Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.23, N0.4, December, 1997

최대유통문제의 사후분석

Postoptimality Analysis of the Maximum Flow Problem

정호연* · 안재근** · 박순달***

Hoyeon Chung* · Jaegeun Ahn** · Soondal Park***

Abstract

The purpose of this paper is to develop a method of postoptimality analysis that can be applied to an optimal solution of a maximum flow problem.

We first use the transformed network corresponding to a given network. In such a network we conduct postoptimality analysis by determining changes in the optimal solution precipitated by changes in the capacity as the arc capacity varies from 0 to infinite.

By this method we can easily calculate not only the characteristic region where the given optimal solution remains unchanged, but also the characteristic region where the value of the maximal flow gradually increases or decreases.

The proposed method is demonstrated by numerical example.

1. 서 론

최대유통문제는 대표적인 네트워크문제 중의 하나로써 시점에서 종점까지 네트워크를 통해 보낼 수 있는 최대의 유통량과 경로를 구하는 문제이다[1]. 이 때 시점에서 보낼 수 있는 유통량은 무한정이라고 가정하지만, 유통량이 호(arc)를 통과할 때 용량상한(upper bound)에 의해 제약을 받기 때문에 용량상한의 변화가 곧 최대유통량의 변화로 나타나게 된다. 따라서 최대유통문제의 최적해가 주어진 상태에서 호의 용량(capacity)이 변함에 따라 최적해가 어떻게 변하는지 분석할 필요가 있다. 이에 대한 변화를 알아야 체계적인 호 관리를 할 수 있기 때문이다.

이에 대한 연구는 Murty[8]에 의해 제시되었다. Murty는 호 용량의 변화 범위를 0에서 무한대까지 변화시키면서 호 용량이 변할 때 최대유통량이 얼마만큼 변하는지를 임계용량(critical capacity)이라는 개념을 사용하여 분석하였다. 그러나 이 연구에서는 일반적인 사후분석에서 해를 구하는 방법인 최적해를 구한 상태에서 이 최적해를 이용하여 호 용량의 변화범위에 따른 최대유통량의 변화범위를 구하는 것이 아니라, 변화범위를 구하고자 하는 호에 대해서 각각 호의 용량을 0과 무한대로 둔 문제들의 최대유통량을 구하여서 이 값을 통하여 임계용량값을 계산하는 방법을 제시하고 있다.

따라서 본 연구에서는 임의의 하나의 최대유통문제의

* 전주대학교 산업공학과
** 안성산업대학교 컴퓨터공학과
*** 서울대학교 산업공학과

최적해가 구해진 상태에서, 이 최적해를 이용한 변환네트워크를 사용하여 호 용량의 변화에 따른 최대유통량의 변화를 계산하는 사후분석 방법을 제시하고자 한다. 이와 더불어 호의 용량이 0으로 변하는 경우는 호가 제거된 경우에 해당되어 치명호(Most Vital Arc)를 결정하는 문제가 되며, 호의 용량이 무한대로 변하는 경우는 최대유통량을 가장 크게 증가시킬 수 있는 호를 결정하는 문제가 되는데, 이를 결정하는 방법도 제시한다.

2. 연구 배경

본 연구에서 다루는 최대유통문제 $G=(N,A)$는 다음과 같다.

$$Max \quad v$$

$$s.t. \sum_{j:(i,j)\in A} f_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} f_{ji} = \begin{cases} v, & i=\text{시점 }(s) \\ 0, & i=\text{중간점} \\ -v, & i=\text{종점 }(t) \end{cases}$$

$$0 \le f_{ij} \le u_{ij}, \ \forall (i,j)\in A$$

여기서 $G=(N,A)$는 마디(node) 수가 $|N|=n$이고, 호의 수가 $|A|=m$인 유방향 네트워크라고 가정하고, 호 (i,j)에는 각 호에서 최대로 허용할 수 있는 용량상한 u_{ij}가 설정되어 있으며, 이러한 용량상한의 범위 내에서 최대의 유통량을 보내고자 한다.

최대유통문제를 푸는 해법으로는 Ford & Fulkerson[6]의 꼬리표(Labeling) 방법, Dinic[4]의 층네트워크방법, Karzanov의 예비유통량(preflow)을 이용하는 방법, Malhotra 등의 잠재유통량(flow potential)을 이용하는 방법 등 많은 방법이 알려져 있다[2]. 사후분석은 일단 위의 해법을 사용하여 $G=(N,A)$에 대한 최적해를 구한 다음 적용할 수 있다.

먼저 $G=(N,A)$에 대한 최대유통량을 $V(F)$라 하고, 이때의 각 호 $(i,j)\in A$의 최적유통량을 f_{ij}라 하자. 또한 한 호 $(i,j)\in A$의 용량상한만이 기존의 값에서 θ만큼 변했을 경우의 최대유통문제의 최대유통량을 $V(\theta)$라 하자. 그리고 또한 한 호 $(i,j)\in A$의 용량상한만이 ζ로 바뀐 경우의 최대유통문제의 최대유통량을 $v(\zeta)$라 하자[8].

일단 $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어진 상태에서 호 용량이 변하게 되면 주어진 최적해가 비가능(infeasible)이 될 수 있다. 따라서 이 때에는 주어진 각 호의 유통량을 재최적화 시켜 주어야 하는데, 이 때의 원활한 계산을 위해 $G=(N,A)$에 대한 변환네트워크를 다음과 같이 정의한다.

[정의 1] 주어진 최적해에 대한 변환네트워크 : $G_F=(N,A')$ [2].

$G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어졌을 때 변환네트워크 $G_F=(N,A')$는 다음과 같이 정의된다.

