Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.23, N0.4, December, 1997



# 일반연속 다중선택 선형배낭문제의 효율적인 해법연구

# An Efficient Algorithm for the Generalized Continuous Multiple Choice Linear Knapsack Problem

원중연*

Joong-Yeon Won*

**Abstract**

We consider a generalized problem of the continuous multiple choice knapsack problem and study on the LP relaxation of the candidate problems which are generated in the branch and bound algorithm for solving the generalized problem. The LP relaxed candidate problem is called the generalized continuous multiple choice linear knapsack problem and characterized by some variables which are partitioned into continuous multiple choice constraints and the others which only belong to simple upper bound constraints. An efficient algorithm of order $O(n^2 \log n)$ is developed by exploiting some structural properties and applying binary search to ordered solution sets, where n is the total number of variables. A numerical example is presented.

Key Words: Knapsack problem, generalized continuous multiple choice constraints, branch and bound, LP relaxed problem, computational complexity.

## 1. 서 론

기업체들이 직면하고 있는 생산관리, 자원배분, 스케쥴링, 작업할당, 경로선정등의 여러 문제들은 정수계획 문제들로 모형화되고 있다. 이 문제들에 빈번히 나타나는 제약구조들은 다중선택 구조, 용량제한 구조, 고정비용 구조등으로서 특히 다중선택 제약식은 전체 제약식의 상당한 부분을 차지하고 있다.[8] 다중선택 제약은 상호독립 제약, 특수배열 제약, 일반상한 제약으로도 불리우고 있다. 다중선택 제약에는 변형된 형태들이 존재하며 이에는 내재반복 다중선택 제약[2], 연속 다중선택 제약[5,6,7]등이 있다.

정수배낭문제는 정수계획의 여러 문제들 중에서 가장 중요한 문제중의 하나이다. 배낭문제는 실질적으로 많이 활용되고 있으며, 좀 더 복잡한 문제들을 풀고 분석하기 위한 부문제로서도 자주 응용되고 있다. 정수배낭문제는 정수계획의 여러 문제들과 마찬가지로 NP-Complete에 속하지만 최근의 LP완화이론, 분지한계법 분석, 해집합의 볼록공간 표현이론등은 정수배낭문제를 중심으로 개발되어 왔다.[3]

본 연구에서는 연속 다중선택 제약의 일반화된 형태를 갖는 배낭문제 (K)를 고려한다. 이 일반연속 다중선택 배

* 경기대학교 산업공학과

낭문제 (K)는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{(K) Maximize } \Sigma_{i\in I}\ \Sigma_{j\in N_i} c_{ij}\, x_{ij} \quad (1.1)$$

subject to

$$\Sigma_{i\in I}\ \Sigma_{j\in N_i} a_{ij}\, x_{ij} \le b, \quad (1.2)$$

$$0 \le x_{ij} \le 1, j\in N_i, i\in I=\{1,...,m\}, \quad (1.3)$$

$$\textit{At most } k_i \textit{ of } x_{ij},\ j\in N_i, \textit{ are positive for } i\in I. \quad (1.4)$$

여기서, 선택집합 $N_i$들은 서로 중복되지 않고 $c_{ij}>0$, $a_{ij}>0$, $b>0$이다. 선택상수 $k_i$들은 $|N_i|$보다 작은 임의의 양의 정수이다. 다음의 기호들을 정의한다. $n_i=|N_i|$, $i\in I$, $k_{\max}=\max\{k_i\}$, 그리고 $n$은 총 변수의 수이다.

문제 (K)는 인공위성에 탑재할 식량들을 선택하는 상황등에 적용된다. 실어야 할 식량들은 특성에 따라 $i=1,...,m$개의 그룹으로 분류되고 각 그룹 $i$에는 해당되는 식량들이 제품별로 $n_i$개씩 있으며, 분할된 각 그룹의 특성에 따라 허용된 $k_i$개까지의 식량들을 선택하고 그 양을 결정하는 문제이다.

문제 (K)에서 제약식 (1.4)의 $k_i$들이 모두 1이 되는 경우의 문제는 연구[6,7]에서 제시되었으며 이 경우의 문제 (K)는 NP-Complete임이 증명되었다.[7] 문제 (K)에서 제약식 (1.3)에 정수조건이 부가되고 제약식 (1.4)의 모든 선택상수 $k_i$가 1이 될 경우의 문제 (K)는 최근까지 상당히 연구되어 왔던 다중선택 배낭문제[11]가 된다. 일반문제 (K)는 모든 $k_i$가 1이 되는 특수경우를 포함하고 있으므로 NP-Complete에 속한다.

문제 (K)의 최적해를 구하기 위한 분지한계해법에서 해의 탐색에는 분지과정중에 발생되는 수 많은 후보문제들에 대한 완화문제의 최적해를 구해야 하므로 분지한계해법의 효율성은 완화문제의 최적해를 신속하게 찾는 해법에 달려있다.

