Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.23, N0.4, December, 1997

부하분담형 병렬 시스템에서의 최적 중복부품수와 최적 검사주기

Optimal Redundent Units and Inspection Interval in Load-Sharing Parallel System

윤원영* · 김귀래*

Won Young Yun* · Gui Rae Kim*

Abstract

This paper is concerned with a parallel system that sustains a time-independent load and consists of n components with exponential lifetimes. It is assumed that the total load is shared by the functioning components and the failures of components induce higher failure rates in the surviving components according to the relationship between the load and the failure rates. The power rule model among several load-failure rate relationships is considered. Firstly, the reliability function is obtained. Secondly, the optimization problem in this load-sharing parallel system is considered. The optimal redundant units and inspection interval are obtained. Some numerical examples are studied.

1. 서 론

시스템의 신뢰도를 향상시키기 위한 한 방법은 부품을 중복으로 사용하는 것으로, 가장 전형적인 형태가 병렬구조 시스템이다. 이 병렬구조 시스템은 구성된 부품이 하나 이상 작동하면 시스템이 작동하는 시스템이다. 기존의 병렬구조 시스템에 대한 연구는 구성 부품의 고장이 서로 독립인 경우를 많이 가정하였다.

본 논문은 중복된 구성부품의 고장이 종속관계가 있는 시스템을 고려한다. 이 같은 구성부품의 종속성에 관한 모형으로는 첫째 일시고장(Common mode failure)을 고려한 모형이 있다[1]. 이 모형은 작업자의 오류나 또는 전력 공급의 순간적인 변동과 같이 주위 환경의 갑작스러운 충격이나 변화등의 원인으로 2개 이상의 부품들이 동시에 고장을 일으키는 것을 고려한 모형이다. 이 모형은 본 논문에서는 다루지 않는다.

두번째로는 부하 분담 모형(Load - Sharing model)을 고려할 수 있다. 실질적으로 시스템은 작동하는 동안에 여러 부하를 받게 된다. 부하 자체가 시스템 작동의 임무인 경우도 있고, 또 시스템의 작동으로 인한 부품의 마모(Wear)나 손상(Damage) 등을 받는 경우도 있다. 이러한 부하는 시스템이 작동하는 동안에 시스템 내 작동하는 부품들에 분담되며 부품의 고장률이나 신뢰도 등을 변화시킨다. 시간이 지나면서 부품들이 하나씩 고장이 나게 되면 작동 중인 잔여 부품들이 총 부하를 분담하게 되므로 잔여 부품들이 분담하는 부하의 양은 증가하게 된다. 이러한 모형을 일컬어 "부하분담 모형(Load-Sharing model)"이라 한다. 모형에서는 각 부품들의 고장률이 부품들이 분담하고 있는 부하의 양에 비례한다고 가정한다. 이러한 시스템에는 현수교의 지지 철선과 같은 구조물 지지 부

* 부산대학교 산업공학과(기계기술연구소)

분등을 예로 들 수 있다. 본 논문은 이러한 부하-분담 모형을 고려한 병렬구조 시스템의 신뢰도 함수와 중복 개수와 검사주기를 최적으로 결정하고자 한다.

부하 분담 병렬구조 시스템에 대한 시스템 신뢰도를 계산하는 연구로서Kapur와Lamberson[2]은 구성부품이 2개이고 종류가 다른 경우 그리고 같은 경우에 대해서 부품 수명이 지수분포를 따르는 경우에 대한 신뢰도를 구하였다. 그리고 Kececioglu[3]는 구성부품의 수가 2개인 경우와 3개인 경우에 대해서 역시 종류가 같은 경우와 다른 경우에 대해 수명이 지수 분포와 와이블 분포를 따르는 경우에 대한 신뢰도를 계산하였다.

Scheuer[8]은 병렬구조의 일반형인 k-out-of-n:G 시스템에서 작동하고 있는 부품들의 수명이 지수를 따르고 각 부품의 고장률이 고장난 부품의 수에 따라 변하는 경우에 대해 시스템의 신뢰도를 구하였다. Shechner[7]는 임의의 시점에서 부품의 고장률이 그 시점에서의 부하에 선형관계인 경우에 시스템 신뢰도를 구하였다. Shao와 Lamberson[9]은 불완전 연결(Imperfect switching)을 가지는 수리가능한 부하 분담 k-out-of- n:G시스템의 신뢰도와 가용도(Availability) 분석을 위한 Markov 모형을 제안하였다. Lin와Chen 그리고 Wang[5]은 병렬구조 시스템에서 각 구성부품의 수명이 지수 분포를 따를 때의 신뢰도를 Markov 모형을 이용하여 계산하였다.