$G=(N,A)$의 어떤 호 (x,y)에 대하여 만일 $f_{xy}>0$, $(x,y)\in A$이면 $G_F=(N,A')$의 A'에는 새로운 유통용량 $\bar{u}_{xy}=u_{xy}-f_{xy}$를 갖는 호 (x,y)와 $\bar{u}_{yx}=f_{xy}$를 갖는 호 (y,x)를 추가하고, 만일 $f_{xy}=0$, $(x,y)\in A$이면 $G=(N,A)$의 유통용량과 같게 즉, $\bar{u}_{xy}=u_{xy}$로 놓는다.

최대유통문제는 네트워크 상에서 두 점 사이에 최대로 수송할 수 있는 양과 경로를 구하는 문제이기 때문에 $V(F)$를 산출하는 해의 형태(flow pattern)가 여러가지 일 수 있다[2,7]. 이처럼 $G=(N,A)$에 대한 대안최적해가 다수개가 존재하더라도 각 호에는 $V(F)$를 얻기 위해서 반드시 수송해 주어야 하는 최소한의 유통량이 있는데[10], 이를 호의 최소유통용량(minimum capacity)이라고 정의하자.

[정의 2] 호 (i,j)의 최소유통용량(minimum capacity) c_{ij}

$G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어졌을 때 시점에서 종점간의 최대유통량 $V(F)$를 얻기 위해 호 $(i,j)\in A$를 반드시 통과해야하는 최소한의 유통량을 호 (i,j)의 최소유통용량 c_{ij}이라고 한다.

따라서 호의 최소유통용량은 항상 비음의 값(즉, $c_{ij}\ge 0$)을 갖는다. 본 논문에서는 $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어졌을 때, 호 (i,j)의 최소유통용량을 쉽게 구하기 위해서, $G=(N,A)$를 변환시킨 $G_F=(N,A')$를 사용하여 호의 최소유통용량을 구할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

먼저 $G_F=(N,A')$에서 각 호 (i,j)의 시작마디 i와 도착마디 j를 시점과 종점으로 놓고, 최대유통문제를 풀었을 경우 구할 수 있는 량을 호의 시작마디와 도착마디 사이의 변 네트워크상에서의 최대유통량을 $h_{ij}(h_{ij}\ge 0)$라고 정의하자. 이 때 $G_F=(N,A')$에서의 최대유통량 h_{ij}는 유통량보존법칙(flow conservation rule)에 의해 주어진 대안해의 형

태와 상관없이 항상 동일하게 나타난다.

[특성] $G_F=(N,A')$에서 마디 i에서 마디 j까지의 최대유통량을 h_{ij}라고 하자. 이 때 h_{ij}는 $G=(N,A)$의 모든 대안최적해에 대해 동일한 값을 가진다.

위의 특성은 대안최적해가 존재할 때 임의의 한 최적해만 주어지더라도 그것으로부터 호 (i,j)의 최소유통용량을 구할 수 있다는 사실을 말해 준다.

위의 특성에 따라 $G_F=(N,A')$에서 구한 h_{ij}를 이용하여 호의 최소유통용량 c_{ij}를 계산하면 다음과 같다.

[보조정리 1] $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어졌을 때 호 (i,j)의 최소유통용량 c_{ij}는 $c_{ij}=\text{Max}\{0,\ u_{ij}-h_{ij}\}$이다.

(증명)

먼저 $G_F=(N,A')$에서 마디 i에서 마디 j까지 갈 수 있는 모든 유통경로의 집합을 P_{ij}로 정의하자. 그러면 마디 i에서 마디 j까지의 최대유통량 h_{ij}는 호(i,j)를 통해 직접 보내는 유통량$(u_{ij}-f_{ij})$와 호 (i,j)를 우회하여 보내는 유통량의 합$(\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p)$으로 나타낼 수 있다. 즉, $h_{ij}=(u_{ij}-f_{ij})+\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p$이다.

그런데 호 (i,j)의 최소유통용량 c_{ij}는 f_{ij}에서 마디 i에서 마디 j까지 우회해서 보내는 유통량을 뺀 값, 즉, $c_{ij}=f_{ij}-\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p$이기 때문에 $c_{ij}=f_{ij}-\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p=u_{ij}-(u_{ij}-f_{ij}+\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p)=u_{ij}-h_{ij}$가 된다.

이 때 만일 $f_{ij}\geq\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p$이면 $c_{ij}=u_{ij}-h_{ij}$가 되고, 만일 $f_{ij}<\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p$이면 최소유통용량이 음수로 나타나는데, 이때는 $\sum_{p\in P_{ij}\setminus(i,j)} f_{ij}^p$를 구성하고 있는 마디 i에서 마디 j까지 가는 경로들 중에서 시점 (s)로 들어가는 경로와 종점 (t)에서 나오는 유통량이 포함된 경로들의 유통량에 해당되어 실제 마디 i에서 마디 j까지 흐를 수 있는 량에 중복되어 계산되는 부분에 기인한다. 그러므로 호의 최소유통용량의 정의에 따라 이때의 c_{ij}는 0의 값을 가진다. 이를 간단히 나타내면 만일 최소유통용량은 $u_{ij}-h_{ij}$가 양이면 $c_{ij}=u_{ij}-h_{ij}$이고, $u_{ij}-h_{ij}$가 비양이면 $c_{ij}=0$이 된다. 그러므로 구하고자 하는 $c_{ij}=\text{Max}\{0,\ u_{ij}-h_{ij}\}$가 된다.

3. 사후분석

여기에서는 호의 용량상한의 변화 범위를 0에서 무한대까지 변화시켜 가면서 각 범위에서 나타나는 최대유통문제의 특성을 변환네트워크를 사용하여 계산하는 방법을 제시하고자 한다.