우선, 문제 (K)의 최적해 특성은 다음과 같다; 최대로 한개의 변수만이 분수값을 갖고 이외의 모든 변수들은 0이나 1의 값을 취하게 된다. 이것은 두 변수가 분수값을 갖는다면 우선적으로 $c_{ij}/a_{ij}$의 비율이 큰 변수가 1이 되도록 증가시키고 대신에 비율이 작은 변수를 그 만큼 감소시킴으로써 목적함수의 값은 더 증가될 수 있기 때문이다. 따라서 문제 (K)의 완화전략으로서 LP완화를 사용하고 다음과 같은 LP완화문제 L(K)를 정의한다.

$$\text{L(K) Maximize } \Sigma_{i\in I}\ \Sigma_{j\in N_i} c_{ij}\, x_{ij}$$

subject to

$$\Sigma_{i\in I}\ \Sigma_{j\in N_i} a_{ij}\, x_{ij} \le b,$$

$$\Sigma_{j\in N_i} x_{ij} \le k_i,\ i\in I=\{1,...,m\},$$

$$0\le x_{ij} \le 1,\ j\in N_i,\ i\in I.$$

문제 L(K)에서 선택상수 $k_i$들이 모두 1이 되는 특수경우의 문제는 다중선택 선형배낭문제[9]라 불리우며 이 경우의 효율적인 해법으로는 Dyer[4], Pisinger[11], Zemel[12]의 $O(n)$의 해법이 보고되었다. 연구 [1]에서는 선택상수 $k_i$가 현실적으로 다중선택의 의미를 지니는 $1\le k_i\le\sqrt{n_i}$, $i\in I$, 의 정수가 되는 문제를 고려하고 $O(k_{\max}n^2)$의 해법을 제시하였다.

문제 L(K)의 최적해에는 최대로 2개의 변수가 분수값을 갖을 수 있다.[1] L(K)의 최적해에서 한 변수만이 분수값을 갖는 경우는 문제 (K)의 최적해 특성으로부터 곧 제약조건 (1.4)를 만족시키므로 문제 (K)의 최적해가 된다. 그러나 두 변수가 모두 분수값을 갖는 경우는 문제 (K)의 가능해가 아니므로 문제 (K)를 분지하여 후보문제를 생성한다. 분지변수로는 L(K)의 최적해에서 분수값을 갖는 변수를 선택한다. L(K)의 최적해에서 두 변수 $x_{qf_1}$, $x_{qf_2}$가 분수값을 취한다고 하자.

본 연구에서는 선택된 한 분지변수 $x_{qf_2}$에 대해서 문제 (K)의 제약식 (1.4)에 의해 다음의 두 분지 제약식 ($x_{qf_2}=0$) 또는 ($x_{qf_2}$ *is positive*)이 부가된 후보문제들을 고려한다. 문제 (K)에 분지제약식 ($x_{qf_2}=0$)이 부가된 후보문제는 매우 쉽게 풀린다.

문제 (K)에 제약식 ($x_{qf_2}$ *is positive*)가 부가된 후보문제를 (CK)라 하자. 즉, (CK)=K($x_{qf_2}$ *is positive*)라 하면 이에 따라 문제 (K)의 선택상수 $k_q$는 $k_q$-1로 수정된다. 후보문제 (CK)는 다음과 같이 표현된다.

$$\text{(CK) Maximize } \Sigma_{i\in I}\ \Sigma_{j\in N_i} c_{ij}\, x_{ij}$$

subject to

$$\Sigma_{i\in I}\ \Sigma_{j\in N_i} a_{ij}\, x_{ij} \le b,$$

$$0\le x_{ij}\le 1,\ j\in N_i,\ i\in I=\{1,...,m\},$$

$$\textit{At most } k_i \textit{ of } x_{ij},\ j\in N_i, \textit{ are positive for } i\in I\backslash\{q\},$$

$$\textit{At most } k_q\text{-}1 \textit{ of } x_{qj},\ j\in N_q\backslash\{f_2\}, \textit{ are positive},$$

$$x_{qf_2} \textit{ is positive}.$$

후보문제 (CK)의 LP완화문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{L(CK) Maximize } \Sigma_{i\in I}\ \Sigma_{j\in N_i} c_{ij}\, x_{ij} \tag{1.5}$$

subject to

$$\Sigma_{i\in I}\ \Sigma_{j\in N_i} a_{ij}\, x_{ij} \le b, \tag{1.6}$$

$$\Sigma_{j\in N_i} x_{ij} \le k_i,\ i\in I\setminus\{q\}, \tag{1.7}$$

$$\Sigma_{j\in N_q\setminus\{f_2\}} x_{qj} \le k_q - 1, \tag{1.8}$$

$$0\le x_{ij}\le 1,\ j\in N_i,\ i\in I. \tag{1.9}$$

문제 L(CK)에서 분지변수 $x_{qf_2}$는 연속 다중선택 제약 (1.8)에 포함되지 않고 있으며 다만 단순상한제약 (1.9)에 의해 상한치가 제한되고 있다. 분지과정이 반복됨에 따라 여러 분지변수들이 추가된 후보문제가 생성되며, 따라서 이러한 단순상한제약을 갖는 여러 변수들이 연속다중선택 제약과는 독립적으로 존재한다.

