

중속을 고려한 Network 동적 신뢰도 분석 시스템*

윤원영** · 하영주***

Reliability Analysis System For Network with Dependent Components

Won-Young Yun · Young-Ju Ha

〈Abstract〉

This paper considers the reliability computation of the network with dependent components and a software system is developed for supporting the reliability analysis and improvement of the system reliability. At first, We propose the common cause failure and load sharing models as the typical models considering the dynamic behaviors of networks with dependent components. Secondly, the algorithm is proposed to obtain the network reliability and reliability importance of component. The software, Delphi, is used to develop the our reliability analysis system.

1. 서론

근래의 급격한 산업 발달로 시스템 형태가 네트워크 그 자체인 경우(예로써 컴퓨터 네트워크, 통신 네트워크, 수송 네트워크 등)가 급격히 늘어나고 있다. 이와 같은 복잡한 네트워크의 신뢰성을 계산하는 문제는 네트워크의 형태가 복잡할수록 계산이 장시간을 요구하게 된다. 지금까지의 네트워크 신뢰도 계산과 관련된 연구를 보면 구성요소(네트워크에서의 Edge)의 고장간 독립을 가정하거나 주어진 시점까지의 신뢰도(Static Reliability) 계산에 집중되어 있다[1][2][3][4]. 본 연구는 시스템에 있어서 구성요소(Edge)의 고장간 중속을 고려하며 구성요소의 고장 분포(지수 분포)를 가정하여 계산하고 보다 고 신뢰성의 네트워크 설계를 지원할 수 있는 시스템을 개발하고자 한다. 그

러므로 본 논문에서는 Source와 Terminal간의 연결성을 구하는 Terminal-Pair 네트워크에서의 구성요소들의 고장간의 중속성(고장간 상관 관계)과 구성요소들의 고장을 동적으로 고려하는 동적 신뢰성에서의 공통원인고장(Common Cause Failure) 모형과 부하분담(Load Sharing) 모형을 제안하며, 두 모형에서의 신뢰성 계산 알고리즘을 기술하고 이를 지원하는 소프트웨어를 개발하였다.

구성요소의 고장간 중속관계를 고려한 모형과 신뢰성 계산 알고리즘의 기존 연구를 정리하면 다음과 같다.

구성요소의 중속관계에 대한 모형으로 조건부 확률 모형과 독립사건(동시고장종류가정) 모형으로 구분할 수 있다. 조건부 확률 모형은 시스템 작동에 관련된 구성요소의 상태를 전개하여 이들 각 상태의 결합 확률을 조건부 확률로 표시하여 구하고자 하는 것이다.

* 본 연구는 일부 국방과학연구소의 지원으로 이루어졌음.

** 부산대학교 산업공학과, 기계기술연구소

*** 한국국방연구원

그러나 이 접근 방법은 관련되는 확률 모수의 총수가 주어진 구성요소 수의 지수 크기(Exponential Size)로 증가하므로 모형화의 어려움이 있다. 독립사건의 모형은 구성요소의 고장이 개별고장 원인과 공통 원인으로부터 발생한다고 가정한다. 기존의 종속 구성요소 네트워크 신뢰도 계산 알고리즘 연구로서 Hagstrom 등(1985)은 구성요소를 서로 종속관계가 있는 요소와 서로 독립인 요소로 나누어 이에 대한 네트워크 신뢰성을 계산하는 수식을 제시하였다. Chae와 Clark(1986)는 동일한 구성요소로 이루어진 시스템을 가정하고, 하나의 구성요소를 파괴하는 사건에서부터 전체를 파괴시키는 사건에 이르기까지의 사건을 고려하고, 각 사건의 발생 확률이 파괴시키는 구성요소의 개수에 비례하는 모형을 고려하였다. Heffes와 Kumar(1986)는 확정적 네트워크(Deterministic Network)를 대상으로 이들 구성요소들간의 종속성을 종속성그래프(Dependency Graph)로 구축하여 확정적 네트워크의 신뢰성 지수 중의 하나인 Vertex 연결성(Connectivity)를 Event 연결성으로 대체하는 연구를 수행하였다. Li와 Silvester(1986)는 주어진 네트워크 시스템에서 이들 구성요소를 동시에 파괴시키는 사건을 고려하여 기존의 알고리즘을 수정없이 사용하는 방법을 제시하였다[11].

홍과 이(1989)는 종속성을 중복 구성요소로 표현하여 시스템 신뢰도를 계산하는 알고리즘을 제시하였다.