먼저 호의 용량이 0으로 변하는 경우는 호가 파괴되거나 제거된 경우에 해당되어 치명호를 결정하는 문제가 된다[3,5,7,9,10]. 이러한 연구는 적의 공격 하에 처해 있는 이해상충의 상황이나 물류(Logistics) 또는 통신네트워크에서 어느 호가 치명호인지 알아내어 적의 공격으로부터 경계를 강화하거나, 또는 어떤 호를 파괴시켜야 적의 시스템의 효율성을 가장 크게 저하시킬 수 있는지 알고자 하는 문제에 잘 적용될 수 있다. 이에 대한 연구는 Wollmer[10]에 의해 가장 먼저 연구되었고, Durbin[5]이 Wollmer의 알고리듬을 적용하여 고속도로 시스템에서 치명호를 결정하였으며, Lubore 등 [7]이 치명호의 필요조건을 제시하여 Wollmer의 알고리듬의 단점을 개선하였다.

지금 $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어진 상황에서 호 (i,j)가 제거되었다고 가정하자. 그러면 $V(F)$는 호의 최소유통용량 c_{ij}만큼 감소되게 된다.

[정리 2] $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어진 상황에서 만일 호 (i,j)가 제거된다면 최대유통량은 $V(F)-c_{ij}$가 된다.

(증명)

$G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어져 있으므로 각 호 (i,j)에는 f_{ij}의 유통량이 흐르고 있다. 호 (i,j)를 통해서 보내는 이 f_{ij}의 양은 대안최적해가 존재할 경우 마디 i에서 마디 j까지의 우회경로를 통해 유통량을 우회시킬 수도 있으나, $V(F)$를 얻기 위해서는 적어도 최소유통용량 c_{ij}만큼의 유통량은 반드시 호 (i,j)를 통해서 보내 주어야 한다. 그런데 호 (i,j)가 제거된다면 호의 최소유통용량 c_{ij}만큼의 유통량을 시점에서 종점까지 전달해 줄 수 없기 때문에 최대유통량은 c_{ij}만큼 감소되게 된다. 따라서 호 (i,j)가 제거되게 되면 최대유통량은 $V(F)-c_{ij}$가 된다.

위의 [정리 2]에 따라 호 (i,j)가 제거될 경우 최대유통량을 가장 크게 감소시키는 호, 즉, 치명호는 호의 최소유통용량이 가장 큰 호가 된다.

[종정리 3] $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어진 상황에서, 만일 호 (i,j)가 제거된다면 호의 최소유통용량이 최대인 호가 치명호가 된다.

(증명)

최대유통문제에서 치명호란 한 호의 제거가 최대유통량을 가장 크게 감소시키게 되는 호를 말한다[3,5,7,9,10]. 이 때 호의 최소유통용량 c_{ij}는 시점과 종점간의 최대유통량을 얻기 위해서 각 호에서 반드시 수송해 주어야 하는 최소한의 유통량이라 정의하였으므로, [정리 2]에 의해 호의 최소유통용량이 가장 큰 호가 최대유통량을 가장 크게 줄이게 된다. 따라서 호의 최소유통용량이 최대인 호가 치명호가 된다.

호 (i,j)가 제거될 경우 최대유통량은 $V(F)-c_{ij}$가 되지만, 호 (i,j)의 용량상한이 0에서 c_{ij}까지 증가하게 되면 최대유통량도 증가하게 된다. 이를 정리하면 다음과 같다.

[정리 4] $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어졌을 때 호 (i,j)의 용량상한 u_{ij}가 $u_{ij}'=u_{ij}+\theta$로 변한다고 하자. 이 때 $h_{ij}<u_{ij}$인 상황에서 θ가 $-u_{ij}\leq\theta\leq-h_{ij}$ 사이에서 변하면 $V(\theta)=V(F)+\theta+h_{ij}$가 된다.

(증명)

$G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어졌을 때, 만일 $h_{ij}<u_{ij}$인 상황에서 θ가 $-u_{ij}\leq\theta\leq-h_{ij}$사이에서 변하면 [보조정리 1]에 의해 실제 u_{ij}'의 변화는 $0\leq u_{ij}'\leq c_{ij}$가 된다. 이때 $u_{ij}'=0$일 때에는 [정리 2]에 의해 $V(\theta)=V(F)-c_{ij}$가 되고, $u_{ij}'=c_{ij}$일 때에는 $V(\theta)=V(F)$가 된다. 이를 수식으로 나타내면 θ의 변화범위가 $-u_{ij}\leq\theta\leq-h_{ij}$일 때 $V(\theta)=V(F)+\theta+h_{ij}$로 나타낼 수 있다.

[정리 4]에서 호 (i,j)의 용량상한 u_{ij}'가 0에서 c_{ij}까지 증가됨에 따라 $V(\theta)$도 따라서 증가되었다. 그러나 용량상한 u_{ij}'가 c_{ij}에서 u_{ij} 사이에서 변할 경우에는 더 이상 $V(\theta)$가 증가되지 않는다. 따라서 이 때에는 $V(F)$를 계속 유지하는 감도분석의 범위를 구할 수 있다. 이것을 정리로 나타내면 다음과 같다.

[정리 5] $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어진 상황에서 호 (i,j)의 용량상한 u_{ij}가 $u_{ij}'=u_{ij}+\theta$로 변한다고 하자. 이때 만일 $h_{ij}<u_{ij}$일 때 θ가 $-h_{ij}\leq\theta\leq0$ 사이에서 변하거나, $h_{ij}\geq u_{ij}$일 때 θ가 $-u_{ij}\leq\theta\leq0$ 사이에서 변하게 되면 $V(\theta)=V(F)$가 된다.