부하 분담 병렬구조 시스템의 설계나 운영에 관한 연구는 미흡한 데, 도형찬[12]은 동일한 부품으로 이루어진 k-out-of-n:G시스템의 가용도,신뢰도와 함께 단위 시간당 비용함수를 최소로 하는 최적 중복 부품수를 결정하였다.

이러한 연구들은 시스템의 구성부품이 모두 같은 종류인 경우에 대해서만 연구가 이루어졌다. 서로 다른 부품인 경우에 대해서는 일반적인 부하 분담 병렬구조 시스템와 신뢰도에 대한 연구는 이루어 지지 않고 있다.

본 논문에서는 먼저 부하를 분담하는 병렬구조 시스템에서 구성된 부품이 동일하지 않는 경우의 일반적인 신뢰도 함수를 유도하고, 최적설계와 운영 문제로서 정기적으로 검사(고장부품의 확인 및 교체)를 하는 경우 최적 중복 부품수와 검사주기를 동시에 고려한 모형을 제안하며 단위 시간당 평균 비용을 최소로 하는 최적의 중복개수와 검사주기를 결정하는 문제를 다룬다.

2. 신뢰도 함수

이 절에서는 먼저 고장률과 부하와의 관계에 대하여 설명하고 부하 분담 모형 가정하에서 구성부품이 서로 다른 부품인 시스템의 신뢰도를 구한다. 그리고 구해진 신뢰도 함수의 특별한 경우로서 동일 부품으로 구성된 병렬 시스템의 신뢰도를 구한다. 본 논문에서 사용되는 가정과 기호는 다음과 같다.

가정

1. 부품의 초기 고장까지의 수명은 서로 독립이고 고장률이 λ_j인 지수 분포를 따른다.
2. 시스템에 가해지는 총 부하는 시간에 따라 변하지 않는다.
3. 시스템에 걸리는 총 부하는 작동 중인 부품들에 의해 균등하게 분담된다.

기호

n: 총 부품 개수

L: 시스템에 가해지는 총부하

T: 정기적인 검사를 할 때의 검사주기

$l(i)$: i개의 부품이 고장났을 때 나머지 작동 중인 부품들에 가해지는 부하의 크기. i=0,1,…,n-1

λ_{lj}: l의 부하가 걸렸을 때 j부품의 고장률

$\lambda_j^{(i)}$: i개의 부품이 고장났을 때 작동 중인 j부품의 고장률 i=0,1,…,n-1

p_0,p_1: j부품의 거듭제곱(Power rule) 모형과 관련된 모수

n_r: r번째 고장난 구성 부품의 번호 r=1,2,…,n

t_r: r번째 고장 발생 시간 r=1,2,…,n

$R(t)$,$f(t)$: 시스템의 신뢰도 함수, 고장 밀도 함수

$p_r(t)$: t시점까지 고장난 부품 수가 r개일 확률

$r_{n_1,n_2,\cdots,n_r}(t)$: t시점까지 고장난 부품의 수가 r개로 주어진 경우 처음 고장난 부품이 n_1, 두 번째 고장난 부품이 n_2,…,r번째 고장난 구성부품이 n_r이 될 확률

$h_j(t)=\lambda e^{-\lambda t}$

$G_j(t)=e^{-\lambda t}$

C_1: 부품 개당 획득 비용

C_2: 시스템 교체 시 추가 비용

C_3: 검사 1회당 소요되는 비용

$C(n,T)$: 정기적인 검사가 있는 경우의 단위 시간당 평균 비용

$C(n)$: 검사를 하지 않는 경우의 단위 시간당 평균 비용

거듭 제곱 모형에서 신뢰도 함수

고장난 부품의 수와 작동중인 부품의 고장률과의 관계를 유도하기 위해 부하와 고장률과의 관계를 표현해야만 한다. 부하와 고장률과의 관계를 나타내는 모형으로는 첫 번째는 거듭제곱(Power Rule)모형으로 부하가 증가할수록 부품의 고장률은 부하의 거듭제곱에 비례한다. Levenbach[4]은 부 전도성 축전기(Dielectric capacitor)의 수명시험에서 이 모형을 사용하였다. 두번째 모형은 아레니우스(Arrhenius)모형이다. 이 모형은 반도체나 전자부품의 수명시험에서 사용되기도 하며, 시스템에 걸어주는 부하가 증가하면 시스템의 고장률은 부하의 지수에 비례하여 증가한다[10]. 마지막 모형은 아이링(Eyring)모형으로 거듭제곱 모형과 아레니우스 모형의 혼합 형태라고 할 수 있다. 이 모형은 마이크로 회로의 수명 시험에서 시스템의 고장률과 부하와의 관계를 나타내는데 사용되었으며[6] 부하가 증가하면 고장률은 부하와 부하의 지수의 곱에 비례하며 증가한다.