지금까지 언급한 구성요소 종속성을 고려하는 기존 연구의 경우 구성요소의 고장을 확정적(Deterministic)인 경우(고장 확률이 주어짐)로 가정하고 정 시스템 신뢰도를 구하는 문제를 다루었는데 본 논문에서는 기존의 연구를 응용하여 동적 네트워크 신뢰성 모형을 제안하고 이 모형하에서 동적 네트워크 신뢰성 계산 알고리즘을 제안하고자 한다. 그리고 이들을 바탕으로 네트워크의 신뢰도 계산과 향상(구성요소의 신뢰도 향상의 시스템 신뢰도 향상 영향 평가)을 지원할 수 있는 시스템을 개발한다.

2. 종속을 고려한 네트워크 동적 신뢰도 모형

네트워크로 표현되는 시스템 구성요소의 고장 종속성을 크게 두 가지로 나누어 보면 한 지점이 고장나

면 다른 지점도 고장이 일어나는 정보 통신 형태와 부하를 감당하고 있는 구성요소 중 하나가 고장이 나면 나머지 구성요소들이 부하를 감당해야 하는 기계적인 시스템으로 나눌 수 있다. 정보 통신 형태에서는 고장 요인이 일어나면 관련된 요소들이 모두 고장나게 된다(공통 원인고장(Common-Cause Failure) 모형). 또한 기계적인 시스템은 구성요소 하나가 고장이 나면 고장나지 않은 다른 구성요소들이 부하를 감당해야 하므로 고장률이 증가하게 된다(부하분담(Load-Sharing) 모형). 본 절에서는 두 모형을 정의하고 각 모형에서의 신뢰도 계산 알고리즘, 중요도 계산 등을 설명한다.

공통원인고장(Common-Cause Failure(CCF)) 모형 이 모형은 가장 일반적인 종속 모형으로 여러 개의 구성요소에 동시에 영향을 미치는 고장 요인을 고려하는 것이다.(기존의 독립사건 모형의 일종으로 여기서는 고장 분포를 가정한다) 즉, 하나의 공통원인 고장이 일어나면 영향을 받는 구성요소 전체가 고장난다고 가정하는 것이다. 모형의 가정과 신뢰성 유도를 위한 기본 가정은 다음과 같다.

<가 정>

1. 공통 원인이 지수 분포를 따르면서 발생하고 발생시 영향을 받는 구성요소들이 모두 고장난다.
2. 개별 원인에 의한 구성요소의 고장 발생도 지수 분포를 따른다.

<기 호>

- λ_i : 구성요소 i 의 고장률 $i=1, \dots, n$
 $\lambda_{(j)}$: 공통원인 고장 j 의 고장률 $j=1, \dots, k$
 F_j : 공통원인 고장 j 에 의한 고장 구성요소들의 집합

이 모형에서의 네트워크의 신뢰도를 산출하는 알고리즘은 네트워크의 최소절단집합(Minimal Cut Sets)의 정보를 이용하여 영향이 큰 공통원인(고장 구성요소의 수가 많은 것)부터 조건(발생유무)을 가하면서 모든 공통원인의 발생유무 조건 부여가 끝나면 최소 절단집합을 포함하는 경로는 종결 시킨다. 종결되지 않은 경로는 각 경로에서 고장나지 않은 구성요소에 대

해 개별 고장 유무조건을 가한다. 남은 구성요소가 없으면 네트워크의 신뢰도를 계산한다.(최소 절단집합 계산과 신뢰도계산 알고리즘은 부록참조). 제안된 알고리즘은 최소 절단집합을 구하고 Decomposition방법을 사용하므로 네트워크 신뢰도 계산과 함께 중요도 그리고 공통원인고장의 변화 결과를 쉽게 재 계산할 수 있다.

네트워크의 신뢰도를 분석하거나 향상시키고자 하는 경우 각 구성요소나 공통원인의 중요도 척도를 고려하는 것이 매우 유용하다. 이는 네트워크 신뢰도의 개선시 중요한 기준으로 사용할 수 있다. 즉 중요도가 큰 개별원인이나 공통원인을 먼저 개선함으로써 전체 네트워크의 신뢰도를 더욱 효과적으로 개선할 수 있다.

중요도 척도로는 Birnbaum 중요도 개념을 이용하여 다음과 같이 공통원인과 개별원인의 중요도를 구한다.[9]

공통원인 또는 개별원인의 Birnbaum 중요도는

$$I_j^B(P(t)) = \frac{\partial g(P(t))}{\partial P_j(t)} = g(1_j, P(t)) - g(0_j, P(t)) \quad (1)$$