(증명)

$G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어진 상황에서 만일 $h_{ij}<u_{ij}$일 때 θ가 $-h_{ij}\leq\theta\leq0$ 사이에서 변하면 실제 u_{ij}'의 범위는 $c_{ij}\leq u_{ij}'\leq u_{ij}$가 된다. 여기서 $u_{ij}'=c_{ij}$일 때 [정의 2]의 호의 최소유통용량의 정의에 따라 최대유통량 $V(F)$가 산출되고, $u_{ij}'=u_{ij}$일 때 원네트워크의 용량상한과 같기 때문에 최대유통량 $V(F)$가 보장된다.

마찬가지로 $h_{ij}\geq u_{ij}$일 때 θ가 $-u_{ij}\leq\theta\leq0$ 사이에서 변하면 실제 u_{ij}'의 범위는 $0\leq u_{ij}'\leq u_{ij}$가 된다. 여기서 $u_{ij}'=0$일 때 $V(\theta)=V(F)-c_{ij}$가 되지만 [보조정리 1]에 의해 $c_{ij}=0$이므로 $V(\theta)=V(F)$가 되고, $u_{ij}'=u_{ij}$일 때 원네트워크의 용량상한과 같기 때문에 최대유통량 $V(F)$가 구해진다.

다음으로 호 (i,j)의 용량상한이 u_{ij}보다 더 크게 증가될 경우 최대유통량에는 어떤 변화가 발생되는지 분석해 보자. 이를 위해 편의상 호 (i,j)의 용량상한을 무한대로 증가시켰다고 가정해 보자. 호의 용량이 무한대로 변하는 경우는 어떤 호의 용량을 늘려야 최대유통량을 가장 크게 증가시킬 수 있는가의 문제가 된다. 이러한 연구는 설비가 고정된 상태에서의 통신네트워크에서 장래 통신수요가 크게 증가되리라 예상될 때 어떤 호의 용량을 늘려주어야 전체 통신 용량을 가장 크게 증가시킬 수 있는가와 같은 용량 증가 문제에 적용할 수 있다.

호 (i,j)에 주어진 용량상한 u_{ij}'가 무한대로 증가하게 되면 호 (i,j)를 제외한 다른 호의 용량상한에 의해 최대유통량은 제한을 받게 된다. 이 때의 변화된 최대유통량을 다음 정리로 나타낼 수 있다.

[보조정리 6] $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어졌을 때 호 (i,j)의 용량상한 u_{ij}'가 무한대로 변했다면 최대유통량은 시점을 s, 종점을 t라 할 때 $\min\{h_{si}, h_{jt}\}$만큼 증가하게 된다.

(증명)

$G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어졌을 때 호 (i,j)의 용량상한이 무한대로 변했다고 가정하자. 그러면 호 (i,j)를 제외한 다른 호의 용량상한에 의해 최대유통량이 제한을 받게 된다. 이 때 $G_F=(N,A)$에서 시점 s에서 마디 i까지의 최대유통량을 h_{si}, 마디 j에서 종점 t까지의 최대유통량을 h_{jt}라고 하면, 시점 s로 부터 종점 t까지 더 보낼 수

있는 증가 가능한 유통량은 h_{si}와 h_{jt}중 더 작은 값에 의해 결정된다. 따라서 호 (i,j)의 용량상한이 무한대로 변할 경우 최대유통량은 $\min\{h_{si}, h_{jt}\}$만큼 증가하게 된다.

위의 [보조정리 6]에 따라 호 (i,j)의 용량이 증가했을 최대유통량을 가장 크게 증가시키는 호는 쉽게 구할 수 있다.

[종정리 7] $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어진 상황에서, 만일 호 (i,j)의 용량이 증가된다면 최대유통량을 가장 크게 증가시키는 호는 $\mathrm{MAX}_{(i,j)\in A}\min\{h_{si}, h_{jt}\}$에 해당하는 호 (i,j)가 된다.

(증명)

증명은 [보조정리 6]의 결과를 네트워크의 모든 호에 대해 고려한 결과이므로 당연하다.

한편 [보조정리 6]의 결과를 최소절단에 속하는 호와 최소절단에 속하지 않는 호로 구분하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

[보조정리 8] 만일 $h_{ij}=0$이면 $\min\{h_{si}, h_{jt}\}\geq 0$이 성립하지만 $h_{ij}\neq 0$ (즉, $0<h_{ij}<u_{ij}$이거나 $h_{ij}\geq u_{ij}$인 경우)이면 $\min\{h_{si}, h_{jt}\}=0$가 된다.

(증명)

최소절단에 속하는 호 (i,j)의 c_{ij}는 항상 u_{ij}와 같고, 최소절단에 속하지 않는 호 (i,j)의 최소유통용량은 비음값을 갖는다. 따라서 최소절단에 속하는 호 (i,j)의 h_{ij}는 [보조정리 1]에 의해 항상 $h_{ij}=0$가 되지만, 최소절단에 속하지 않는 호는 $h_{ij}\neq 0$가 된다.

따라서 $h_{ij}=0$인 경우에는 호 (i,j)가 최소절단에 속하기 때문에 호 (i,j)를 제외한 다른 호 들 간의 유통량 즉, $s\to i$까지와 $j\to t$까지의 최대유통량은 비음값을 가질 수 있다. 그러나 $h_{ij}\neq 0$ (즉, $0<h_{ij}<u_{ij}$이거나 $h_{ij}\geq u_{ij}$인 경우)인 경우에는 호 (i,j)를 제외한 다른 호가 최소절단에 속하기 때문에 $s\to i$까지나 $j\to t$까지의 최대유통량 중 어느 하나는 반드시 0의 값을 갖게 된다. 따라서 이 경우에 $\min\{h_{si}, h_{jt}\}=0$가 된다.