본 연구에서는 여러 분지변수들의 단순상한제약이 있는 일반적 형태의 후보문제들에 대한 LP완화문제를 정의하고 이 문제를 일반연속 다중선택 선형배낭문제 (P)라 부른다. 다음의 2장에서는 문제 (P)의 일반적 표현을 제시하고 효율적인 해법개발에 기반이 되는 제약구조의 특성에 대하여 설명한다. 본 연구에서 제시된 해법의 계산복잡도는 $O(n^2\log n)$으로 나타나고 있다.

## 2. 일반연속 다중선택 선형배낭문제 및 해법

일반연속 다중선택 선형배낭문제 (P)는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{(P) Maximize } \Sigma_{i\in I\cup\{0\}}\ \Sigma_{j\in G_i} c_{ij}\, x_{ij} \tag{2.1}$$

subject to

$$\Sigma_{i\in I\cup\{0\}}\ \Sigma_{j\in G_i} a_{ij}\, x_{ij} \le b, \tag{2.2}$$

$$\Sigma_{j\in G_i} x_{ij} \le r_i,\ i\in I=\{1,\dots,m\}, \tag{2.3}$$

$$0\le x_{ij}\le 1,\ j\in G_i,\ i\in I\cup\{0\}. \tag{2.4}$$

여기서, 선택상수 $r_i$들은 $|G_i|$보다 작은 임의의 양의 정수이다. 문제 (P)는 단지 상한치 1의 제약만을 갖는 변수들 $x_{0j}$ ($j\in G_0$)와 연속 다중선택의 제약을 갖는 변수들 $x_{ij}$ ($j\in G_i$, $i\in I$)로 구성되어 있다.

문제 (P)의 기저가능해가 분수해인 경우 제약구조 (2.2), (2.3)에 의해 분수값을 갖는 기저변수는 집합 $G_0$와 $G_i$ ($i\in I$)에서 동시에 발생할 수 없다. 분수값이 집합 $G_0$에서 발생할 경우 최대로 한 변수만이 분수값을 취할 수 있으며, 집합 $G_i$, $i\in I$, 에서 발생할 경우 한 변수나 또는 두 변수가 분수값을 취할 수 있다. 그리고 두 변수가 분수값을 갖을 경우 이 두 변수는 같은 집합에서 동시에 발생한다. 이러한 특성은 다음 정리 1에서 활용된다.

먼저, 각 집합 $G_i$, $i\in I$, 에 속한 지수들 $j_1$, $j_2$가 $j_1 < j_2$이면 $a_{ij_1}\le a_{ij_2}$가 성립하도록 해당변수들을 재배열한다. 다음으로 각 변수들 $x_{ij}$에 대한 비율 $\theta_i(0,j)$ 및 두 변수 $x_{ij_1}$, $x_{ij_2}$에 대한 비율 $\theta_i(j_1,j_2)$를 음과 같이 정의한다. 여기서, $a_{ij_1}=a_{ij_2}$이면 $\theta_i(j_1,j_2)\equiv -\infty$로 정의한다.

$$\theta_i(0,j)=c_{ij}\,/a_{ij},\ j\in G_i,\ i\in I\cup\{0\},$$

$$\theta_i(j_1,j_2)=(c_{ij_2}-c_{ij_1})/(a_{ij_2}-a_{ij_1}),\ j_1 < j_2,\ j_1,\ j_2\in G_i,\ i\in I.$$

분수해를 갖는 기저변수의 발생 및 변화형태를 파악하기 위하여 우선 모든 변수들이 정수값을 갖는 임의의 한 기저가능해 $x^0$를 고려한다. 여기서 1의 값을 갖는 변수들의 지수집합들을 각각 집합 $G_i$에 대응해서 $J_i$, $i\in I\cup\{0\}$, 라 정의하고 $b^0=\Sigma_{i\in I\cup\{0\}}\Sigma_{j\in J_i} a_{ij}$라 한다. 이때 $b^0=b$이면 해 $x^0$는 문제 (P)의 최적해이다. 그러나, $b^0 < b$일 경우는 다음 정리 1을 사용하므로써 최적해가 구해질 때까지 필수적으로 찾아야 하는 분수해들을 추적할 수 있다.

