

양방향 흐름을 고려한 물류시스템의 최적화 모델에 관한 연구*

황흥석**

A Study on a Stochastic Material Flow Network with Bidirectional and Uncertain Flows

Hwang Heung-Suk

〈Abstract〉

The efficiency of material flow systems in terms of optimal network flow and minimum cost flow has always been an important design and operational goal in material handling and distribution system. In this research, an attempt was made to develop a new algorithm and the model to solve a stochastic material flow network with bidirectional and uncertain flows. A stochastic material flow network with bidirectional flows can be considered from a finite set with unknown demand probabilities of each node. This problem can be formulated as a special case of a two-stage linear programming problem which can be converted into an equivalent linear program. To find the optimal solution of proposed stochastic material flow network, some terminologies and algorithms together with theories are developed based on the partitioning and subgradient techniques. A computer program applying the proposed method was developed and was applied to various problems.

Key Words : Network Analysis, Distribution System, Simulation.

1. 연구배경

최근의 국가 경쟁력 향상의 주요한 분야인 물류시스템의 최적화(흐름량, 시간, 비용 등을 고려한 물류 시스템)는 매우 중요한 분야이며 많은 연구가 추진되고있다. 그러나 대부분의 방법이 단일방향의 확정적인 물류네트워크의 문제(Deterministic Material Flow Network Problem)를 다루고 있다. 현재 국내의 에서 연구되어 온 단일 방향의 흐름을 고려한 확정적 물류네트워크의 문제들을 요약하면 다음과 같다[12].

- (1) Shortest Path Problem
- (2) Maximum Path Problem

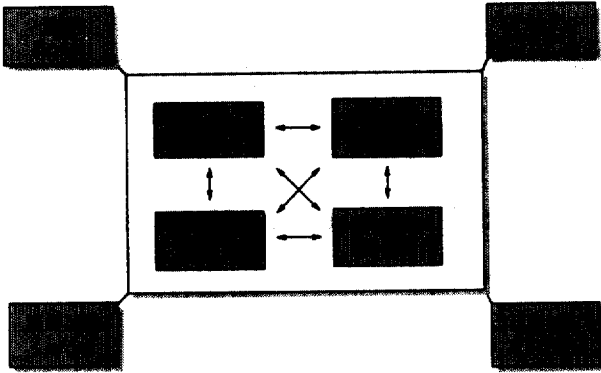
- (3) Minimum Cost Flow Problem
 - Transportation Problem
 - Assignment Problem
 - Capacitated Transshipment Problem
- (4) Traveling Salesman Problem

이러한 문제는 주로 물류네트워크 비용을 최소화하는 문제, 즉 최소비용흐름(Minimum Cost Flow)문제들이다. 현재 국내외의 연구동향은 주로 종합시스템(Integration System)으로 발전되고 있으며, <그림 1>과 같이 내·외부 물류시스템의 결합된 통합시스템으로 발전되고 있다.

국내외의 기존의 물류 Network System의 최적화 문제는 대

* 본 연구는 1996~1997년도 동의대학교 학술연구조성비의 지원에 의하여 연구되었음

** 동의대학교 산업공학과



〈그림 1〉 통합 물류시스템

부분이 단 방향 및 확정적인 네트워크 최적화방법이 사용되고 있으나 실제 물류 Network의 최적화 문제는 양방향 흐름을 고려한 확률적 네트워크 모델이 필요시 되고 있다. 최근의 물류 시스템의 복잡화, 물류흐름 및 수요의 불확실성 및 양방향 흐름 등의 새로운 요인들이 필요시 되고 있으며 이러한 양방향 및 불확실성을 고려한 물류시스템의 최적설계 및 운영을 위한 연구가 추진되고 있다. 다음 내용들의 예를 들 수 있다.

- (1) 확률적 네트워크 시뮬레이션
(Stochastic Network Simulation)[12],
- (2) 물류, 수송 및 물류정보네트워크
(Material Flow Plan Versus Transportation Versus Communication Networks)[3],
- (3) 진부화 및 증식되는 제품의 물류네트워크
(Material Flow Network with Deteriorating or Ameliorating Items)[10], [11].

본 연구는 이러한 연구 추세를 고려하여 기존의 단 방향의 확정적 물류흐름 네트워크에서 양방향 흐름 및 불확실성을 고려한 물류네트워크의 최적화 문제를 다루었으며 관련 프로그램을 개발하고 실 예를 들어 보였다.

2. 수리모델

2.1 최소비용 물류네트워크 모델

양방향 흐름과 불확실한 외부흐름을 고려한 물류시스템의 최적화를 위하여 기존의 네트워크 모델들로부터 확장 연구하

였으며 아래와 같이 2단계의 연구가 추진되었다.