본 논문에서는 부하와 고장률의 관계를 나타내는데 거듭 제곱 모형을 사용한다. 즉 부품에 가해지는 부하가 l일 때의 j부품의 고장률은 다음과 같다.

$$\lambda_{lj}=p_{0j}l^{p_{1j}} \qquad , p_{0j}>0, p_{1j}>0 \tag{1}$$

식 (1)로 부터 고장난 부품의 수와 작동 중인 잔여 부품의 고장률과의 관계를 나타내고, 이로부터 병렬구조 시스템의 신뢰도를 구한다. 가정 3으로부터 i 개의 부품이 고장 났을 때, 작동 중인 잔여 부품들이 각각 받게 되는 부하는

$$l(i)=\frac{L}{n-i} \qquad , i=0,1,\cdots n-1 \tag{2}$$

이다. 따라서 i개의 부품이 고장났을 때 작동 중인 잔여 부품 j의 고장률은

$$\lambda_j^{(i)}=p_{0j}\left(\frac{L}{n-i}\right)^{p_{1j}} \qquad , i=0,1,\cdots n-1 \tag{3}$$

이 된다.

시스템의 신뢰도란 주어진 운용 조건하에서 일정한 사용 기간 동안 시스템이 작동할 확률을 의미하며, 병렬구조 시스템은 모든 구성부품이 고장이 나면 시스템이 고장나므로, 시스템이 일정시간 t까지 작동할 확률은 t시점에 구성부품이 하나도 고장나 있지 않거나 또는 1개,2개,$\cdots$,$n-1$개가 고장나 있을 확률의 합이다. 그러므로, t 시점에 시스템이 작동할 확률 즉 신뢰도는 다음과 같다.

$$R(t)=P_0(t)+\sum_{r=1}^{n-1}P_r(t) \tag{4}$$

여기서, $P_0(t)=e^{-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j t}$이며, 식(4)의 $P_r(t)$를 구해야 하는데 $P_r(t)$는 고장나 있는 구성부품의 개수가 r개라고 가정할 때 처음 고장난 구성부품이 n_1이고, 다음 고장난 부품이 n_2이고, r번째 고장난 구성부품이 n_r이 될 확률의 합으로 표현할 수 있다.

$$P_r(t)=\sum_{n_1=1}^{n}\sum_{\substack{n_2=1\\ n_2\neq n_1}}^{n}\cdots\sum_{\substack{n_r=1\\ n_r\neq n_1,n_2,\cdots,n_{r-1}}}^{n} r_{n_1,n_2,\cdots,n_r}(t) \tag{5}$$

여기서,

$$r_{n_1,n_2,\cdots,n_r}(t)=$$

$$\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{r-1}} h_{\lambda_{n_1}}(t_1)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n_1}}^{n} G_{\lambda_j}(t_1)\cdot h_{\lambda_{n_2}}(t_2-t_1)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n_1,n_2}}^{n} G_{\lambda_j}(t_2-t_1)$$

$$\vdots$$

$$h_{\lambda_{n_r}}(t_r-t_{r-1})\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n_1,n_2,\cdots,n_r}}^{n} G_{\lambda_j}(t_r-t_{r-1})\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n_1,n_2,\cdots,n_r}}^{n} G_{\lambda_j}(t-t_r)\,dt_1\,dt_2\cdots dt_r$$

$$=\lambda_{n_1}\lambda_{n_2}^{(1)}\cdots\lambda_{n_r}^{(r-1)}\int_0^t\int_0^{t_r}\cdots\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}\exp\Big[-\Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j t_1+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1}}^{n}\lambda_j(t_2-t_1)+$$

$$\cdots+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1,\cdots,n_{r-1}}}^{n}\lambda_j^{(r-1)}(t_r-t_{r-1})+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1,\cdots,n_{r-1}}}^{n}\lambda_j^{(r)}(t-t_r)\Big)\Big]dt_1\cdots dt_r$$

$$= \lambda_{n_1}\lambda_{n_2}\cdots\lambda_{n_r} e^{-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(0)}t} \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}A(r-k)\cdot$$

$$\Pi_{q=r+k+1}^{n}\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1,\cdots,n_{r-k}}}^{n}\lambda_j^{(r-k)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1,\cdots,n_q}}^{n}\lambda_j^{(q)}\Big)^{-1}\cdot$$

$$\Big(1-e^{\Big(-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1,\cdots,n_{r-k}}}^{n}\lambda_j^{(r-k)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1,\cdots,n_r}}^{n}\lambda_j^{(r)}\Big)t}\Big) \tag{6}$$