$g(P(t))$: t 시점에서 네트워크가 정상 작동할 확률

$g(1_j, P(t))$: j 개별원인이나 공통원인고장이 t 시점 이전에 발생했을 때 t 시점에서 네트워크가 정상적으로 작동될 확률

$g(0_j, P(t))$: j 개별원인이나 공통원인고장이 t 시점 이전에 발생하지 않았을 때 t 시점에서 네트워크가 정상적으로 작동될 확률

부하분담(Load-sharing) 모형

부하분담모형은 부하(Load)가 몇 개의 구성요소에 영향을 미칠 때 각 구성요소는 그 부하를 균등하게 나누어 받게 된다. 이 때 구성요소들이 고장나면 부하는 작동 중인 구성요소들에 추가된다. 즉 구성요소의 고장률이 분담된 부하에 영향을 받는 데 본 논문에서는 구성요소들의 고장 개수에만 영향을 받는다고 가정한다. 본 모형에서는 하나의 부하는 3개 이하의 구성요소에만 영향을 주는 경우를 고려하였다. 이 가정은 쉽게 확장 가능하다[12].

<기호>

L_i : i 부하

$R(t)$: t 시점까지의 네트워크의 신뢰도 함수

$R_i(t)$: t 시점까지의 구성요소 i의 신뢰도 함수

λ_j : 다른 종속 구성요소들이 모두 정상일 경우 구성요소 j의 고장률

λ_j' : 다른 종속 구성요소들 중 하나가 고장일 경우 구성요소 j의 고장률

λ_j'' : 다른 종속 구성요소들 중 둘이 고장 일 경우 구성요소 j의 고장률

부하분담 모형에서 신뢰도를 구하는 절차는 먼저 네트워크의 최소절단집합들을 구하고 이 정보하에서 각 부하를 기준으로 시점 t까지의 각 부하에 관련된 구성요소들의 상태들로 분기시키는 방법이다(다수준 Decomposition방법). 분기시 최소절단집합의 정보를 이용하여 분기의 종결과 계속을 결정하게 된다. (알고리즘은 부록참조)

분기시 하나의 부하가 두 개의 구성요소에 영향을 주는 경우는 분기되는 가지가 4개가 된다(부하가 세 개의 구성요소에 영향을 주는 경우는 8개가 되며 분기확률계산은 부록참조). 부하의 중요도를 계산하기 위해서 본 논문에서는 각 부하의 분기된 경로별로 다음과 같이 가중치를 주고 각 경로의 신뢰도에 가중치를 곱하여 합한 가중합으로 정의한다.

가중치 부여는 부하가 두개의 구성요소에 영향을 미칠 경우 부하에 영향을 받는 구성요소를 고장률이 큰 구성요소를 a, 적은 것을 b로 할 때 i는 구성요소 a의 상태, j는 구성요소 b의 상태 (1이면 작동 0 이면 고장) 로 나타낼 때 가중치는 다음과 같이 주어진다 고 가정한다.

가중치 =	1	(i=1,j=1)
	0.5	(i=1,j=0)
	-0.5	(i=0,j=1)
	-1	(i=0,j=0)

부하가 세 개의 구성요소에 영향을 미칠 경우에는 부하에 영향을 받는 구성요소들을 고장률이 큰 구성요소부터 각각을 a, b, c로 할 때 i는 구성요소 a의 상태 (1이면 작동 0이면 고장), j는 구성요소 b의 상태,

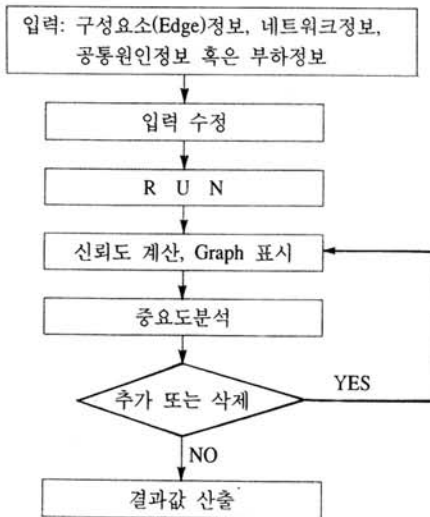
k는 구성요소 c의 상태 (1이면 작동 0이면 고장)로 나타낼 때 가중치는 다음과 같이 부여한다.

- 가중치 = 1 (i=1,j=1,k=1)
- 0.75 (i=1,j=1,k=0)
- 0.5 (i=1,j=0,k=1)
- 0.25 (i=0,j=1,k=1)
- 0.25 (i=1,j=0,k=0)
- 0.5 (i=0,j=1,k=0)
- 0.75 (i=0,j=0,k=1)
- 1 (i=0,j=0,k=0)

제시한 가중치를 부하에 영향을 받는 구성요소들의 상태로 분기된 경로의 신뢰도를 구하여 이들의 가중합을 계산하여 부하의 중요도를 구한다. 여기서 가중치 부여는 하나의 예이므로 분석 시스템 사용 시 변경 가능하다.