- 단계 1 : 불확실성 하에서의 의사결정(단 방향 물류네트워크 모델),
- 단계 2 : 위의 단계 1의 결정에 대한 보완(양 방향 물류네트워크 모델),

최소비용 물류네트워크 문제(Minimum Cost Material Flow Network)[12]를 위하여 물류비용이 최소가 되도록 다음과 같이 2개의 제한조건이 만족되도록 정형화할 수 있다. 즉 각 물류 네트워크의 Node에서 나가는 물류와 들어오는 물류의 차이가 외부 흐름량과 같게 하며, 각 활동의 물류흐름량은 물류흐름 능력(최대 및 최소치)을 벗어나지 않게 한다. 이러한 물류흐름 네트워크의 최소비용 흐름문제는 다음과 같이 단 방향 물류네트워크의 최적화 문제로 표시할 수 있다.

$$\text{Min. } \sum_{k=1}^m s_k \cdot f_k \tag{1}$$

$$\text{ST. } \sum_{k \in A_{oi}} f_k - \sum_{k \in A_{Ti}} f_k = b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$L_k \leq f_k \leq C_k$$

여기서,

f_k : arc k의 흐름량,

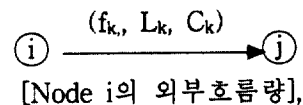
s_k : arc k에서의 단위운송비용,

L_k, C_k : arc k에서의 최소 및 최대흐름량,

b_i : Node i에서의 외부흐름량(+는 유입, -는 유출),

A_{oi}, A_{Ti} : Node i에서의 시작 또는 끝나는 Arc의 Set.

각 Node에서의 외부흐름량 b_i 와 각 Arc의 흐름량을 〈그림 2〉와 같이 정의하였다.



$$b_i = \sum_{k \in A_{oi}} f_k - \sum_{k \in A_{Ti}} f_k$$

〈그림 2〉 물류네트워크의 기호

본 연구에서 $B_i(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 를 각 Node에서의 외부 물류 흐름(Fixed External Flow) 벡터이며 다음과 같이 b_i 값의 경우를 정의하였다.

- $b_i > 0$: 외부로부터의 유입
- $b_i < 0$: 외부로의 흐름
- $b_i = 0$: 외부흐름이 없을 경우이다.

2.2 양방향 물류네트워크 모델

기존의 확정적 최소비용 물류흐름문제에서는 각 Node에서의 외부흐름(External Flow)이 확정적인 값으로 주어지나, 확률적 외부흐름의 경우, 물류흐름 네트워크 문제는 더욱 복잡하게 되고, 의사 결정 과정에서 사후 재조정 단계가 필요하게 된다. 예를 들면 물류 네트워크에서 각 수요 지에서의 소요량 B 가 이산형 확률변수로 주어질 경우 이 각각의 확률을 다음과 같이 고려할 수 있다.

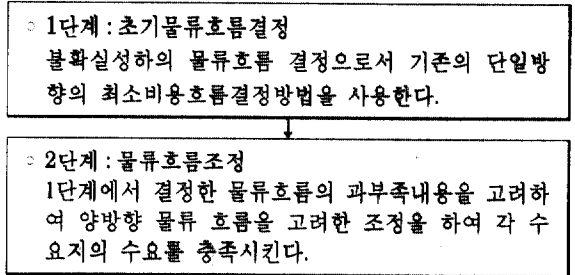
- 외부흐름 : B_1, B_2, \dots, B_r
- 확률 : P_1, P_2, \dots, P_r

먼저 각 Arc의 물류흐름 Vector F 가 결정될 경우 물류비용은 $S \cdot F$ 가 되며, 다음 단계에서 각 Arc의 물류 흐름량을 조정함으로써 추가 운송 및 반품 등이 이루어지며 이 추가 조정량 Y (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)라고 할 경우 이에 따른 추가 물류비용은 $S' \cdot Y$ 가 된다. 여기서 S' 를 추가 물류비용($S' > S$ 및 $S > S'$)으로 초기 물류비용보다는 크다고 가정하였다. 이러한 양방향 물류네트워크 문제를 최소 비용의 문제로 표시하면 다음과 같다.

$$\text{Min. } (S \cdot F + S' \cdot Y)$$

여기서 외부흐름 벡터 B 는 \sum (양의 b_i) = \sum | 음의 b_i | 일 경우 이 물류네트워크는 균형 되었다고 보며, 이 경우 총 물류량은 총수요량과 같게된다. 그러나 위에서와 같이 단계 1에서의 의사결정의 경우에는 수요와 공급량이 균형되지 않을 경우로써 이 네트워크의 균형을 위하여 다음과 같이 단계 2의 의사결정이 이루어진다. 비 균형 네트워크이 균형화되도록 추가 조정하였다. <그림 3>에서와 같이 각 Node에서의 수요가 불확실한 상태에서 첫 번째 단계로 단일 방향의 물류흐름량을

결정하고, 다음 단계로 양방향흐름을 고려하여 물류흐름량을 조정하였다.