정리 1 $b^0$가 증가하면서 분수해가 발생하는 집합의 지수 $q$ 및 분수값을 갖는 기저변수의 지수 $f_1$, $f_2$는 다음과 같이 결정된다.

$$\theta_q(f_1,f_2)=\max\left[\max_{i\in I_1\cup\{0\}}\ \{\max_{j\in G_i\setminus J_i}\{\theta_i(0,j)\}\},\ \max\{\max_{i\in I_2}\ \max_{j_1\in J_i,\ j_2\in G_i\setminus J_i,\ j_1 < j_2}\{\theta_i(j_1,j_2)\}\}\right]$$

여기서, $I_1=\{i\in I|\ |J_i| < r_i\}$, $I_2=\{i\in I|\ |J_i|=r_i\}$이다.

(증명) 제약식 (2.2)의 우변상수가 $b^0$일 때의 최적해에서 1의 값을 취하고 있는 변수들의 지수집합은 $J_i$, $i\in I\cup\{0\}$, 이다. 각 집합 $G_i$에서 1의 값을 취하고 있는 변수들의 개수가 해당 $r_i$보다 작은가 또는 큰가에 따라 기저변화의 형태가 달라지므로 다음과 같은 두가지 경우를 고려한다.

1) $b^0$가 $\alpha$만큼 증가할 때 기저변수의 변화가 임의의 집합 $G_i$, $i \in I_1 \cup \{0\}$에서 발생한다고 하자. $G_i$에 속하는 변수들 중 $|U_i|$개는 이미 1을 취하고 있다. $j_1 \in J_i$, $j_2 \in G_i \setminus J_i$, $j_1 < j_2$인 $j_1, j_2$에 대해서 $\theta_i(0, j_1) > \theta_i(0, j_2)$이면 항상 $\theta_i(0, j_2) > \theta_i(j_1, j_2)$가 성립한다. 또한, $|U_i| < r_i$, $i \in I_1$,이고 $|U_0|$ $(\leq |G_0|)$에는 제한이 없으므로, 증가된 $\alpha$를 충족시키기 위하여는 현재 0인 한 변수 $x_{ij_2}$가 증가하여 양의 분수값을 갖는 기저변수가 되어야 한다. 이외의 현재 1을 취하고 있는 변수들에는 변동이 없다. 이때 문제 (P)의 목적함수치 $z$의 변화는 다음과 같다.

$$z(b^0 + \alpha) = z(b^0) + \alpha\,\theta_i(0, j_2)$$

따라서 선택집합 $G_i$, $i \in I_1 \cup \{0\}$, 에서 목적함수치가 최대로 증가하는 비율은 다음과 같이 결정된다.

$$\max_{i \in I_1 \cup \{0\}} \Big[\max_{j \in G_i \setminus U_i} \{\theta_i(0, j)\}\Big] \tag{2.5}$$

2) $b^0$가 $\alpha$만큼 증가할 때 기저변수의 변화가 임의의 집합 $G_i$, $i \in I_2$, 에서 발생한다고 하자. $|J_i| = r_i$, $i \in I_2$,이므로 $|J_i|$값은 더 이상 증가할 수 없다. 따라서 증가된 $\alpha$를 충족시키기 위하여는 $J_i$에 속한 하나의 변수 $x_{ij_1}$이 현재의 값 1에서 감소하고 $J_i$에 속하지 않는 다른 변수 $x_{ij_2}$ $(j_2 > j_1)$가 현재의 0에서 양의 값으로 증가하여야 한다. 이때의 목적함수치 증가비율은 다음과 같다.

$$z(b^0 + \alpha) = z(b^0) + \alpha\,\theta_i(j_1, j_2)$$

따라서 선택집합 $G_i$, $i \in I_2$, 에서 목적함수치가 최대로 증가되는 비율은 다음과 같이 결정된다.

$$\max_{i \in I_2} \Big[\max_{j_1 \in J_i}\ \max_{j_2 \in G_i \setminus J_i,\, j_1 < j_2} \{\theta_i(j_1, j_2)\}\Big] \tag{2.6}$$

이상으로부터 $b^0$가 $\alpha$만큼 증가할 때 모든 선택집합 $G_i$에 대해서 목적함수치가 최대로 증가하는 비율은 식 (2.5)와 식 (2.6)의 비율들중 큰 비율로 결정된다. 따라서 정리가 성립된다.■

정리 1에서 결정된 기저가 최적으로 유지되는 $b^0$의 증가분은 $f_1 = 0$일 경우는 $a_{qf_2}$가 되며 이때 해당집합 $J_q$에는 지수 $f_2$가 추가포함된다. $f_1 \neq 0$일 경우는 $a_{qf_2} - a_{qf_1}$이며 이때 집합 $J_q$에는 $f_1$이 탈락되고 $f_2$가 교체포함된다.

다음 제시하는 최대비율 탐색해법은 해 $x=0$로부터 최적해가 얻어지기까지 정리 1에 의해 필수적으로 추적되는 모든 해들을 미리 구한다. 최대비율 탐색해법에서 해의 탐색에는 각 해에 대응되는 기저의 목적함수치 비율 $\theta$를 사용하고, 따라서 해들 대신 대응되는 비율들의 집합인 비율목록 $L$을 생성한다.