3. 네트워크 신뢰도 분석 시스템

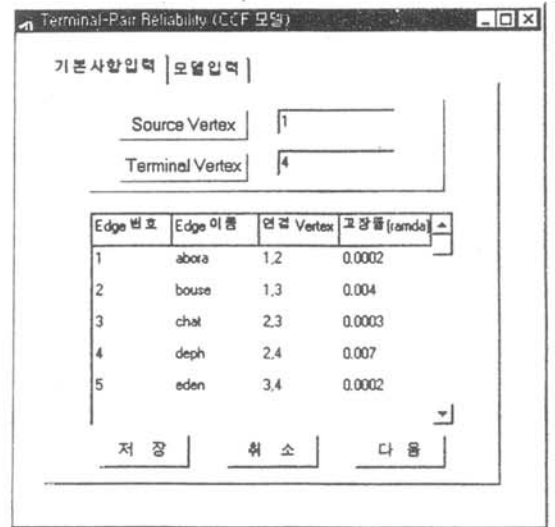
위의 두 모형에서의 신뢰도를 계산할 수 있는 시스템을 개발하였으며, 사용자가 분석하고자 하는 모형을 먼저 선택하여 실행시킨다. 소프트웨어의 개발은 Delphi를 사용하였다.[13][14] 분석 시스템의 흐름은 아래와 같다.



〈그림 1〉 분석시스템흐름도

분석 시스템의 계산흐름을 요약하면 〈그림 1〉과 같으며 기본 입력 사항을 입력하거나 파일로 읽어 들이고 나서 확인 및 수정을 하고 RUN시킨다. T값을 입력해서 신뢰도를 계산하고 나면 그래프로 상태를 볼 수 있다. 또한 중요도 분석을 볼 수 있다. 신뢰도 개선을 할 수 있고, 그래프로 기존의 신뢰도 값과 비교가 가능하다.

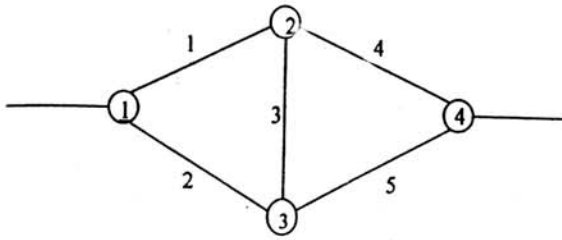
시스템의 입력: 사용자는 구하고자 하는 네트워크의 구성요소(Edge)정보와 공동원인정보, 부하정보를 입력한다. 어느 모델을 사용하느냐에 따라 입력이 다르게 된다.



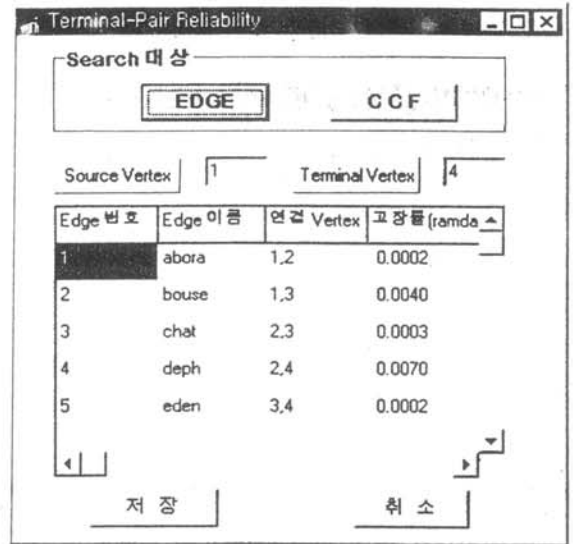
〈그림 2〉 기본 정보 입력 화면

〈그림 2〉는 기본 정보 중 구성요소(Edge)와 네트워크 정보를 입력하는 화면으로 Source Vertex와 Terminal Vertex는 개별 란에 입력하고 표 안에 구성요소(Edge)번호, 이름, 연결Vertex, 고장률을 입력한다. 여기서 연결 Vertex란 각 구성요소(Edge)에 연결된 Vertex의 번호로 전후 2개가 ", "로 연결 입력 되어야 한다. 고장률은 구성요소(Edge)의 고장률이다. 공동원인모형인 경우 하나의 값이 입력되니, 부하분담 모형은 2개 혹은3개의 고장률 값을 필요로 한다.