<그림 3> 2-단계 물류 의사결정

이러한 불확실성을 고려한 양방향 물류흐름 네트워크의 문제((Stochastic Material Flow Network Problem)는 2단계 LP문제의 특수한 경우로 정형화할 수 있다. 2단계 LP문제는 대부분 해를 쉽게 구할 수 있으나 물류네트워크 문제는 매우 규모가 크게 되어 해를 구하기가 쉽지 않다. 본 연구에서는 이러한 문제를 위하여 분할방법(Partitioning Method)과 부분경사법(Subgradient Method)[12]의 혼합된 접근방법을 사용하였다. 이러한 문제를 2단계의 LP문제로 정형화하면 아래와 같다.

단계 1 : 불확실성 하의 물류흐름결정

각 Node에서의 외부흐름 및 확률이 다음과 같이 주어진 경우의 물류최적화 문제를 정형화하면 식 (2)와 같다.

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_r) \text{의 이산 확률 분포를}$$

$$\text{Prob.}(B) = (p_1, p_2, \dots, p_r) \text{라고 하면,}$$

$$\text{물류비용} = S \cdot F.$$

$$\text{Min. } S \cdot F \tag{2}$$

$$\text{S.T. } A \cdot F = B$$

$$L \leq F \leq C$$

여기서 S : 물류비용벡터

F : 물류흐름벡터

L, C : 물류흐름의 최소 및 최대량 벡터

A : F 를 결정하기 위한 Network Model의 Matrix

단계 2 : 물류흐름 조정

단계 1에서 결정한 물류흐름 F 를 각 Node에서의 수요

(External Flow)의 불확실성을 고려하여 재 조정하는 단계이다. 양방향 물류흐름을 고려한 네트워크문제를 아래와 같이 정형화할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Min. } & S \cdot F + E(S' \cdot Y) & (3) \\ \text{ST. } & A \cdot F + A' \cdot Y = B \\ & L \leq F \leq C \\ & L' \leq Y \leq C' \end{aligned}$$

여기서 (S' · Y) : 2단계 물류비용
 L', C' : 조정물류흐름 Y의 상·하한 벡터값
 A' : 역 방향 Network Model의 Matrix

본 연구에서 양방향 물류흐름네트워크 문제를 위하여 다음 사항을 가정하였다. 1) 초기의 물류흐름 F와 조정물류흐름량 Y의 합은 각 Node의 초기물류능력(Capacity)을 초과할 수 없으며, 2) 역 방향 물류(조정물류)량은 초기 물류량을 초과할 수 없다. 여기서 양방향 물류흐름을 고려할 경우 앞에서 정의한 식 3과 같이 확률적 LP문제(Stochastic Linear Programming Problem)의 형태로 정형화 가능하며 단계 1에서 결정된 초기 물류벡터 F와 단계 2에서 조정한 물류벡터 Y의 하한 값을 각각 0으로 두고, 조정 물류벡터 Y를 양 방향 물류량 (Y', Y)로, 물류비용 벡터 S를 (S', S)로, 그리고 물류 능력벡터 C를 (C', C)로 각각 구분하고 C' = C-F, C = F으로 대치하면 위의 문제는 다음과 같이 확률적 LP문제로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Min. } & S \cdot F + E(S'Y' + S'Y) & (4) \\ \text{ST. } & A \cdot F + AY' + A'Y = B \\ & 0 \leq Y \leq F \\ & 0 \leq Y' \leq C-F \end{aligned}$$

위의 문제는 역시 확률적 LP모델이며 외부물류량벡터 B의 확률 값이(B₁, B₂, , B_r) 및 (P₁, P₂, , P_r)에 대하여 각각 Prob.(B_j) = P_j 으로 주어질 경우 위의 문제는 다음과 같은 확정적 LP문제로 정형화 할 수 있다.[5]