### 최대비율 탐색해법

0. $L \leftarrow \phi$, $J_i \leftarrow \phi$, $i \in I$, $CL_i \leftarrow \phi$, $i \in I$.
1. 각 지수 $j \in G_i$, $i \in I \cup \{0\}$에 대해 다음 비율들을 계산한다.
   $\theta_i(0, j) = c_{ij} / a_{ij}$, $j \in G_i$, $i \in I \cup \{0\}$.
   집합 $G_0$에 대해 계산된 비율들 $\theta_0(0, j)$, $j \in G_0$, 을 비율목록 $L$에 넣는다. 또한, 각 집합 $G_i$, $i \in I$, 별로 계산된 비율들 중 가장 큰 $r_i$개를 찾아서 $L$에 넣고, 선택된 비율들의 지수집합을 $J_i$, $i \in I$, 라 한다. 집합 $J_i$의 원소들을 비감소하는 순으로 배열한다.
2. 각 지수 $j_1$, $j_2$에 대해 다음과 같은 비율 $\theta_i(j_1, j_2)$를 계산한다.
   $\theta_i(j_1, j_2) = (c_{ij_2} - c_{ij_1})/(a_{ij_2} - a_{ij_1})$, $j_1 < j_2$, $j_1, j_2 \in G_i$, $i \in I$.
   각 $G_i$에 대해 계산된 비율들 $\theta_i(j_1, j_2)$를 비증가하는 순으로 후보비율목록 $CL_i$에 넣는다.($i \in I$) 단, 음의 비율들은 제거한다.
3. $CL_i \neq \phi$, $i \in I$, 인 $CL_i$를 선택한다. 모든 $CL_i = \phi$, $i \in I$, 이면 과정을 끝낸다.
   - 3.1 선택된 목록 $CL_i$에서 첫 번째 위치한 비율 $\theta_i(j_1, j_2)$를 선택한다.
     $j_1 \in J_i$, $j_2 \in J_i$이면 $L \leftarrow L \cup \{\theta_i(j_1, j_2)\}$, $J_i \leftarrow J_i \setminus \{j_1\} \cup \{j_2\}$라 한다. $J_i$에 $j_1$을 삭제하고 $j_2$를 비감소순으로 추가시킬 때 이진탐색을 사용한다. 단계 3.2로 간다.
     $j_1 \in J_i$이거나, $j_1 \in J_i$이고 $j_2 \in J_i$이면 단계 3.2로 간다.
   - 3.2 $CL_i \leftarrow CL_i \setminus \{\theta_i(j_1, j_2)\}$이라 한다. $CL_i = \phi$이면 단계 3로, 아니면 단계 3.1으로 간다.

정리 2 최대비율 탐색해법의 계산복잡도는 $O(n^2 \log n)$이다.

(증명) 단계 1에서 각 비율들 계산에 $O(n)$이 소요된다. 각 지수집합 $J_i$, $i \in I$, 를 구하는데 $O(r_i\, n_i)$, $J_i$의 각 원소들을 비감소순으로 배열하는데 $O(r_i log r_i) \leq O(r_i log n_i)$의 계산이 필요하다. 여기서 $n_i = |G_i|$라 하자. 따라서 모든 $i \in I$에 대해 총 $O(r_{\max} n) \leq O(n^2)$의 계산이 소요된다. $r_{\max}$ =

$\max_{i\in I}\{r_i\}$이다. 단계 2에서 각 집합 $G_i$로부터 비율계산하는데 최대 $O(n_i^2)$이 소요되고 이를 목록 $CL_i$에 비증가순으로 넣는데 $O(n_i^2\log n_i)$가 소요된다. 따라서 모든 $CL_i$, $i\in I$,에 대해서 총 $O(n^2\log n)$이 소요된다. 단계 3에서 한 $CL_i$로부터 선택된 비율 $\theta_i(j_1,j_2)$의 $j_1$ 및 $j_2$가 단계 3.1에서 각각 $J_i$에 속하는 가를 판단하는 데에는, 집합 $J_i$의 원소들이 이미 크기순으로 배열되었으므로 이진탐색법[10]을 적용하면 $O(\log r_i)\le O(\log n_i)$의 계산이 소요되며, 또한 집합 $J_i$에서 $j_1$을 삭제하고 $j_2$를 비감소순으로 포함시키는데 $O(\log n_i)$가 소요된다. 단계 3.2에서 $CL_i$의 원소 수는 최대로 $O(n_i^2)$이다. 따라서 최대비율 탐색해법의 주 회전단계인 단계 3.1 및 단계 3.2의 최대 반복계산양은 $O(n_i^2\log n_i)$이다. 따라서 모든 $CL_i$, $i\in I$,에 대한 단계 3의 최대 반복계산양은$O(n^2\log n)$이 소요된다. 이상으로부터 최대비율 탐색해법의 계산복잡도는 $O(n^2\log n)$이다.■

다음의 해법은 우변상수 증가에 따라 발생하는 해들을 비율목록 $L$로부터 단순히 순차적으로 해당 비율들로 선택하므로써 최적해를 매우 쉽게 찾고 있다.