위의 [보조정리 8] 을 이용하여 호의 용량이 증가하는 범위에서 최대유통량이 어떻게 바뀌는지 살펴보면 다음과 같다.

[정리 9] $G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어졌을 때 호 (i,j)의 용량상한 u_{ij}가 $u_{ij}'=u_{ij}+\theta$로 변한다고 가정하자. 이 때 만일 $h_{ij}=0$일 때 θ가 $0\leq\theta\leq\min\{h_{si}, h_{jt}\}$ 사이에서 변하면 $V(\theta)=V(F)+\theta$가 되고, $\min\{h_{si}, h_{jt}\}\leq\theta\leq\infty$ 사이에서 변하면 $V(\theta)=V(F)+\min\{h_{si}, h_{jt}\}$가 된다. 그러나 만일 $h_{ij}\neq 0$이면 θ가 0에서 무한대까지 증가될 때 $V(\theta)=V(F)$의 값을 갖게 된다.

(증명)

$G=(N,A)$에 대한 최적해가 주어진 상황에서 호 (i,j)의 용량상한 u_{ij}가 $u_{ij}'=u_{ij}+\theta$로 변할 때, 만일 $h_{ij}=0$이면 [보조정리 8]에 의해 $\min\{h_{si}, h_{jt}\}\geq 0$이 성립한다. 따라서 θ가 $0\leq\theta\leq\min\{h_{si}, h_{jt}\}$사이에서 변하게 되면 u_{ij}'의 변화는 $u_{ij}\leq u_{ij}'\leq u_{ij}+\min\{h_{si}, h_{jt}\}$만큼의 변화가 되며, 이 때 최대유통량은 호의 용량상한을 θ만큼 늘려 줌에 따라 최대유통량도 θ만큼 늘어나게 된다. 즉, $V(\theta)=V(F)+\theta$가 된다. 만일 θ가 $\min\{h_{si}, h_{jt}\}\leq\theta\leq\infty$ 사이에서 변할 경우에는 [보조정리 6]에 의해 최대유통량은 $\min\{h_{si}, h_{jt}\}$값에 의해 제한을 받기 때문에 $V(\theta)=V(F)+\min\{h_{si}, h_{jt}\}$가 된다.

그러나 만일 $0<h_{ij}<u_{ij}$이거나 $h_{ij}\geq u_{ij}$일 경우에는 [보조정리 8]에 의해 $\min\{h_{si}, h_{jt}\}=0$이므로 θ가 0에서 무한대까지 증가될 때 $V(\theta)=V(F)$의 값을 갖게 된다.

이러한 결과를 Murty의 임계용량 k_{ij}^*의 개념과 비교해 보면 다음과 같다.

[정리 10] 호 (i,j)의 임계용량 k_{ij}^*은 $\min\{h_{si}, h_{jt}\}+\max\{0, u_{ij}-h_{ij}\}$이다. 그러므로 $h_{ij}=0$인 경우(최소절단에 속하는 호)의 임계용량은 $k_{ij}^*=\min\{h_{si}, h_{jt}\}+u_{ij}$이고, $h_{ij}\neq 0$ 인 경우(최소절단에 속하지 않은 호)의 임계용량은 $k_{ij}^*=\max\{0, u_{ij}-h_{ij}\}$이다.

(증명)

Murty의 임계용량은 호 용량의 변화에 따른 최대유통량의 변화량을 의미한다. 따라서 Murty는 임계용량을 $k_{ij}^*=v(\infty)-v(0)$로 계산하고 있다[8].

그러므로 본 연구에서의 θ가 0에서 무한대까지 증가될 때의 구간에 해당하는 $v(\infty)=V(F)+\min\{h_{si}, h_{jt}\}$가 되고, θ가 $-u_{ij}$에 해당하는 $v(0)=V(F)-\max\{0, u_{ij}-h_{ij}\}$에 해당한다. 그러므로 임계용량은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$k^*_{ij}=v(\infty)-v(0)=V(F)+\min\{h_{si}, h_{jt}\}-(V(F)-\max\{0, u_{ij}-h_{ij}\})$
$=\min\{h_{si}, h_{jt}\}+\max\{0, u_{ij}-h_{ij}\}$.

우선, $h_{ij}=0$인 경우 즉, 호 (i,j)가 최소절단에 속할 경우에 호 (i,j)의 c_{ij}는 항상 u_{ij}와 같다. 따라서 $k^*_{ij}=v(\infty)-v(0)=\min\{h_{si}, h_{jt}\}+u_{ij}$이다. 그리고 $h_{ij}\neq 0$인 경우 즉, 호 (i,j)가 최소절단에 속하지 않는 경우에는 호 (i,j)에 c_{ij}(단, $0\le c_{ij}\le u_{ij}$) 만큼의 유통량이 흐르고 있다. 이 때 호 (i,j)의 용량을 현재의 u_{ij} 보다 더 크게 늘려 주더라도 호 (i,j)가 최소절단에 속하지 않기 때문에 최대유통량은 더 이상 늘어 나지 않는다. 이때는 [보조정리 8] 에 의해 $\min\{h_{si}, h_{jt}\}$은 0의 값을 가지게 되고 따라서, $k^*_{ij}=c_{ij}=\max\{0, u_{ij}-h_{ij}\}$과 같다.

이상의 특성들을 정리해 보면 다음과 같다.