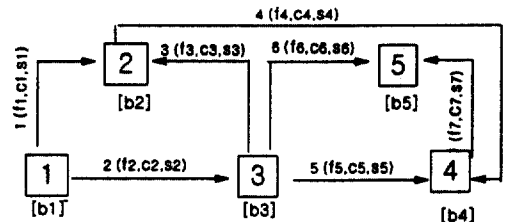
$$\begin{aligned} \text{Min. } & SF + \sum_{j=1}^r P_j (S^+ Y_j^+ + S^- Y_j^-) & (5) \\ \text{ST. } & AF + AY_1^+ + A^- Y_1^- = B_1 \\ & AF + AY_2^+ + A^- Y_2^- = B_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & \vdots \\ AF + & AY_r^+ + A^- Y_r^- = B_r \\ & 0 \leq Y_j^+ \leq C-F \\ & 0 \leq Y_j^- \leq F \\ & \text{for } j = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

식 (5)에서와 같이 확률적 양방향 물류흐름 네트워크문제를 2단계의 확정적 LP문제로 정형화하였다. 외부흐름의 각 대안 에 따른 r개의 부분문제를 다음과 같이 표시할 수 있다.

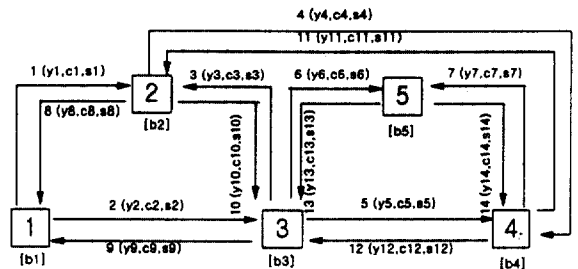
$$\begin{aligned} Z_j = & \text{Min}(S^+ Y_j^+ + S^- Y_j^-) & (6) \\ \text{ST. } & AY_j^+ + A^- Y_j^- = B_j - AF \\ & 0 \leq Y_j^+ \leq C-F \\ & 0 \leq Y_j^- \leq F \end{aligned}$$

위의 양방향 물류네트워크 문제를 네트워크 형태로 표시하면 <그림 4> 및 <그림 5>와 같다.



i (fi, ci, si) = Arc(물류흐름량, 흐름능력, 단위 물류비용)

<그림 4> 단계 1 : 단 방향 물류흐름네트워크



<그림 5> 단계 2 : 양방향 물류네트워크

2.3 최적해의 산정방법

식 (5)는 불확실한 외부흐름을 고려한 양방향 물류네트워크 시스템에서 최소비용흐름(Minimum Cost Flow)문제를 2단계의 확정적 LP문제의 형태로 정식화하였다. 이러한 문제는 Dantzig와 Madansky[5] 이후 많은 연구가 이루어져 왔다. Walkup과 Wets[14]는 2단계 LP문제를 일반적인 경우로 확장 연구하였고 Rutenberg[13]는 반품을 고려한 Stochastic Programming문제에 확장 연구하였다. 이러한 양방향 흐름을 고려한 물류흐름 네트워크의 문제는 2단계 LP문제로 접근될 수 있으나 대부분 매우 복잡한 대형 문제가 될 경우가 많다. 이를 극복하기 위하여 Geoffrion[9]은 대형 LP문제의 해를 위하여

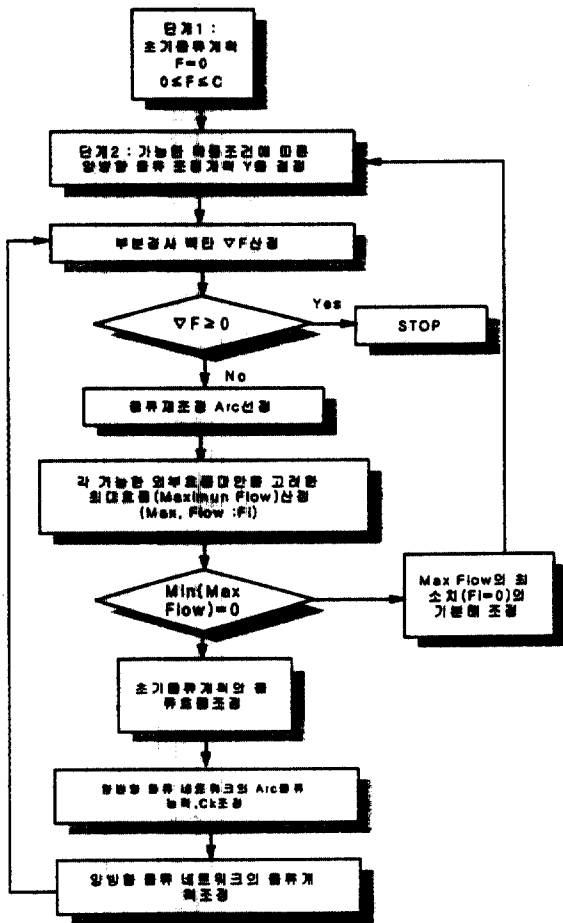
“Master-Problem”과 “Subproblem”으로 Grouping Algorithm을 개발하여 사용하였으며, Jensen과 Barnes[12]에 의해서 더욱 편리하고 네트워크 문제에 효과적인 방법을 연구하였다. 식 (6)의 해를 구하기 위하여 먼저 다음과 같이 2개의 문제로 분할하여 각 문제의 해를 구하는 2단계의 방법을 사용하였다. 첫 번째 단계에서 네트워크의 각 Node에서의 흐름 벡터 F의 초기 값을 결정하고, 두 번째 단계에서 각 Node에서의 외부흐름량의 대안, $B_j, j=1, \dots, r$,에 따라 r개의 최소비용문제인 부분문제를 식 (6)과 같이 정형화하였으며, 각 부분문제는 그 자체가 하나의 최소비용네트워크 문제이므로 쉽게 그해를 구할 수 있다. 이 부분 해로부터 구한 쌍대변수(Dual Variable)를 사용하여 부분경사벡터(Subgradient Vector), $\nabla F(\nabla F^*, \nabla F)$ 를 구하여 사용하였다. 여기서 ∇F 의 i번째 요소는 활동 i에서 물류량을 한 단위 증가시킬 경우 물류비용의 증감을 나타내며 양방향 물류네트워크의 최적 해의 판단 지표로 사용할 수 있다.