이다. 여기서,

$$A(r)=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}A(r-k)\Pi_{q=r-k+1}^{r}\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1,\cdots,n_{r-k}}}^{n}\lambda_j^{(r-k)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1,\cdots,n_q}}^{n}\lambda_j^{(q)}\Big)^{-1} \tag{7}$$

이다. (여기서 $A(0)=1$)

이제 고장률과 부하가 거듭 제곱(Power Rule)모형을 따를 경우의 신뢰도는 다음과 같다.

$$R(t)=e^{-\sum_{j=1}^{n}p_{0j}\left(\frac{L}{n}\right)^{p_{1j}}t}$$

$$+\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{n_1=1}^{n}\cdots\sum_{\substack{n_r=1\\ n_r\neq n_1\cdots n_{r-1}}}^{n}\frac{(L)^{\sum_{i=1}^{r}p_{1i}}\Pi_{j=n_1}^{n_r}p_{0j}}{n^{\sum_{i=1}^{r}p_{1i}}(n-1)^{p_{1n_2}}\cdots(n-r+1)^{p_{1n_r}}}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}A(r-k)$$

$$\cdot\Pi_{q=r-k+1}^{r}\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1\cdots n_{r-k}}}^{n}p_{0j}\Big(\frac{L}{n-r+k}\Big)^{p_{1j}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1\cdots n_q}}^{n}p_{0j}\Big(\frac{L}{n-q}\Big)^{p_{1j}}\Big)^{-1}\cdot$$

$$\Big(e^{-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1\cdots n_r}}^{n}p_{0j}\left(\frac{L}{n-r}\right)^{p_{1j}}t} - e^{-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1\cdots n_{r-k}}}^{n}p_{0j}\left(\frac{L}{n-r+k}\right)^{p_{1j}}t}\Big) \tag{8}$$

여기서,

$$A(r)=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}A(r-k)\Pi_{q=r-k+1}^{r}\Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1,\cdots,n_{r-k}}}^{n}p_{0j}\Big(\frac{L}{n-r+k}\Big)^{p_{1j}}$$

$$-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n_1\cdots n_q}}^{n}p_{0j}\Big(\frac{L}{n-q}\Big)^{p_{1j}}\Big)^{-1}$$

n개가 동일 부품인 경우의 신뢰도

n개가 동일 부품인 경우에 신뢰도 함수를 구한다. n개가 같은 구성부품이므로 모든 i,j에 대해서 $\lambda_j^{(i)}=\lambda(i)$이다. 그러므로 식(3)은

$$\lambda_j^{(i)}=p_0\Big(\frac{L}{n-1}\Big)^{p_1} \tag{9}$$

된다. 이 식(9)을 식(8)에 대입하면

$$R(t)=e^{-\frac{p_0L^{p_1}}{n^{p_1-1}}t}+\sum_{r=1}^{n-1}\frac{(p_0L^{p_1})^{r-1}}{[n(n-1)\cdots(n-r-1)]^{p_1-1}}$$

$$\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}A(r-k)\Pi_{q=r-k+1}^{r}\Big(\frac{1}{(n-r+k)^{p_1-1}}-\frac{1}{(n-q)^{p_1-1}}\Big)^{-1}\Big(e^{-\frac{p_0L^{p_1}t}{(n-r)^{p_1-1}}}-e^{-\frac{p_0L^{p_1}t}{(n-r+k)^{p_1-1}}}\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big\{\Pi_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{(n-i+1)^{p_1-1}}{(n-i+1)^{p_1-1}-(n-j+1)^{p_1-1}}\Big)\exp\Big(-\frac{p_0L^{p_1}}{(n-i+1)^{p_1-1}}t\Big) \tag{10}$$

된다.

3. 최적 중복 부품수와 최적 검사주기

이 절에는 정기적인 검사를 하는 경우에 최적 중복 부품수와 최적 검사주기를 구하고자 한다. 도형천[12]은 검사 없이 시스템이 고장나면 교체하는 경우에 대해서 부품의 고장률과 부하와의 관계가 거듭제곱 모형, 아레니우스 모형 아이링 모형인 경우에 대해서 각각 신뢰도와 가용도를 먼저 구하였다. 그리고 일시고장이 있는 경우와 없는 경우에 대해 단위 시간당 평균 비용을 모형화 하고

비용을 최소로 하는 최적 중복 부품수를 구하였다.

본 논문에서와 같이 고장률과 부하와의 관계가 거듭제곱 모형을 따를 경우의 단위 시간당 평균 비용은

$$C(n)=\frac{(C_1n+C_2)p_0L^{p_1}}{\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)^{p_1-1}} \tag{11}$$

이며, 모수 p_1이 1보다 작으면 단위 시간당 평균 비용을 최소로 하는 최적중복 부품수는 유일하게 존재한다. 그리고 p_1이 1보다 크거나 같으면 최적 중복 부품수는 무한대가 된다. 도형찬[12]의 모형에 검사가 추가되는 경우에 대한 모형화 최적화 문제를 다루고자 한다.