· $h_{ij}=0$인 호(즉, 최소절단에 속한 호)에 대하여
  $-u_{ij}\le\theta\le\min\{h_{si}, h_{jt}\}$일 때, $V(\theta)=V(F)+\theta$
  $\min\{h_{si}, h_{jt}\}\le\theta\le\infty$일 때, $V(\theta)=V(F)+\min\{h_{si}, h_{jt}\}$
· 이외의 호에 대해서
  만일 $0<h_{ij}<u_{ij}$인 호 (i,j)에 대하여
  $-u_{ij}\le\theta\le -h_{ij}$일 때, $V(\theta)=V(F)+\theta+h_{ij}$
  $-h_{ij}\le\theta\le\infty$일 때, $V(\theta)=V(F)$
  만일 $h_{ij}\ge u_{ij}$인 호 (i,j)에 대하여
  $-u_{ij}\le\theta\le\infty$일 때, $V(\theta)=V(F)$

이를 그림으로 나타내면 다음 그림 1과 같다.

계산법

네트워크 $G=(N,A)$의 모든 호에 대한 사후분석을 위해 먼저 주어진 $G=(N,A)$에 대한 $G_F=(N,A')$를 구성한 뒤, $G_F=(N,A')$에서 각 호 $(i,j)\in A$에 대한 h_{ij}를 구하여 θ의 변화에 따른 최대유통량을 계산한다. 자세한 해법은 다음과 같다.

[단계 0] 최적해 산출

$G=(N,A)$에 대한 최적해를 구한다.

[단계 1] $G_F=(N,A')$에서의 유통량(h_{ij} h_{si} h_{jt}) 계산

(1-1) 주어진 최대유통문제에 대한 $G_F=(N,A')$를 구성한다.

이 때 $G_F=(N,A')$에서의 수정된 용량상한 $\bar{U}$는 다음과 같이 정의된다.

만일 $f_{xy}>0$, $(x,y)\in A$이면 $\bar{u}_{xy}=u_{xy}-f_{xy}$, $\bar{u}_{yx}=f_{xy}$
만일 $f_{xy}=0$,$(x,y)\in A$이면 $\bar{u}_{xy}=u_{xy}$

(1-2) $G_F=(N,A')$에서의 유통량(h_{ij} h_{si} h_{jt}) 계산

최소절단에 해당하는 호 (i,j)에 대하여 h_{si}와 h_{jt}를 계산.
최소절단에 속하지 않는 호 (i,j)에 대하여 h_{ij} 계산

[단계 2] 호 $(i,j)\in A$의 용량상한의 변화범위 θ에 따른 $V(\theta)$ 산출

(2-1) $h_{ij}=0$인 호 (i,j)에 대하여 (즉, 최소절단에 해당하는 호에 대해)
$-u_{ij}\le\theta\le\min\{h_{si}, h_{jt}\}$일 때, $V(\theta)=V(F)+\theta$
$\min\{h_{si}, h_{jt}\}\le\theta\le\infty$일 때, $V(\theta)=V(F)+\min\{h_{si}, h_{jt}\}$

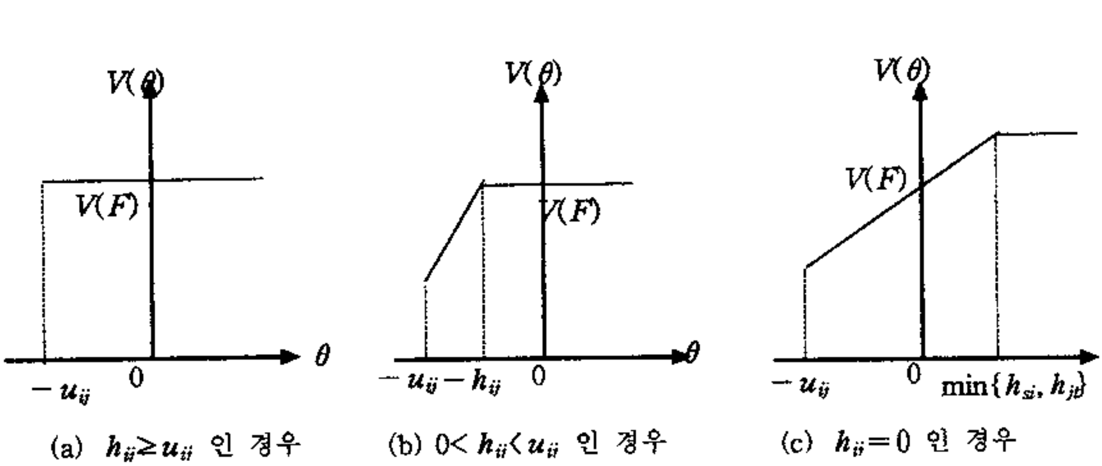

그림 1. h_{ij}에 따른 $V(\theta)$의 변화

(2-2) $0 < h_{ij} < u_{ij}$인 호 (i,j)에 대하여

$-u_{ij} \le \theta \le -h_{ij}$일 때, $V(\theta)=V(F)+\theta+h_{ij}$

$-h_{ij} \le \theta \le \infty$일 때, $V(\theta)=V(F)$

(2-3) $h_{ij} \ge u_{ij}$인 호 (i,j)에 대하여

$-u_{ij} \le \theta \le \infty$일 때, $V(\theta)=V(F)$

본 사후분석 해법에 대한 계산의 복잡도를 살펴보면 다음과 같다. 이때 사후분석을 실시하기 위한 최대유통문제를 풀어 최적해와 최소절단을 알고 있는 전제에서의 계산량을 살펴보면 다음과 같다. 첫 번째, 한 호에 대해서만 사후분석을 실시할 경우 최소절단에 속한 호에 대해서는 2 회(h_{si}와 h_{jt})의 최대유통문제를 풀어야 하지만 최소절단에 속하지 않는 호에 대해서는 1 회(h_{ij})만 풀면 된다. 그리고, 여러 호에 대한 사후분석을 할 경우에도 최소절단에 속한 호들에 대해서 2 회씩, 최소절단에 속하지 않는 호들에 대해서는 1 회씩의 최대유통문제만 풀면 가능하다. 그리고 마지막으로 네트워크의 모든 호에 대해 사후분석을 시행 할 경우에는, 시점과 종점을 제외한 모든 마디의 2배의 최대유통문제 + 최소절단에 속하는 호를 제외한 모든 호의 시작마디와 도착마디를 시점과 종점으로 둔 최대유통문제, 즉 최대 $(2^*|N-2|+|A|)$회의 최대유통문제를 풀어 전체 호에 대한 사후분석의 결과를 얻을 수 있다.