양방향 흐름을 고려한 확률적 물류네트워크 문제를 확정적인 LP문제로 모델링한 식 (5)에서와 같은 최소비용문제에서 외부물류흐름 B, 및 초기 F값이 주어질 경우(단계 1의 초기해), 양방향 물류흐름 및 확률적 물류네트워크 문제의 최적해는 <그림 6>과 같은 흐름도에 따라 구할 수 있다. 본 모델의 해를 위하여 Jensen 및 Barnes[12]의 네트워크 알고리즘들을 이용하여 전산 프로그램을 개발하였으며 이의 응용결과를 다음 항에서 보였다.

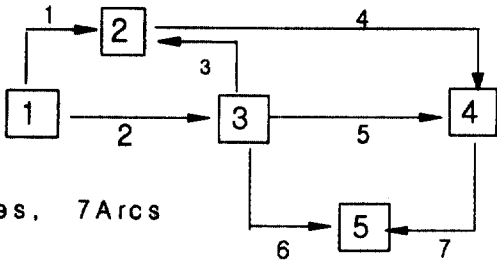
3. 모델의 응용

양방향 물류흐름과 확률적 수요(각 Node에서의 외부 흐름량)를 고려한 5개의 Node와 7개의 Arc로 구성된 <그림 7>과 같은 물류네트워크 문제의 최소비용 물류계획을 구하기 위하여 아래 자료를 수집하였다.

- Arc의 초기 단위 물류비용, $S = (6, 4, 8, 5, 7, 5, 3)$
- Arc의 물류능력, $C = (10, 15, 9, 12, 7, 9, 8)$
- 조정 물류비용, $S' = (8, 7, 10, 8, 9, 8, 5)$
 $S = (10, 4, 10, 8, 8, 9, 6)$
- 각 Node에서의 외부흐름량 및 확률,
 $B_1 = (15, 10, -9, -7, -9), P_1 = 0.7$
 $B_2 = (20, 6, -7, -16, -3), P_2 = 0.3$



<그림 6> 양방향 물류네트워크 문제의 흐름도



5 Nodes, 7Arcs

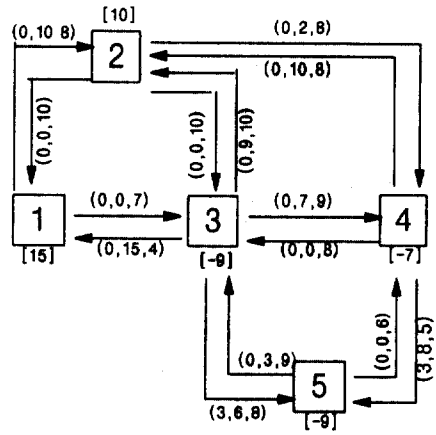
〈그림 7〉 초기 물류네트워크 구조

〈표 1〉 최적 물류계획 산정결과(요약)