해 법

0. $L\leftarrow\phi$, $J_i\leftarrow\phi$, $i\in I\cup\{0\}$.
1. 문제 (P)에 최대비율 탐색해법을 적용하여 비율목록 $L$을 구하고 $L$의 모든 비율들을 비감소하는 순으로 재배열한다. 또한, $\bar{b}\leftarrow 0$으로 놓는다.
2. $L$로부터 첫 번째 위치한 비율 $\theta_i(j_1,j_2)$를 선택하고 다음과 같이 $\bar{b}$를 수정한다.
   $j_1=0$이면 $\bar{b}\leftarrow\bar{b}+a_{ij_2}$, $j_1\neq 0$이면 $\bar{b}\leftarrow\bar{b}+(a_{ij_2}-a_{ij_1})$라 한다.
3. $\bar{b}\ge b$이면 다음을 수행하고 단계 4로 간다.
   $q\leftarrow i$, $f_1\leftarrow j_1$, $f_2\leftarrow j_2$, $\bar{e}\leftarrow\bar{b}-b$ 라 한다.
   $\bar{b}<b$이면 다음을 수행하고 단계 2로 간다.
   $j_1=0$이면 $J_i\leftarrow J_i\cup\{j_2\}$, $j_1\neq 0$이면 $J_i\leftarrow J_i\backslash\{j_1\}\cup\{j_2\}$으로 수정한다.
4. 최적해는 다음과 같다. 해법과정을 끝낸다.
   $f_1=0$이면 $x_{qf_2}=(a_{qf_2}-\bar{e})/a_{qf_2}$, $x_{qj}=1$, $j\in J_q$,
   $x_{qj}=0$, $j\in G_q\backslash J_q\backslash\{f_2\}$, $x_{ij}=1$, $j\in J_i$,
   $x_{ij}=0$, $j\in G_i\backslash J_i$, $i\in I\cup\{0\}\backslash\{q\}$,
   $f_1\neq 0$이면 $x_{qf_1}=\bar{e}/(a_{qf_2}-a_{qf_1})$, $x_{qf_2}=(a_{qf_2}-a_{qf_1}-\bar{e})/(a_{qf_2}-a_{qf_1})$,
   $x_{ij}=1$, $j\in J_q\backslash\{f_1\}$, $x_{ij}=0$, $j\in G_q\backslash J_q\backslash\{f_2\}$,
   $x_{ij}=1$, $j\in J_i$, $x_{ij}=0$, $j\in G_i\backslash J_i$, $i\in I\cup\{0\}\backslash\{q\}$.

정리 3 문제 (P)에 대한 해법의 계산 복잡도는 $O(n^2\log n)$이다.

(증명) 단계 1에서 비율목록 $L$을 구하기 위하여 최대비율 탐색해법을 적용하면 정리 2에 의해 계산 $O(n^2\log n)$이 소요된다. 또한 $L$의 원소수는 최대 $O(n^2)$이므로 원소들을 비감소순으로 배열하는데 $O(n^2\log n)$이 소요된다. 단계 2, 단계 3, 단계 4는 상수회에 계산이 끝나고 해법의 주 회전단계인 단계 2 및 단계 3의 최대회전수는 $O(n^2)$이다. 따라서 해법은 단계 1에서 $O(n^2\log n)$, 단계 2 및 단계 3에서 최대 $O(n^2)$의 계산이 필요하므로 최악상황하의 계산복잡도는 $O(n^2\log n)$이다.■

## 3. 수치예제

다음과 같은 일반연속 다중선택 선형배낭문제의 최적해를 구한다.

(P) Maximize $\Sigma_{i\in I\cup\{0\}}\Sigma_{j\in G_i} c_{ij}x_{ij}$
subject to
$\Sigma_{i\in I\cup\{0\}}\Sigma_{j\in G_i} a_{ij}x_{ij}\le 55$,
$\Sigma_{j\in G_i} x_{ij}\le 2$, $i\in I=\{1,2\}$,
$0\le x_{ij}\le 1$, $j\in G_i$, $i\in I\cup\{0\}$.

여기서 $I=\{1,2\}$, $G_0=\{1,\ldots,6\}$, $G_1=\{1,\ldots,6\}$, $G_2=\{1,\ldots,7\}$, $c_{ij}$ 및 $a_{ij}$는 다음 표의 값과 같다.

| i | 0 | | | | | | 1 | | | | | | 2 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 계수 \ j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $c_{ij}$ | 6 | 7 | 5 | 8 | 7 | 10 | 7 | 10 | 11 | 13 | 16 | 17 | 6 | 10 | 9 | 13 | 11 | 16 | 19 |
| $a_{ij}$ | 2 | 5 | 8 | 9 | 12 | 17 | 2 | 4 | 6 | 9 | 13 | 16 | 4 | 6 | 9 | 12 | 16 | 18 | 20 |

문제 (P)의 최적해를 구하기 위하여 해법을 적용한다.