정책: T시점 이전에 시스템이 고장이 나면 전체 시스템을 교체한다. 만약 검사 시점까지 시스템이 고장 나지 않으면 검사를 하여 고장난 부품만 새 부품으로 교체해 준다.

검사를 하는 경우의 최적 중복 부품수와 최적 검사주기를 구하는 데 필요한 추가 가정과 추가 기호는 다음과 같다.

추가 가정

1. 시스템의 고장을 제외한 시스템이 상태는 단지 검사로만 알 수 있다.
2. 검사 시간, 교체 시간은 무시한다.

추가 기호

X: 검사 주기 T시간 동안 고장난 부품의 수

$Y_{(i)}$: (i-1)번째 고장과 i번째 고장 사이의 시간

$$\alpha(i)=p_0L^{p_1}\left(\frac{1}{n-i+1}\right)^{p_1-1}$$

$$A_{ix}=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{x}\frac{(n-j+1)^{p_1-1}}{(n-j+1)^{p_1-1}-(n-i+1)^{p_1-1}}$$

$$R_x(t)=\sum_{i=1}^{x}A_{ix}e^{-\alpha(i)t}$$

$$f_x(t)=\sum_{i=1}^{x}A_{ix}\alpha(i)e^{-\alpha(i)t}$$

최적 검사 주기는 한 주기 길이 동안 발생하는 평균 비용을 평균 한 주기 길이로 나눈 단위 시간당 평균 비용(Mean cost rate) 을 최소로 하는 검사주기로 가정한다. 그러므로 한 주기의 평균 비용과 길이를 구한다.

비용함수 모형

한 주기 동안의 평균 비용은

$$S_c(n,T)=c_2R_1(T)+\sum_{x=1}^{n-1}(c_1x+c_3)p(X=x)+(c_1n+c_2)(1-R_n(T)) \tag{12}$$

이며 여기서 검사 시 고장난 부품 개수가 X개일 확률 $P(X=x)$는

$$\begin{aligned}p(X=x)&=p(T_{(x)}<T \text{ and } T_{(x+1)}>T)\\&=\int_0^T p(Y_{(x+1)}>T-t)f_x(t)dt\\&=\int_0^T e^{-\alpha(x+1)(T-t)}\sum_{i=1}^{x}A_{ix}\alpha(i)e^{-\alpha(i)T}dt\\&=\sum_{j=1}^{x}A_{ix}\alpha(i)\frac{(e^{-\alpha(x+1)T}-e^{-\alpha(i)T})}{\alpha(i)-\alpha(x+1)}\end{aligned} \tag{13}$$

이다.

그리고 한 주기 길이는

$$S_n(n,T)=\int_0^T R_n(t)dt=\sum_{i=1}^{n}A_{in}\left(\frac{1}{\alpha(i)}\right)(1-e^{-\alpha(i)T}) \tag{14}$$

이다. 그러므로 단위 시간당 평균 비용은

$$C(n,T)=\frac{S_c(n,T)}{S_c(n,T)}$$

$$\frac{C_2R_1(T)+\sum_{x=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{x}(C_1x+C_3)A_{ix}\alpha(i)\frac{e^{-\alpha(x+1)T}-e^{-\alpha(i)T}}{\alpha(i)-\alpha(x+1)}+(C_1n+C_3)(1-R_n(T))}{\sum_{i=1}^{n}A_{in}\frac{1}{\alpha(i)}(1-e^{-\alpha(i)T})} \tag{15}$$

가 된다. 식(15)을 최소로 하는 최적 중복 부품수와 최적 검사주기를 구해야 한다. 중복 부품수가 주어진 경우에 단위 시간당 평균 비용을 최소로 하는 검사 주기가 존재하는지 알아보기 위해 식(15)을 T에 대해 편미분해 보면

$$\frac{dC(n,T)}{dT}=$$

$$\frac{1}{S_n}[\{-C_3f_1(T)+\sum_{x=1}^{n-1}(C_1x+C_3)\sum_{i=1}^{x}A_{ix}\alpha(i)\frac{\alpha(i)e^{-\alpha(i)T}-\alpha(x+1)e^{-\alpha(x+1)T}}{\alpha(i)-\alpha(x+1)}$$

$$+(C_1n+C_2)f_n(T)\}\cdot\{\sum_{i=1}^{n}A_{in}\frac{1}{\alpha(i)}(1-e^{-\alpha(i)T})\}$$