그리고 기존에 알려진 유사연구의 방법인 Murty의 경우에 한 호에 대한 사후분석을 하기 위해 2회, 모든 호에 대한 사후분석을 위해 전체 호 개수의 2회에 해당하는 최대유통문제를 풀어서 해결 할 수 있었다.

그러나 Murty의 연구와 본 연구의 차이는 본 방법이 최대유통문제의 임의의 하나의 최적해를 이용한 변환네트워크에서 호의 시점과 종점사이의 유통량을 구하여 이를 통해 호의 용량의 변화에 따른 최대유통량의 변화를 구하는 사후분석방법임에 반하여 기존의 방법은 구하고자 하는 호 용량을 각각 0과 ∞로 만든 문제들을 풀어서 구한 임계용량을 이용하는데 기안한다. 계산량의 측면에서 한 호나 수 개의 호에 대한 사후분석을 실시할 경우에는 본 연구가 최적해가 구해진 상태에서 시작해야하기 때문에 필요한 1회의 최대유통문제를 푸는 계산 만큼의 계산량이 더 많을 수 있으나, 고려하는 호의 수가 많아질수록 본 연구에서 제시한 방법이 계산량이 기존의 연구의 그것보다 작아지는 것을 볼 수 있다.

그러므로 본 연구가 $V(F)$라는 하나의 최적해를 이용해서 사후분석을 하는 보다 일반적인 의미의 사후분석이라 할 수 있다.

4. 예제

다음과 같이 마디수가 6개이고 호의 수가 8인 최대유통문제를 고려해 보자. 이 문제의 최대유통량은 27이며, 이 때의 각 호에 대한 최적유통량은 괄호의 왼편에 나타나 있다[7].

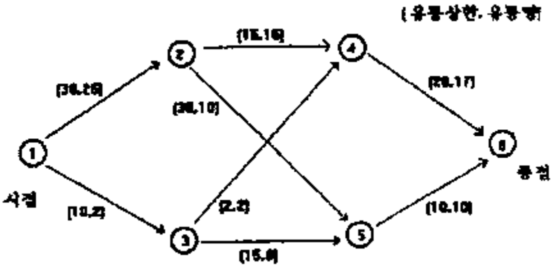

그림 2. 최대유통문제 G=(N,A)의 최적해 (V(F)=27)

주어진 문제에 대한 $G_F=(N,A')$를 구성하면 그림 3과 같다.

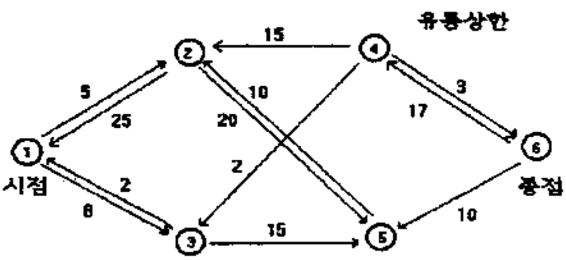

그림 3. G=(N,A)에 대한 G_F=(N,A')

각 호 (i,j)의 최소유통용량을 구하기 위해 그림 3의 $G_F=(N,A')$상에서 마디 i에서 마디 j까지의 최대유통량을 구해 보면 다음과 같다.

최소절단에 해당하는 호가 (2,4), (3,4), (5,6)이므로 이 호들에 대해서는 h_{12}, h_{13}, h_{15}, h_{46}를 구하여 계산할 수 있고 그 외의 호 $(i,j) \in A$에 대해서는 h_{ij}를 구하여서 사후분

H=

To / From	①	②	③	④	⑤	⑥
①	∞	13	8	0	13	0
②	-	∞	-	0	28	0
③	-	-	∞	0	17	0
④	-	-	-	∞	-	3
⑤	-	-	-	-	∞	0
⑥	-	-	-	-	-	∞

* 단, 음영부분의 계산만이 필요

C=

To / From	①	②	③	④	⑤	⑥
①	∞	17	2	-	-	-
②	-	∞	-	15	2	-
③	-	-	∞	2	0	-
④	-	-	-	∞	-	17
⑤	-	-	-	-	∞	10
⑥	-	-	-	-	-	∞

석에 사용될 정보를 얻을 수 있다. 위의 유통량 행렬 (H)에서 볼 수 있듯이 본 사후분석해법의 경우는 최적해가 주어진 상태에서 6번(최적해가 주어지지 않는 경우에 7번)의 최대유통문제를 풀어서 구하고자 하는 모든 정보를 얻을 수 있음을 볼 수 있다.

[보조정리 1]에 의해 각 호 (i,j)의 최소유통용량은 다음과 같다.

부가적으로 호의 최소유통용량이 가장 큰 호는 호 (1,2)와 호 (4,6)이기 때문에 [종정리 3]에 의해 이들 호가 치명호가 된다.