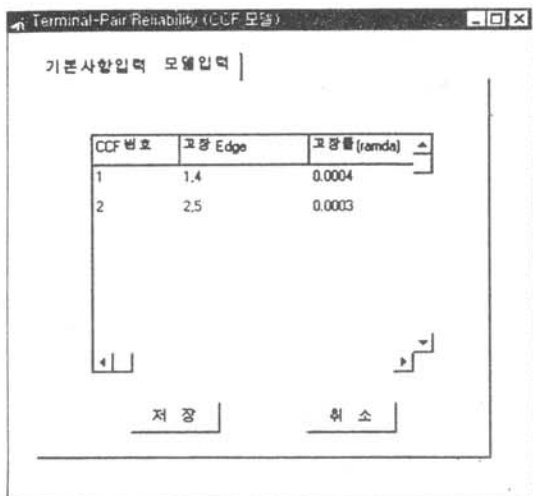
예제1) 아래와 같은 네트워크에서 위의 공동원인고장모형 알고리즘을 적용해서 신뢰도를 계산해 보자.



기본정보 입력 화면<그림 2>를 보면, 구성요소 (Edge)은 1부터 5까지 5개이며 Vertex는 4개이다. Source Vertex은 1이고, Terminal Vertex은 4이다.



<그림 4> 수정 화면



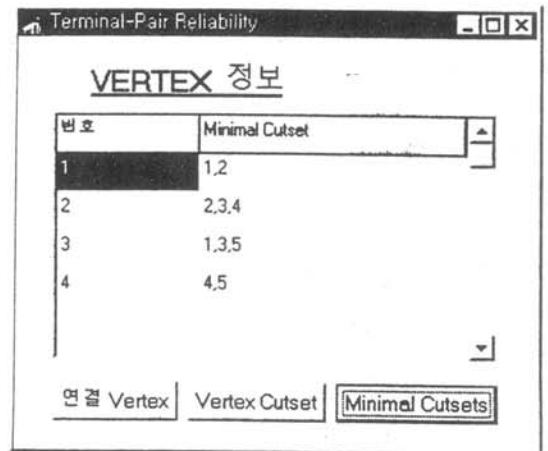
<그림 3> 공통원인 입력 화면

<그림 3>에서 고장 구성요소(Edge) 란 공통원인 i에 의해 고장이 일어나는 구성요소(Edge)번호들의 집합이며 “,”로 연결된다.

예제에서 $F_1 = \{1,4\}$ 이고 공통원인 1의 고장률은 $\lambda_{(1)} = 0.0004$, $F_2 = \{2,5\}$ 이며 공통원인 2의 고장률은 $\lambda_{(2)} = 0.0003$ 이다.

이미 입력된 구성요소(Edge), 공통원인, 부하 정보에 대하여 입력을 <그림 4> List로 보여준다. 저장 버튼을 눌렀을 때 비로소 저장이 이루어진다. 취소 버튼을 누르면 저장이 되지 않으며, 기본 입력 후의 수정과 신뢰도 개선 선택시 작업 화면은 동일하다.

구성요소(Edge) 버튼을 누르면 기본 사항 입력이 나타나며, CCF 버튼을 누르면 모델 입력에 관한 내용이 보여진다. 부하분담 모형의 경우 Load 버튼이 나타난다.

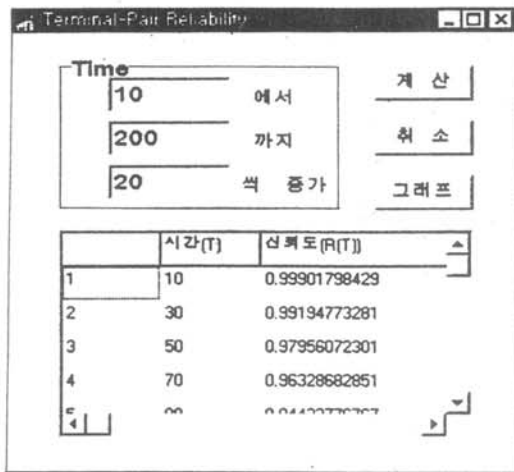


<그림 5> Vertex 화면

최소절단집합계산: <그림 5>는 구성요소(Edge)입력에 따른 각 Vertex별 연결 Vertex연결 구성요소(Edge) 정보를 보여준다.

Minimal Cutsets 버튼을 누르면, 입력정보에서 공통원인을 고려하지 않은 네트워크의 최소절단집합들을 모두 보여주는데 예제에서는 <그림 5>에서와 같이 $\{1,2\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{4,5\}$ 이다.