$$-\{C_3R_1(T)+\sum_{x=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{x}(C_1x+C_3)A_{ix}\alpha(i)e^{-\alpha(x+1)T}\frac{(1-e^{-\alpha(i)-\alpha(x+1)T})}{\alpha(i)-\alpha(x+1)}+$$

$$(C_1n+C_2)(1-R_n(T)\}\cdot R)n(T)] \qquad (16)$$

이 된다. 여기서 위의 식(16)에서 T가 0일 때의 편미분 함수 값은 $-\infty$이고 T가 무한대이면 그 때의 편미분 함수 값은 0이다. 그러므로 중복 부품수가 주어졌을 때 T에 대해 편미분 함수의 해는 하나 이상 존재한다. 그러나 해석적으로 $dC(n,T)/dT=0$을 만족하는 해를 분석하기는 매우 어렵다. 그래서 본 논문은 해를 찾는 데 수치적인 방법을 쓰고자 한다. 이를 위해 여러 경우에 대해서 $dC(n,T)/dT$ 함수를 그려보면 그림 1과 같은 2가지 형태로 함수가 나타남을 찾을 수 있었다. 즉, 중복 부품수가 주어졌을 때 단위 시간당 비용함수를 최소로 하는 검사주기가 하나만 존재하는 경우와 존재하지 않는 경우 두가지 경우만 발생한다.

비용함수 $C(n,T)$를 최소로 하는 최적 중복 개수와 최적 검사주기를 수치적으로 구해야 하지만 모든 범위 내의 n에 대해서 비용함수를 계산해서 이 값을 최소로 하는 n^*, T^*를 구하는 것은 매우 어렵다. 만약 T가 무한대로 가면 단위 시간당 평균 비용함수는 검사를 하지 않는 경우의 비용함수 식(11)와 같아진다. 그러므로 본 논문에서는 n의 범위를 1부터 검사를 하지 않는 경우의 단위 시간당 비용 함수를 최소로 하는 중복 부품수까지 제한한다. 그러므로 결과적으로 본 논문에서의 최적 중복 부품수 n^*와 최적 검사 주기 T^*를 찾는 절차는 다음과 같다.
〈단계1〉 주어진 C_3/C_1과 p_0p_1에 대해서 $C(n)$을 최소로 하는 중복 부품수 n_1^*을 구한다.

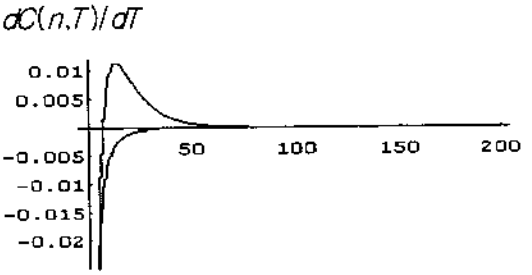

그림 1. 검사주기에 따른 dC(n,T)/dT 함수($p_0L^{p_1}$=0.1, p_1=0.1일 때)

〈단계2〉 1부터 n_1^*까지의 각 n에 대해서 $C(n,T)$을 최소로 하는 검사주기 $T(n)$를 수치적으로 계산해서 구한다. 그리고 단위 시간당 평균 비용 $C(n,T^*(n))$도 계산한다.
〈단계3〉 마지막으로 $(n,T^*(n))$의 n_1^*개의 단위 시간당 평균 비용에서 최소가 되는 $(n^*, T^*(n^*))$를 찾는다.

수치예제

최적 중복수와 검사주기를 구하는 수치예제로서 $p_0L^{p_1}$=0.1일 때 중복 부품수와 검사주기 결정에 영향을 미치는 p_1,C_2/C_1,C_3/C_1의 값들이 $0.05\le p_1\le 0.5$, $1\le C_2/C_1\le 10$, $0.1\le C_3/C_1\le 1$에서 단위 시간당 평균 비용을 최소화하는 최적 중복 부품수와 최적 검사 주기 (n^*,T^*)가 표 1에 나와 있다. 표 1의 값들은 위의 절차에 따라서 MATHEMATICA(Version 2.2)[11]를 이용하여 구했다.

p_0p_1과 C_2/C_1이 고정되었을 때 C_3/C_1가 증가하면 최적 중복 부품수가 증가하며, 같은 중복 부품수에 대해 최적 검사주기는 길어진다. 이는 부품의 비용에 비해 시스템의 검사 비용이 커지므로 가능한 검사기간은 길어져야 한다는 것을 의미한다.

p_0p_1과 C_2/C_1가 고정되었을 때 C_3/C_1이 증가함에 따라 최적 중복 부품수는 증가한다. 이것은 부품 비용에 비해서 시스템 교체 비용이 커지므로 가능하면 고장이 발생하지 않도록 중복 부품수를 늘려야 하는 것으로 판단된다. 그리고 같은 중복 부품수에 대해서 최적 검사 주기는 짧아진다. 이는 중복 부품수가 늘어 나는 것과 마찬가지로 시스템의 교체 비용이 커짐으로 해서 되도록이면 시스템이 고장나기 전에 검사를 해서 부품을 교체해 주는 것이 경제적임을 의미한다.

