 것으로 알려져 있다. 본 절에서는 전절에서 살펴본 예제에 대하여, GMRES 알고리즘의 연산수를 조사해보고 Gauss 소거법과 비교해 본다. 그리고 선형방정식에 대한 반복해법들은 전처리에 의하여 가속될 수 있는데, 가장 널리 사용되는 전처리기는 대각전처리기(diagonal preconditioner)와 SSOR (symmetric successive overrelaxation) 전처리기이다. 따라서 전처리기(preconditioner)를 첨가하여 GMRES 알고리즘의 연산수를 검토해 보았다.

Fig. 7은 Gauss 소거법과 GMRES 알고리즘의 연산에 드는 시간을 비교한 것이다. 그래프에서 GMRES 알고리즘의 경제성을 알 수 있다. 계산된 문제는 앞절에서 고려한 것이고, 사용된 전산기는 43 MFLOPS의 IRIS기종이다. 선형계의 크기가 1602일 때, 전처리가 없는 GMRES 알고리즘에 의하여 선형방정식을 풀 경우보다 대각전처리기가

있는 경우가 10배이상 빠르며, 만약 선형계의 크기가 커지면 커질수록 GMRES 와 전처리의 효율성은 더욱 증대된다.

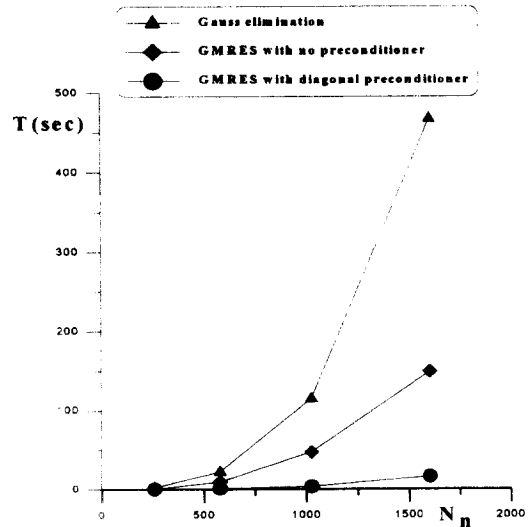


Fig. 7 Gauss elimination and GMRES algorithm

6. 요약 및 결론

본 연구를 통하여 3차원 비선형파의 수치해석을 위하여 정확하고 효율적인 경계요소법을 개발하였다. 그리고 거대 비대칭행렬식의 신속한 풀이를 위해서 가장 빠른 반복해법중의 하나인 GMRES 알고리즘을 이용한 수치코드를 완성하였다. 해석해가 존재하는 경우의 수치결과를 통하여, 본 연구에서 개발된 경계요소법과 GMRES 알고리즘의 정확성, 효율성, 안정성 등을 확인하였다. 이리하여 3차원 비선형파의 수치해석을 위한 기초를 확립하였다.

## 참 고 문 헌

- [1] Boo, S.Y. 1993, Application of Higher Order Boundary Element Method to Steady Ship Wave Problem and Time Domain Simulation of Nonlinear Gravity Waves, PhD Dissertation, Texas A&M
- [2] Conte, S.D. & de Boor, C., 1981, Elementary Numerical Analysis : An Algorithmic Approach, McGraw-Hill Book Company
- [3] Donnermuth, D.G., Yue, D.K.P., Lin, W.M., Rapp, R.J., Chan, E.S. & Melville, W.K. 1988, Deep-water plunging breakers : a comparison between potential theory and experiments, J. Fluid Mech., 184:267-288
- [4] Golub, G.H. & Van Loan, C.F. 1989, Matrix Computations, Johns Hopkins University Press, 2nd ed.
- [5] Kim, C.H., 1995, Recent Progress in Numerical Wave Tank Research : A review, Proceedings of ISOPE-95, The Hague. Vol.3 pp 1-9
- [6] Lee, C.C., Liu, Y.H. and Kim, C.H., 1994, Simulation of Nonlinear Waves and Forces Due to Transient and Steady Motion of Submerged Sphere, International Journal of Offshore and Polar Engineering, Vol.4, No.3, pp 174-182
- [7] Li, Hong-Bao, Han, Guo-Ming & Mang, Herbert A., 1985, A New Method for Evaluating Singular Integrals in Stress Analysis of Solids by the Direct Boundary Element Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.21, pp2071-2098
- [8] Longuet-Higgins, M.S. & Cokelet, E.D., 1976, The deformation of steep surface waves on water, I. A numerical method of computations, Proc. Roy. Soc. London, A 350: 1-26.
- [9] Romate, J.E. 1989, The Numerical Simulation of Nonlinear Gravity Waves in Three Dimensions Using a Higher Order Panel Method, PhD Thesis, University of Twente
- [10] Saad, Y. & Schultz, M.H. 1986, GMRES A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 7: 856-869.
- [11] Xü, H., 1992, Numerical Study of Fully Nonlinear Water Waves in Three Dimensions, PhD Dissertation, MIT