〈1회〉

0. $L\leftarrow\phi$, $J_i\leftarrow\phi$, $i=0,1,2$.

1. 문제 (P)에 최대비율 탐색해법을 적용하여 비율목록 $L$을 구한다.
   (0) $CL_1=\phi$, $CL_2=\phi$.
   (1) $L=\{\theta_0(0,1)=3,\ \theta_0(0,2)=1.4,\ \theta_0(0,3)=0.625,\ \theta_0(0,4)=0.888,\ \theta_0(0,5)=0.583,\ \theta_0(0,6)=0.588\}$,
   $L=L\cup\{\theta_1(0,1)=3.5,\ \theta_1(0,2)=2.5,\ \theta_2(0,2)=1.667,\ \theta_2(0,1)=1.5\}$
   $J_1=\{1,2\}$, $J_2=\{1,2\}$
   (2) $CL_1=\{\theta_1(1,2)=1.5,\ \theta_1(1,3)=1,\ \theta_1(1,4)=0.857,\ \theta_1(1,5)=0.818,\ \theta_1(4,5)=0.75,\ \theta_1(1,6)=0.714,\ \theta_1(3,5)=0.714,\ \theta_1(2,5)=0.667,\ \theta_1(3,4)=0.667,\ \theta_1(2,4)=0.6,\ \theta_1(3,6)=0.6,\ \theta_1(2,6)=0.583,\ \theta_1(4,6)=0.571,\ \theta_1(2,3)=0.5,\ \theta_1(5,6)=0.333\}$
   $CL_2=\{\theta_2(5,6)=2.5,\ \theta_2(1,2)=2,\ \theta_2(5,7)=2,\ \theta_2(6,7)=1.5,\ \theta_2(3,4)=1.333,\ \theta_2(3,7)=0.909,\ \theta_2(1,4)=0.875,\ \theta_2(1,7)=0.813,\ \theta_2(3,6)=0.778,\ \theta_2(4,7)=0.75,\ \theta_2(1,6)=0.714,\ \theta_2(2,7)=0.643,\ \theta_2(1,3)=0.6,\ \theta_2(2,4)=0.5,\ \theta_2(2,6)=0.5,\ \theta_2(4,6)=0.5,\ \theta_2(1,5)=0.417,\ \theta_2(3,5)=0.286,\ \theta_2(2,5)=0.1\}$
   (3) $CL_1$으로부터 $L$에 추가되는 비율들은 다음과 같다.
   $L=L\cup\{\theta_1(1,3),\ \theta_1(3,5),\ \theta_1(2,4),\ \theta_1(4,6)\}$
   $CL_2$으로부터 $L$에 추가되는 비율들은 다음과 같다.
   $L=L\cup\{\theta_2(1,4),\ \theta_2(4,7),\ \theta_2(2,4),\ \theta_2(4,6)\}$
   이상으로부터 $L$은 다음과 같다.
   $L=\{\theta_1(0,1),\ \theta_0(0,1),\ \theta_1(0,2),\ \theta_2(0,2),\ \theta_2(0,1),\ \theta_0(0,2),\ \theta_1(1,3),\ \theta_0(0,4),\ \theta_2(1,4),\ \theta_2(4,7),\ \theta_1(3,5),\ \theta_0(0,3),\ \theta_1(2,4),\ \theta_0(0,6),\ \theta_0(0,5),\ \theta_1(4,6),\ \theta_2(2,4),\ \theta_2(4,6)\}$
2. $\theta_1(0,1)$선택, $\bar{b}=0+2=2$
3. $\bar{b}<b$이므로, $J_1=\{1\}$