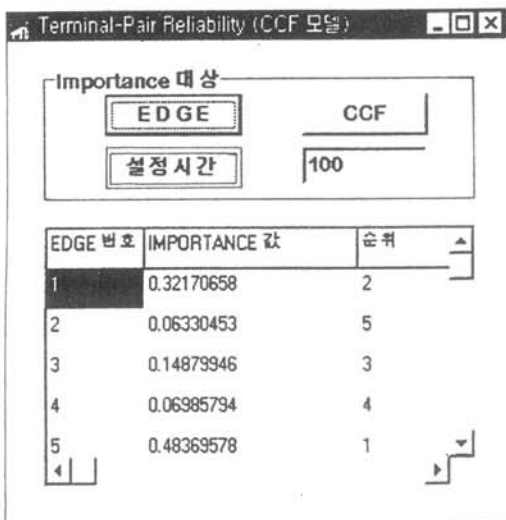
신뢰도 계산:



〈그림 6〉 신뢰도 계산 화면

Reliability 화면에서 이루어지며, T값에 따라 신뢰도 값이 변하므로 T값을 지정해 주고 계산 버튼을 누르면 T와 신뢰도 값 R(T)을 보여준다. 여기서 그래프를 선택하면 2차원 그래프(〈그림 9〉 참조)를 그려준다.

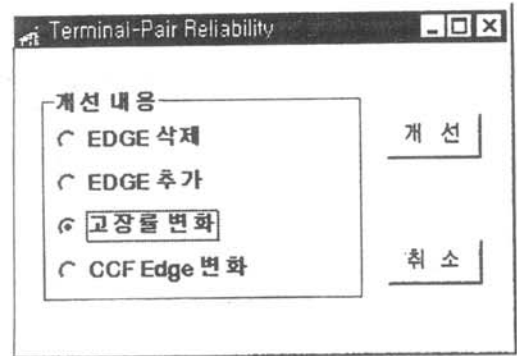
중요도 계산:



〈그림 7〉 중요도 계산 화면

전체 네트워크에서의 각 구성요소(Edge), 공통원인, 부하에 대한 중요성의 척도로 Birnbaum 중요도 척도를 사용했다. 설정 시간을 준 뒤 해당 버튼을 누르면 선택 내용에 대한 중요도가 구성요소(Edge)(CCF)의 번호 순서대로 나타나며 오른쪽에 중요도의 순위가 표시된다.

신뢰도 개선:

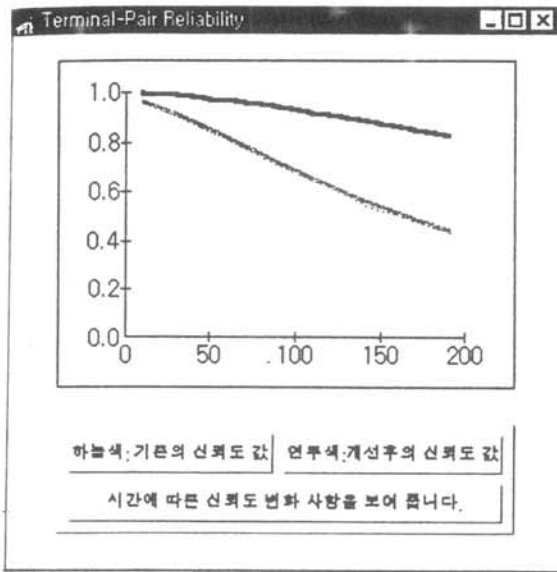


〈그림 8〉 신뢰도 개선 화면

기존 네트워크로 계산된 신뢰도 값을 개선하기 위한 작업으로 개선화면에서 구성요소(Edge)의 추가, 구성요소(Edge) 삭제, 고장률 변화, CCF 구성요소(Edge) 변화 중의 하나를 선택하면 수정화면(〈그림 4〉 참조)이 나타난다. 수정화면에서 개선 작업을 하고 난 뒤 개선버튼을 누르면 개선된 신뢰도 값을 보여주며(신뢰도 계산 화면, 〈그림 6〉), 그래프버튼을 누르면 기존의 신뢰도 값과 비교해 볼 수 있다.(신뢰도 그래프 화면, 〈그림 9〉)

위 화면에서는 고장률 변화를 선택한 경우이다.

신뢰도 그래프:



〈그림 9〉 신뢰도 그래프 화면

신뢰도 계산 화면에서 계산된 시간별 R(T)값에 따른 그래프를 그려준다. 개선 후 그래프를 그리면 기존의 신뢰도 값과 개선된 후의 신뢰도 값을 동시에 그려 준다.

4. 결론

본 논문에서는 Terminal-Pair 네트워크에서의 구성요소(Edge)들간의 종속성(고장간 관계)과 동적 신뢰성을 고려하는 경우의 모형을 개발하였다. 하나의 공통원인고장이 고장나면 영향을 받는 구성요소들의 고장이 일어난다고 가정한 공통원인고장(Common Cause Failure) 모형과 주어진 부하를 분담한다고 가정했을 때 구성요소 하나가 고장이 일어나면 나머지 구성요소가 부하를 분담한다는 생각에 기초한 부하 분담모형에 근거한 신뢰성 계산 알고리즘을 개발하였다. 또한 개발된 알고리즘을 바탕으로 신뢰도 산출을 효율적으로 수행할 수 있는 소프트웨어를 개발하였다. 소프트웨어 개발은 Delphi를 이용하였다.