표 1. $p_0L^{p_1}$=0.1일 때의 {C_2/C_1,C_3/C_1,p_1}조합에서 최적 중복 부품수와 최적 검사주기

C_3/C_1	C_2/C_1	p_1			
		0.05	0.1	0.3	0.5
0.1	1	2 검사 안함	2 검사 안함	2 검사 안함	2 9.41
	3	2 2.95	2 2.93	3 5.63	3 5.41
	5	3 3.95	3 3.92	3 3.90	3 4.0
	7	3 3.1	3 3.11	3 3.20	4 5.79
	10	3 2.49	3 2.52	3 2.66	4 4.97
0.5	1	2 검사 안함	2 검사 안함	2 검사 안함	3 검사 안함
	3	3 16.28	3 15.34	4 17.85	5 21.32
	5	3 7.98	3 7.95	4 10.99	5 14.91
	7	4 8.42	4 8.47	4 8.83	5 12.54
	10	4 6.69	4 6.79	5 9.76	6 13.71
1.0	1	2 검사 안함	2 검사 안함	2 검사 안함	3 검사 안함
	3	3 검사 안함	3 검사 안함	4 38.92	5 33.89
	5	4 16.44	4 16.14	5 19.08	6 23.42
	7	4 11.32	4 11.38	5 14.65	7 22.58
	10	5 10.744	5 10.93	6 14.43	7 19.27

C_3/C_1,C_2/C_1가 고정 된 상태에서, p_0,p_1이 증가하면 부품의 고장률이 증가하므로 최적 중복 부품수는 증가하고 최적 검사주기는 감소하는 것으로 나타났다.

〈예제1〉 시스템이 p_1=0.1이고 $p_0L^{p_1}$=0.1인 거듭 제곱 모형을 따를 때 부품 1개의 값은 10만원이고 시스템의 교체 비용은 50만원, 검사 비용은 5만원 일 때 표 1에서 최적 중복 부품수는 3개이고 최적 검사주기는 7.95 단위 시간이다. 검사 주기에 따른 시스템의 비용에 대한 함수는 그림 2에 나와 있다.

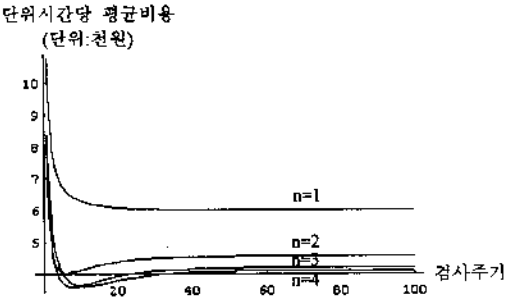

그림 2. 검사주기에 따른 시스템의 운영 비용

Remark

고장난 부품의 수와 작동중인 부품의 고장률과의 관계를 유도하기 위해 본 논문에서는 부하와 고장률과의 관계를 거듭제곱 모형을 사용하였다. 부하와 고장률과의 관계를 나타내는 모형에는 거듭제곱 모형 외에도 아레니우스 모형과 아이링 모형등이 있다.

부품에 가해지는 부하가 l일때의 j부품의 고장률은 아레니우스 모형과 아이링 모형은 각각 다음과 같다.

$$\lambda_{lj\text{아레니우스}}=\exp(\gamma_{0j}+\gamma_{1j}\cdot l) \qquad \gamma_{1j}>0 \tag{17}$$

$$\lambda_{lj\text{아이링}}=l\exp(e_{0j}-e_{1j}\cdot\frac{1}{l}) \qquad e_{1j}>0 \tag{18}$$

여기서 γ_{0j}, γ_{1j}은 j부품의 아레니우스(Arrhenius) 모형과 관련된 모수이고, e_{0j},e_{1j}은 j부품의 아이링(Eyring) 모형과 관련된 모수이다.