한편, 전체 사후분석의 범위를 구해 보면 다음 표 1과 같다. 이때 범위 1은 최대유통량이 감소하는 구간, 범위 2는 최대유통량을 유지하는 구간, 범위 3은 최대유통량이 증가하는 구간, 범위 4는 최대유통량이 증가하지 않는 구간을 나타낸다. 이 결과에서 알 수 있듯이 최소절단에 속한 호 (2,4), (3,4), (5,6)의 경우는 그림 1의 (c), 호(3,5)의 경우는 (a), 그리고 나머지 경우는 (b)에 해당한다.

또한 부가적으로 호의 용량을 증가시킬 때 최대유통량을 가장 크게 증가시킬 수 있는 호는 범위 4에서 가장 큰 최대유통량을 갖는 호(5, 6)이 된다.

5. 결 론

이 연구에서는 임의의 하나의 최대유통문제의 최적해가 구해진 상태에서, 이 최적해를 이용하여 호 용량의 변

표 1. G=(N,A)에 대한 용량상한의 변화(θ)에 따른 V(θ)의 변화

호		범위 1	범위 2	범위 3	범위 4
(1,2)	θ	$-30\le\theta\le-13$	$-13\le\theta\le0$	$0\le\theta\le0$	$0\le\theta\le\infty$
	$V(\theta)$	$10\le V(\theta)\le27$	$V(\theta)=27$	$27\le V(\theta)\le27$	$V(\theta)=27$
(1,3)	θ	$-10\le\theta\le-8$	$-8\le\theta\le0$	$0\le\theta\le0$	$0\le\theta\le\infty$
	$V(\theta)$	$25\le V(\theta)\le27$	$V(\theta)=27$	$27\le V(\theta)\le27$	$V(\theta)=27$
(2,4)	θ	$-15\le\theta\le0$	$0\le\theta\le0$	$0\le\theta\le3$	$3\le\theta\le\infty$
	$V(\theta)$	$12\le V(\theta)\le27$	$V(\theta)=27$	$27\le V(\theta)\le30$	$V(\theta)=30$
(2,5)	θ	$-30\le\theta\le-28$	$-28\le\theta\le0$	$0\le\theta\le0$	$0\le\theta\le\infty$
	$V(\theta)$	$25\le V(\theta)\le27$	$V(\theta)=27$	$27\le V(\theta)\le27$	$V(\theta)=27$
(3,4)	θ	$-2\le\theta\le0$	$0\le\theta\le0$	$0\le\theta\le3$	$3\le\theta\le\infty$
	$V(\theta)$	$25\le V(\theta)\le27$	$V(\theta)=27$	$27\le V(\theta)\le30$	$V(\theta)=30$
(3,5)	θ	$-15\le\theta\le-15$	$-15\le\theta\le0$	$0\le\theta\le0$	$0\le\theta\le\infty$
	$V(\theta)$	$27\le V(\theta)\le27$	$V(\theta)=27$	$27\le V(\theta)\le27$	$V(\theta)=27$
(4,6)	θ	$-20\le\theta\le-3$	$-3\le\theta\le0$	$0\le\theta\le0$	$0\le\theta\le\infty$
	$V(\theta)$	$10\le V(\theta)\le27$	$V(\theta)=27$	$27\le V(\theta)\le27$	$V(\theta)=27$
(5,6)	θ	$-10\le\theta\le0$	$0\le\theta\le0$	$0\le\theta\le13$	$13\le\theta\le\infty$
	$V(\theta)$	$17\le V(\theta)\le27$	$V(\theta)=27$	$27\le V(\theta)\le40$	$V(\theta)=40$

화에 따른 최대유통량의 변화를 계산하는 사후분석 방법을 제시하였다.

이를 위해 먼저 주어진 네트워크에 대한 변환네트워크를 정의한 후, 이 변환네트워크에서 각 호의 시작마디로부터 종착마디까지의 최대유통량을 구하고, 이 값을 이용하여 치명호에 해당되는 호, 최대유통량을 가장 크게 증가시킬 수 있는 호, 그리고 최대유통량을 계속 감소, 유지 그리고 증가 시킬 수 있는 호 용량의 변화범위 등을 계산하였다.

이 연구에서 제시한 해법은 기존의 방법보다 계산의 복잡도면에서 보다 개선된 방법이며, 최적해를 이용하여 분석할 수 있어 사후분석의 의미에 보다 충실한 방법이라 할 수 있다.

참고문헌

[1] 박순달, OR(경영과학), 삼정판, 민영사, 1992

[2] Ahuja, R. K., T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, *Network Flows-Theory, Algorithms and Applications*, Prentice-Hall, 1993

[3] Ball, M. O., R. L. Golden, and R. V. Vohra, "Finding the Most Vital Arcs in a Networks", *Operations Research Letters*, Vol 8, pp 73-76, 1989

[4] Dinic, E. A., "Algorithm for Solution of a Problem of Maximum Flow in Networks with Power Estimation", *Soviet Mathematics Doklady*, Vol 11, pp 1277-1280, 1970

[5] Durbin, E. P., "An Interdiction Model of Highway Transportation", *Memorandum* RM-4945-PR, May 1966

[6] Ford, L. R., and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, NL, 1962

[7] Lubore, S. H., H. D. Ratliff, G. T. Sicillia "Determining the Most Vital Link in a Flow Network", *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol 18, No 4, pp 711-713, 1971

[8] Murty, K. G., *Network Programming*, Prentice-Hall, 1992

[9] Ratliff, H. D., G. T. Sicilia, and S. H. Lubore, "Finding the n Most Vital Links in Flow Networks", *Management Science*. Vol 21, No 5, pp 531 - 539, 1975

[10] Wollmer R. D., M. J. Ondrasek, "A Model for Targeting Strikes in an Loc Network", *Memorandum* RM-5940-PR, September, 1969

96년 2월 최초 접수, 97년 5월 최종 수정