위와 같은 연구를 통해 보다 현실성을 갖춘 신뢰성 설계 및 분석이 이루어 질 것이며, 앞으로의 연구로

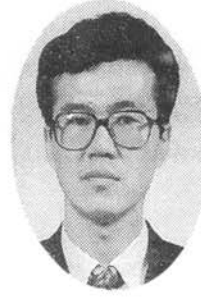
는 신뢰성 소프트웨어와 다른 설계 분야의 시스템과의 통합을 고려해 볼 수 있다. 세부적으로는 고장률이 지수분포가 아닌 다른 분포일 경우를 고려해 볼 수 있다.

【참 고 문 헌】

- [1] Ball M.O, "Computational Complexity of Network Reliability Analysis : An Overview", IEEE Trans. on Reliability, Vol. R-35, pp.230~239, 1986.
- [2] Barlow, R. E, "Mathematical Theory of Reliability : A Historical Perspective", IEEE Trans. on Reliability, Vol. R-43, pp.16~20, 1984.
- [3] Hwang, C.L., Frank A. Tillman, and M.H. Lee, "System-Reliability Evaluation Techniques for Complex Large Systems - A review", IEEE Trans. on Reliability, Vol.R-30, pp.416~422, 1981
- [4] Yoo, Y. B. and Narsingh Deo, "A Comparison of Algorithm for Terminal-Pair Reliability", IEEE Trans. on Reliability, Vol. R-37, pp.210~215, 1988.
- [5] Hagstrom, J. N. and K. T. Mak, "The Reliability Function and Dependent Component State Distribution," Univ. of Illinois, Chicago (working paper), 1985.
- [6] Hefles, H. and A. Kumar, "Incorporation Dependent Node Damage in Deterministic Connectivity Analysis and Synthesis of Network," Network, Vol. 16, pp. 51~65, 1986.
- [7] Chae, K.C. and G M. Clark, "System Reliability in The Presence of Common-Cause Failures", IEEE Trans. on Reliability, Vol R-35, pp 32~35, 1986.
- [8] 홍정식, 이창훈, "구성요소가 서로 종속인 네트워크 시스템의 신뢰성 모형과 계산 알고리즘", 한국경영과학회지, Vol.14, pp.88~96, 1989.
- [9] Singh B., "An Algorithm for Evaluating all the Minimal Cuts of a Graph", Microelectron. Reliab., Vol. 35, pp.865~867, 1995.
- [10] Patvardhan, C., C. Prasad, and V. Prem Pyara, "Vertex Cutsets of Undirected Graphs", IEEE

Trans. on Reliability, Vol. R-44, pp.347~353, 1995.

- [11] Misra, K.B, Reliability Analysis and Prediction, A Methodology Oriented Treatment. Elsevier Science, Netherlands, 1992.
- [12] Kozlov, B.A., and I. A. Ushacov, Reliability Handbook, New York: Holt, Reinhart, and Winston, 1970.
- [13] 김상형, 델파이 정복, 가남사, 1996.
- [14] Marco Cantu, KMK 정보 산업 연구원 역, 이것이 Delphi, 삼각형, 1996.



윤원영

서울대학교 산업공학과를 졸업하고 한국과학기술원에서 석·박사 학위를 취득하였으며 현재 부산대학교 산업공학과에 재직중이다. 관심분야로는 신뢰성, 보전성 공학과 시뮬레이션이다.

하영주

부산대학교 통계학과를 졸업하고 부산대학교 산업공학과에 석사학위를 취득하였으며 현재 한국국방연구원에서 근무하고 있다. 관심분야는 신뢰성 공학이다.

97년 2월 최초 접수, 97년 4월 최종 수정

부 록

〈 공통 원인 고장 모형에서의 신뢰도 계산 알고리즘 〉

단계 1) 입력: 구성요소(Edge) 번호, 구성요소(Edge) 이름, 연결된 Vertex, 고장률(λ)
 CCF의 구성요소(Edge) 집합(F_j), CCF의 고장률(λ_j)
 Source Vertex 번호, Terminal Vertex 번호

단계 2) Terminal-Pair 네트워크의 최소 절단 집합 생성

단계 3) F_j 의 큰 순서부터 조건을 부여

단계 4) CCF의 조건 부여가 모두 끝나면 각 고장난 구성요소의 집합이 임의의 최소 절단 집합을 포함하면 그 경로의 전개를 중단

단계 5) 분기가 종결되지않은 경로에 대해 구성요소 개별 고장 조건으로 분기해 나감(고장 구성요소들의 집합이 최소절단집합을 포함하는지를 확인하면서 분기를 계속함)

단계 6) 모든 공통원인, 개별원인 조건부여가 끝나면 각 경로의 신뢰도의 합을 계산.