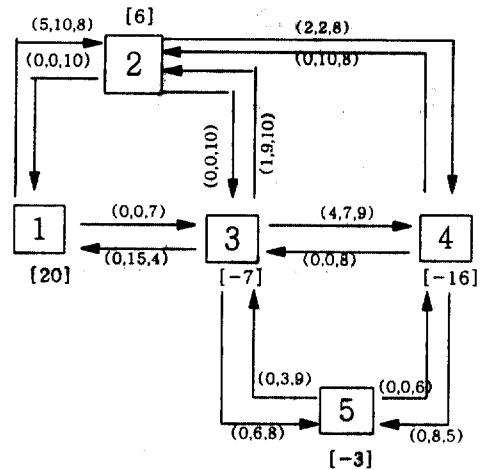
Iteration	Arc Selected to Change	Flow Changed	Expected Total Cost
0	-	-	266.90
1	6*	3	257.90
2	6	0	257.90
3	4*	10	227.90
4	4	0	227.90
5	2*	15	182.90
6	4	0	182.90

위의 양방향 물류네트워크 문제를 본 모델을 응용한 결과 각 단계의 기대 비용과 조정물류 계획을 〈표 1〉에서와 같이 요약하였으며 세부출력을 〈부록 1〉에 요약하였다. 〈표 1〉의 결과를 네트워크로 표시하면 〈그림 8〉, 〈그림 9〉 및 〈그림 10〉과 같다. 이때의 최소 물류비용은 182이다.

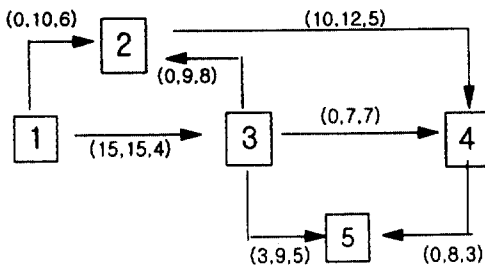
양방향 확률적 물류네트워크의 문제는 일반적으로 확정적 LP문제로 정식화 할 수 있으나, 규모가 큰 LP문제가 되어 해



〈그림 9〉 외부흐름 B₁의 경우 최적 물류계획



〈그림 10〉 외부흐름 B₂의 경우 최적 물류계획



〈그림 8〉 최적 초기물류네트워크(단방향)

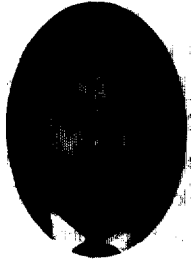
를 구하기가 어렵다. 예를 들면 M개의 초기 Arc N개의 Node 와 B개의 외부 흐름 대안이 고려될 경우의 LP문제는 $M(2B+1)$ 개의 변수와 $N \cdot B + M(2B+1)$ 개의 조건 식을 가지게 된다. 예를 들면 5개의 Node, 10개의 Arc와 10개의 외부 흐름 대안일 경우를 정형화한 LP문제는 210개의 변수와 260개의 제한조건을 가지는 문제가 된다. 본 모델은 네트워크의 Node 및 Arc의 수에 비하여 외부물류흐름량 B의 대안이 클수록 매우 효과적이라고 볼 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 기존의 확정적인 단 방향 최소비용 물류흐름 문제를 양 방향 물류흐름 문제 및 확률적 네트워크 문제로 확장 연구하였다. 물류네트워크의 각 Node에서의 외부흐름량이 불확실할 경우 최소비용의 물류흐름 문제의 해를 구하기 위하여 2단계의 의사결정 모델을 사용하였다. 단계 1에서 초기 불확실성 하의 단 방향 물류흐름 량을 결정하고 단계 2에서 각 Node의 외부흐름을 충족하는 양 방향 물류흐름을 고려하여 최적 물류흐름량을 결정하였다. 이를 위하여 2-단계 LP문제의 특수한 형태로 정형화하고 이의 해를 위하여 분할방법 (Partitioning Method)과 부분경사법(Subgradient Method)을 활용하여 최적 해를 구하였다. 예제를 통하여 본 모델의 시험적용 결과를 보였으며 각 Node에서의 외부 물류흐름량의 대안이 커지거나 연속확률분포함수로 주어질 경우에 대한 추가연구가 필요시 된다. 본 연구의 결과는 기존의 확정적 단일 방향 물류흐름 문제를 양 방향 흐름을 고려한 확률적 네트워크 문제로 확장하여 각 Node에서의 외부물류흐름 량의 이산 확률분포가 주어질 경우에 물류네트워크의 최적화 문제에 국한하였으나, 실제 물류시스템의 최적화 문제에 매우 유용하게 활용될 것이다.