그리고 i개의 부품이 고장 났을 때 작동중인 나머지 부품들의 고장률은 각각 다음과 같다.

$$\lambda_j^{(i)}\text{아레니우스}=\exp(\gamma_{0j}+\gamma_{1j}\frac{L}{n-i}),\ i=0,1,\cdots n-1 \tag{19}$$

$$\lambda_j^{(i)}\text{아이링}=\frac{L}{n-i}\exp(e_{0j}-\frac{e_{1j}(n-i)}{L}),\ i=0,1,\cdots n-1 \tag{20}$$

부하와 고장률과의 관계가 아레니우스 모형과 아이링

모형을 따르는 경우 시스템 신뢰도 함수는 식 (19),(20)을 식 (6)에 대입하므로 구할 수 있으며, 비용함수 모형을 세우는 과정은 거듭제곱 모형일 때와 동일하게 식 (15)에 식 (19),(20)의 관계식을 사용하므로 쉽게 구할 수 있다. 그리고 최적 중복부품수 n^*와 최적 검사주기 T^*를 구하는 절차 역시 거듭제곱 모형에서와 동일한 절차를 이용하므로 구할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 병렬구조 시스템에서 부하가 시간에 따라 변하지 않고 일정하며, 작동중인 부품들이 시스템의 부하를 균등하게 분담하는 부하 분담 병렬구조 시스템에서 시스템의 신뢰도를 계산하였다. 그리고 중복 부품수와 검사주기를 동시에 고려한 모형을 제시하고 단위 시간당 평균 비용을 최소화 하는 최적 중복 부품와 최적 검사주기를 결정하는 문제를 다루었다. 시스템을 구성하는 각 부품들의 수명은 동일한 지수 분포를 따른다고 가정하였으며 고장률과 부하의 관계로 나타내는데는 거듭제곱 모형을 사용하였다. 그리고 이 모형을 이용하여 고장난 부품의 수와 고장률과의 관계식을 구하였다.

모형 모수와 비용 모수들의 일정 영역에서 시스템 운영 비용 함수의 분석을 통해 검사 비용이 증가할 수록 최적 중복 부품수는 증가하며, 검사주기는 짧아진다. 또한 구성부품의 고장률이 증가하면, 검사주기는 짧아진다.

부하 분담 모형의 경우 부품의 고장이 잔여 부품의 고장률에만 영향을 준다고 가정하고 있으나 또 다른 접근 방법은 시스템의 성능이 저하된다고 보는 것이다. 그러한 접근 방법으로 시스템을 모형화한다면 시스템의 상태를 다상태(Multi-state)로 보는 새로운 시스템 신뢰도 모형으로 발전할 것이다. 본 논문은 시스템의 상태를 작동과 고장 두 경우만 고려하였지만 시스템의 성능 저하에 대한 연구도 추후에 고려해 볼 수 있다..

참고문헌

[1] Bai, D.S. and Yun, W.Y.(1991), "Redundancy Optimizaions of k-out-of-n systems with Common - Cause Failures", *IEEE Trans. Reliability*, Vol.40, No.1, pp56-59

[2] Kapur, K.C. and Lamberson, L.R.(1977), *Reliability in Engineering Design*, New York: John Wiley & Sons, pp222-224

[3] Kececioglu, D.(1991), *Reliability Engineering Handbook*, Prentice-Hall, Vol.2, pp143-173

[4] Levenbach, G.I.(1957), "Accelerated Life Testing of Capacitor," *IRE Trans. PGROQC*, N0.10, pp9-20

[5] Lin, Hsin-Hui, Chen,Kang-Hdwa and Wang, Rong-Tsoring(1993), "A Multivariate Exponential Shared-Load Model", *IEEE Trans. Reliability*, Vol. 42,No. 1, pp165-171

[6] Morton, S., Gordon, M. J., Bruce, P.K. and Jorseph, B.B.(1975), "Micro Accelerated Testing Using High Temperature Operating Test," *IEEE Trans. Reliability*, Vol.R-24, pp238-250

[7] Schechner,Z.(1984), "A Load Sharing Model: The Linear BreakDown Rule," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.31,pp137-144

[8] Scheuer,E.M.(1988), "Reliability of a m out of n System When Component Failure Induces Higher Failure Rates in Survivors", *IEEE Trans. Reliability*, Vol.R-37,pp73-74

[9] Shao, J. and Lamberson, L. R.(1991), "Modeling a Shared-Load K-out-of-n;G System", *IEEE Trans. Reliability*, Vol. 40,No. 2, pp205-209

[10] Thomas, R.E. and Gorton, H.C.(1963), "Research towards a Physics of Aging in Electronics," *Proceeding of the second Annual Symposium on the Physics of Failure in Electronics.*

[11] 김삼균, 남기현, 전규창(1993), "매스매티카 입문에서 활용까지", 성안당

[12] 도형찬(1989), "부품의 고장이 잔여 작동 부품의 고장률을 증가시키는 k-out-of n:G 시스템의 신뢰도, 가용도 및 최적 중복 부품수", 한국 과학 기술원, 석사 학위논문

97년 2월 최초 접수, 97년 8월 최종 수정