참고 : 단계 2의 최소절단집합생성은 Singh(1995)의 알고리즘을 이용하였다[9][10].

〈 부하분담모형의 신뢰도 계산 알고리즘 〉

단계 1) 기본 데이터 입력 : 기본 입력 데이터는 구성요소(Edge)의 번호, 이름, 연결된 Vertex, 부하의 번호, 영향을 미치는 구성요소(Edge)의 번호, 부하의 영향에 따른 구성요소(Edge)의 고장률

단계 2) 최소절단집합생성

단계 3) 부하에 따라 분기 : 부하에 영향을 받는 구성요소가 2개인 경우에는 4개의 경로 분기하고 세 개일 경우에는 8개의 경로로 분기(분기확률계산은 뒤에 요약되어 있으며, 분기된 경로중에 최소절단집합을 포함하는 경우에는 그 경로 전개는 중단)

단계 4) 부하에 의해 분기된 경로에 포함되지 않은 구성요소가 있는가 판단. 만약 고려되지 않은 구성요소가 있는 경우에는 단계 5로 감. 남은 구성요소가 없으면 단계 6으로 감.

단계 5) 남은 구성요소(Edge)중 하나를 선택하여 고장유무에 의해 분기(분기된 각 경로가 최소절단집합을 포함하는지 판단. 만약 포함하는 경우에는 그 경로는 더 이상 고려하지 않음)

단계 6) 남아있는 경로에 대해 각각의 신뢰도를 구한 후 합함

〈 부하분담모형에서 분기시 경로 확률계산 〉

1) 하나의 부하가 두 개의 구성요소에 영향을 주는 경우

두 구성요소가 모두 정상일 확률 : $R(t) = e^{-(\lambda_a + \lambda_b)t}$

한 구성요소(b)만 고장일 확률

$$R(t) = \int_0^t f_b(t_1) R_a(t_1) \frac{R'_a(t)}{R'_a(t_1)} dt_1 = \frac{\lambda_b e^{-\lambda'_a t}}{\lambda_a + \lambda_b - \lambda'_a} (1 - e^{-(\lambda_a + \lambda_b - \lambda'_a)t})$$

a 구성요소만 고장일 확률

$$R(t) = \int_0^t f_a(t_1) R_b(t_1) \frac{R'_b(t)}{R'_b(t_1)} dt_1 = \frac{\lambda_a e^{-\lambda'_b t}}{\lambda_a + \lambda_b - \lambda'_b} (1 - e^{-(\lambda_a + \lambda_b - \lambda'_b)t})$$

2) 하나의 부하가 세 개의 구성요소에 영향을 주는 경우

$$\text{모두 정상일 확률 } R(t) = e^{-(\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c)t}$$

하나만 고장일 확률

$$\begin{aligned} R(t) &= \int_0^t f_a(t_1) R_b(t_1) R_c(t_1) R'_b(t-t_1) R'_c(t-t_1) dt_1 \\ &= \frac{\lambda_a e^{-(\lambda'_b + \lambda'_c)t}}{\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c - \lambda'_b - \lambda'_c} (1 - e^{-(\lambda_a + \lambda_b - \lambda'_b - \lambda'_c)t}) \end{aligned}$$

(a가 고장일 경우)

두 개가 고장인 경우 $(t_1 < t_2 < t)$

a는 t_1 에 고장, b는 t_2 에 고장

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \int_0^t f_a(t_1) R_b(t_1) R_c(t_1) \left\{ \int_0^{t-t_1} f_b(t_2) R'_c(t_2) R'_c(t-t_1-t_2) dt_2 \right\} dt_1 \\ &= \int_0^t \lambda_a e^{-(\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c)t_1} \int_0^{t-t_1} \lambda'_b e^{-(\lambda'_b + \lambda'_c - \lambda''_c)t_2} e^{-\lambda''_c(t-t_1)} dt_2 \\ &= \frac{\lambda_a \lambda'_b e^{-\lambda''_c t}}{\lambda'_b + \lambda'_c - \lambda''_c} \left\{ \frac{1 - e^{-(\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c - \lambda''_c)t}}{(\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c - \lambda''_c)} - \frac{e^{-(\lambda'_b + \lambda'_c - \lambda''_c)t}}{(\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c - \lambda'_b - \lambda'_c)} (1 - e^{-(\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c - \lambda'_b - \lambda'_c)t}) \right\} \end{aligned}$$

그러므로 두개가 고장날 확률은 $R_1(t)$ 식에 a, b, c 첨자를 바꾸어 구할 수 있다.