[참 고 문 헌]

- [1] Alessandro, Agnetis, "Planning the Routing Mix in FASs to Minimize Total Transportation Time", The International Journal Flexible Manufacturing Systems, Vol. 8, No. 2, 1996.
- [2] Bradly, G., G. Brown and Graves, G., "Design and Implementation of Large Scale Primal Transshipment Algorithms", Management Science, Vol. 24, No.1, pp. 1-34, 1977.
- [3] Castro J., and Nabona. N., "An Implementation of Linear and Nonlinear Multicommodity Network Flows", European Journal of Operational Research, Vol. 92, No. 1, July. 5, 1996.
- [4] Cullinane, T. and D. Freeman, "Evaluating and Justifying Material Handling Projects", In Material Handling Handbook, 2nd ed., R.A. Kulwicz, pp. 79-100, John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [5] Dantzig, G.B. and Madansky, A., "On the Solution of Two-Stage LP Under Uncertainty", In Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 165-176. Berkeley, California : University of California Press, 1981.
- [6] Edmond, J. and Karp, R.M., "Theoretical Improvement in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems", Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 19, No. 2, pp.248, 1972.
- [7] El, Agizy., "Two-Stage Programming Under Uncertainty with Discrete Distribution Function", Operations Research, 15, pp.55-70, 1987.
- [8] R. J. and J. M. A. Tanchoco, "Flow Path Design for Automated Guided Vehicle Systems", International Journal of Production Research, Vol.25, No.5, pp.667-676, 1987.
- [9] Geoffrion, A., "Elements of Large-Scale Mathematical Programming", Management Science, Vol. 16, No. 11, pp. 652-691, 1970.
- [10] Hwang, H. S., "A Study on a Inventory Model for Items with Weibull Ameliorating", Int. Jnl. of Computers and Industrial Engineering, Vol.32, No.3, 1997.
- [11] Hwang, H. S., "A Study on an Inventory Model for Fish Culture Items with Weibull Ameliorating", The Journal of Fisheries Business Administration, Vol.25, No.1, 1996.
- [12] Jensen, P.A. and Barnes, J. W., Network Flow Programming, John Wiley&Sons, 1980.
- [13] Kiran, A. S. and Tansel, B. C., "Optimal Pickup Point Location of Material Handling Networks", International Journal of Production Research, Vol. 27, No. 9, pp. 1475-1486., 1989.
- [14] Rutenberg, D. P., "Risk Aversion in Stochastic Programming with Recourse", Operations Research, Vol. 21, pp. 377-380, 1973.
- [15] Walkup, D. W. and Wets, R., "Stochastic Program with Recourse II : On the Continuity of the Objective." SLAM Journal of Appl. Math., Vol.17, pp. 98-103. 1967.
- [16] Yu. G. Stoyan, M.V. Novozhilova and A. V. Kartashov, "Mathematical Model and Method of Searching for a Local Extremum for the Non-Convex Oriented Polygons Allocation Problem", European Journal of Operational Research, Vol. 92, No. 1, 1996.



황흥석(黃興錫)
 1963년 육군사관학교 이학사
 1979년 한국과학원 산업공학 석사
 1982년 한국과학기술원 산업공학 박사
 1986~87년 미국체계분석연구소(AM-SAA) 교환연구원
 1982~90년 국방과학연구소(ADD) 책임연구원
 현 재 동의대학교 산업공학과 교수
 관심분야 물류시스템, 공장계획, 무기체계분석, 및 프로젝트 관리

97년 5월 최초 접수, 97년 8월 최종 수정

*** Bidirectional Flow Plan of External Flow B1***

Arc	O(k)	T(k)	Flow	Capa.	Cost /Unit	Flow Cost
1	1	2	0	10	8	0
2	1	3	15	15	7	105
3	3	2	0	9	10	0
4	2	4	10	12	8	80
5	3	4	0	7	9	0
6	3	5	6	9	8	48
7	4	5	3	8	5	15
8	2	1	0	0	10	0
9	1	0	0	4	4	0
10	2	3	0	0	10	0
11	4	2	0	0	8	0
12	4	3	0	0	8	0
13	5	3	0	0	9	0
14	5	4	0	0	6	0

TOTAL COST = 248.00
 EXPECTED VALUE = 173.60

<부록 1> Sample Output

Example Run : 1997. 5. 10.