〈2회〉
2. $\theta_0(0,1)$선택, $\bar{b}=2+2=4$
3. $\bar{b}<b$이므로, $J_0=\{1\}$

〈3회〉
2. $\theta_1(0,2)$선택, $\bar{b}=4+4=8$
3. $\bar{b}<b$이므로, $J_1=\{1,2\}$

〈4회〉
2. $\theta_2(0,2)$선택, $\bar{b}=8+6=14$
3. $\bar{b}<b$이므로, $J_2=\{2\}$

〈5회〉
2. $\theta_2(0,1)$선택, $\bar{b}=14+4=18$
3. $\bar{b}<b$이므로, $J_2=\{1,2\}$

〈6회〉
2. $\theta_0(0,2)$선택, $\bar{b}=18+5=23$
3. $\bar{b}<b$이므로, $J_0=\{1,2\}$

〈7회〉
2. $\theta_1(1,3)$선택, $\bar{b}=23+4=27$
3. $\bar{b}<b$이므로, $J_1=\{2,3\}$

〈8회〉
2. $\theta_0(0,4)$선택, $\bar{b}=27+9=36$
3. $\bar{b}<b$이므로, $J_0=\{1,2,4\}$

〈9회〉
2. $\theta_2(1,4)$선택, $\bar{b}=36+8=44$
3. $\bar{b}<b$이므로, $J_2=\{2,4\}$

〈10회〉
2. $\theta_2(4,7)$선택, $\bar{b}=44+8=52$
3. $\bar{b}<b$이므로, $J_2=\{2,7\}$

〈11회〉
2. $\theta_1(3,5)$선택, $\bar{b}=52+7=59$
3. $\bar{b}>b$이므로, $q=1$, $f_1=3$, $f_2=5$, $\bar{e}=59-55=4$
4. 최적해는 다음과 같다.
   $x_{13}=4/7,\ x_{15}=3/7,\ x_{12}=1,\ x_{1j}=0,\ j=1,4,6,$
   $x_{01}=x_{02}=x_{04}=1,\ x_{0j}=0,\ j=3,5,6,$
   $x_{22}=x_{27}=1,\ x_{2j}=0,\ j=1,3,4,5,6.$

## 4. 결 론

본 연구에서는 연속 다중선택 제약[5,6,7]의 일반화된 형태를 갖는 배낭문제 (K)를 고려하였다. 문제 (K)는 정수계획의 여러 문제들과 마찬가지로 NP-Complete에 속한다. 최적해를 구하기 위한 분지한계법 적용시 분지과정중에 발생하는 여러 후보문제들의 일반적 LP완화문제 형태를 일반연속 다중선택 선형배낭문제라 정의하였다. 이 문제는 기존의 연구들을[1,9] 포함하는 확장된 문제로 나타나고 있다.

분지한계해법의 효율성은 무엇보다도 분지과정중에 발생하는 많은 후보문제들의 LP완화문제를 신속히 풀 수 있는데 달려있으므로 일반연속 다중선택 선형배낭문제를

효율적으로 푸는 해법에 대해 연구하였다.

본 연구에서는 일반연속 다중선택 선형배낭문제에 성립하는 새로운 구조적 특성을 찾아내고 해의 탐색에 있어서 해들에 대한 자료들을 순서화하고 여기에 이진탐색을 적용하여 탐색의 효율성을 높임으로써 계산복잡도가 총 변수의 수 $n$으로 표현되는 효율적인 $O(n^2 \log n)$의 해법을 제시하였다.

## 참고문헌


[1] 원중연, "확장된 다중선택 선형배낭문제의 신속한 해법연구", 「대한산업공학회지」, 제22권, 제3호, pp. 365-375, 1996.

[2] Armstrong, R. D., P. Sinha, and A. A. Zoltners, "The Multiple Choice Nested Knapsack Model," *Magt. Sci.* 28, pp. 34-43, 1982.

[3] Dudzinski, K. and S. Walukiewicz, "Exact Methods for the Knapsack Problem and its Generalizations," *European J. Opnl. Res.* 28, pp. 3-21, 1987.

[4] Dyer, M. E., "An O(n) Algorithm for the Multiple-Choice Knapsack Linear Problem," *Math. Progr.* 29, pp. 57-63, 1984.

[5] Garey, M. R. and D. S. Johnson, *Computers and Intractibility-A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.

[6] Ibaraki, T., T. Hasegawa, K. Teranaka, and J. Iwase, "The Multiple-Choice Knapsack Problem," *J. of Opns. Res. Soc. of Japan* 21, pp. 59-93, 1978.

[7] Ibaraki, T., "Approximate Algorithms for the Multiple-Choice Continuous Knapsack Problems," *J. of Opns. Res. Soc. of Japan* 23, pp. 28-62, 1980.

[8] Johnson, E. L., M. M. Kostreva, and U. H. Suhl, "Solving 0-1 Integer Programming Problems Arising from Large Scale Planning Models," *Opns. Res.* 33, pp. 803-819, 1985.

[9] Johnson, E. L. and M. W. Padberg, "A Note on the Knapsack Problem with Special Ordered Sets," *Opns. Res. Letters* 1, pp. 18-22, 1981.

[10] Kronsjö, L. I., *Algorithms: Their Complexity and Efficiency*, pp. 293-310, Wiley, Chichester, 1979.

[11] Pisinger, D., "A Minimal Algorithm for the Multiple-Choice Knapsack Problem," *European J. of Opnl. Res.* 83, pp. 394-410, 1995.

[12] Zemel, E., "An O(n) Algorithm for the Linear Multiple Choice Knapsack Problem and Related Problems," *Inform. Proc. Letterss* 18, pp. 123-128, 1984.


97년 4월 최초 접수, 97년 10월 최종 수정