** Project Name :
 ABC Co. Material Flow Planning **
 External Flow :
 B1 = (15, 10, -9, -7, -9), Prob(B1) = 0.7
 B2 = (20, 6, -7, -16, -3), Prob(B2) = 0.3

*** Initial Plan ***

Arc	O(k)	T(k)	Flow	Capa.	Cost /Unit	Flow Cost
1	1	2	0	10	6	0
2	1	3	0	15	4	0
3	3	2	0	9	8	0
4	2	4	0	12	5	0
5	3	4	0	7	7	0
6	3	5	0	9	5	0
7	4	5	0	8	3	0
8	2	1	0	0	10	0
9	1	0	0	0	4	0
10	2	3	0	0	10	0
11	4	2	0	0	8	0
12	4	3	0	0	8	0
13	5	3	0	0	9	0
14	5	4	0	0	6	0

TOTAL COST = 0.00
 EXPECTED VALUE = 0.00

*** Bidirectional Flow Plan of External Flow B2 ***

Arc	O(k)	T(k)	Flow	Capa.	Cost /Unit	Flow Cost
1	1	2	5	10	8	40
2	1	3	15	15	7	105
3	3	2	1	9	10	10
4	2	4	12	12	8	96
5	3	4	4	7	9	36
6	3	5	3	9	8	24
7	4	5	0	8	5	0
8	2	1	0	0	10	0
9	3	1	0	4	4	0
10	2	3	0	0	10	0
11	4	2	0	0	8	0
12	4	3	0	0	8	0
13	5	3	0	0	9	0
14	5	4	0	0	6	0

TOTAL COST = 311.00
 EXPECTED VALUE = 93.30

** THE TOTAL COST = 266.90 **

*** Iteration 1:**

Arc Selected to Change : 6
 Min Gradient : -3
 Flow Change : 3
 Expected Total Cost : 257.90

* Iteration 2:
 Arc Selected to Change : 6
 Min Gradient : -3
 Flow Change : 0
 Expected Total Cost : 257.90

* Iteration 3:
 Arc Selected to Change : 4
 Min Gradient : -3
 Flow Change : 10
 Expected Total Cost : 227.90

* Iteration 4:
 Arc Selected to Change : 4
 Min Gradient : -3
 Flow Change : 0
 Expected Total Cost : 227.90

* Iteration 5:
 Arc Selected to Change : 2
 Min Gradient : -3
 Flow Change : 15
 Expected Total Cost : 182.90

* Iteration 6:
 Arc Selected to Change : 4
 Min Gradient : -7.5
 Flow Change : 0
 Expected Total Cost : 182.90

**** OPTIMAL SOLUTION ****

* Optimal Initial Material Flow Plan

Arc	O(k)	T(k)	Flow	Capa.	Cost /Unit	Flow Cost
1	1	2	0	10	6	0
2	1	3	15	15	4	60
3	3	2	0	9	8	0
4	2	4	10	12	5	50
5	3	4	0	7	7	0
6	3	5	3	9	5	15
7	4	5	0	8	3	0
8	2	1	0	0	10	0
9	3	1	0	0	4	0
10	2	3	0	0	10	0
11	4	2	0	0	8	0
12	4	3	0	0	8	0
13	5	3	0	0	9	0
14	5	4	0	0	6	0

TOTAL COST = 125

* Optimal Bidirectional Flow Plan of Flow B1

Arc	O(k)	T(k)	Flow	Capa.	Cost /Unit	Flow Cost
1	1	2	0	10	8	0
2	1	3	0	0	7	0
3	3	2	0	9	10	0
4	2	4	0	2	8	0
5	3	4	0	7	9	0
6	3	5	3	6	8	24
7	4	5	3	8	5	15
8	2	1	0	0	10	0
9	3	1	0	15	4	0
10	2	3	0	0	10	0
11	4	2	0	10	8	0
12	4	3	0	0	8	0
13	5	4	0	3	9	0
14	5	4	0	0	6	0

TOTAL COST = 39
 EXPECTED VALUE = 27.30

* Optimal Bidirectional Flow Plan of Flow B2

Arc	O(k)	T(k)	Flow	Capa.	Cost /Unit	Flow Cost
1	1	2	5	10	8	40
2	1	3	0	0	7	0
3	3	2	1	9	10	10
4	2	4	2	2	8	16
5	3	4	4	7	9	36
6	3	5	0	6	8	0
7	4	5	0	8	5	0
8	2	1	0	0	10	0
9	3	1	0	15	4	0
10	2	3	0	0	10	0
11	4	2	0	10	8	0
12	4	3	0	0	8	0
13	5	3	0	3	9	0
14	5	4	0	0	6	0

TOTAL COST = 102
 EXPECTED VALUE = 30.60

**** THE TOTAL COST = 182.90 ****

**** OPTIMAL FLOW PLAN ****

$$F^T = (0, 15, 0, 10, 0, 3, 0)$$

$$Y_1^T = (0, 0, 0, 0, 0, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$Y_2^T = (5, 0, 1, 2, 4, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$