

변온유입 성층축열조의 충전과정에 대한 해석적 접근

Analytical approaches to the charging process of stratified thermal storage tanks with variable inlet temperature

유 호 선*
Hoseon Yoo

Key words : Stratified thermal storage(성층축열), Variable inlet temperature(변온유입), Momentum-induced mixing(유입관성 유체혼합)

Abstract

This paper presents an approximate analytical solution to a two-region one-dimensional model for the charging process of stratified thermal storage tanks with variable inlet temperature in the presence of momentum-induced mixing. Based on the superposition principle, an arbitrary-varying inlet temperature is decomposed into inherent discontinuous steps and continuous intervals approximated as a finite number of piecewise linear functions. This approximation allows the temperature of the upper perfectly-mixed layer to be expressed in terms of constant, linear and exponential functions with respect to time. Applying the Laplace transform technique to the model equation for the lower thermocline layer subject to each of three representative interfacial conditions yields compact-form solutions, a linear combination of which constitutes the final temperature profile. A systematic method for deriving solutions to the plug-flow problem having polynomial-type boundary conditions is also established. The effect of adiabatic exit boundary on solution behaviors proves to be negligible under the actual working conditions, which justifies the assumption of semi-infinite domain introduced in the solution procedure. Finally, the approximate solution is validated by comparing it with an exact solution obtained for a specific variation of inlet temperature. Excellent agreements between them suffice to show the necessity and utility of this work.

기 호 설 명

a : 계수, 식(6)
 b : 구간선형함수의 기울기

Fo : Fourier수, $Fo = \tau\alpha/H^2$
 H : 축열조 충전깊이 또는 단위계단함수
 H_m : 완전혼합영역의 깊이
 H_p : 압출유동영역의 깊이
 h_m : 무차원 H_m (혼합깊이), H_m/H
 h_p : 무차원 H_p , H_p/H

* 정회원, 숭실대학교 기계공학과

K	: 선형변화의 수
m	: 다항식의 차수
N	: 계단변화의 수
n	: 여오차함수의 적분차수
Pe	: Peclet수, $Pe=UH/\alpha$
s, s'	: Laplace변수
T	: 온도
t	: 시간
U	: 축열조내 단면평균유속
u	: 무차원 단면평균유속, $u=Pe$
v	: 계수, 식(27)
x	: 압출유동영역내의 위치
x'	: 전체축열조내의 위치

그리스문자

α	: 축열유체의 열확산계수
η_1, η_2	: 식(25), (26)에서 정의된 변수
λ, λ'	: 가변수
ψ_1, ψ_2	: 식(36), (37)에서 정의된 변수
ϕ_1, ϕ_2	: 식(35), (39)에서 정의된 변수
τ	: 무차원시간. $\tau=Fo$
θ	: 무차원온도, $(T-T_0)/(T_i(0)-T_0)$
$\bar{\theta}$: Laplace변환된 θ
$\Delta\theta$: 입구온도의 계단변화폭
ξ, ξ'	: 무차원위치, $x/H, x'/H$
ζ	: 대표변수
ζ_1, ζ_2	: 식(19), (20)에서 정의된 변수

상첨자

c	: 일정온도 경계조건
e	: 지수함수 경계조건
l	: 선형함수 경계조건
q	: 이차함수 경계조건

하첨자

0	: 초기상태
ad	: 단열해

i	: 축열조 입구상태
j	: k 와 n 을 대표
k	: 입구온도의 구간선형변화
m	: 완전혼합영역
n	: 입구온도의 계단변화

1. 서 론

공기조화, 지역냉난방, 태양열 시스템 등에 이용되고 있는 현열축열조에 있어서 열성층은 축열성능에 가장 큰 영향을 미치는 요소중의 하나이다. 열성층 특성은 기본적으로 충전과정에서 결정되며, 충전과정동안 유입관성으로 인한 유체혼합(momentum-induced mixing)이 지배적인 성층 파괴인자라는 사실이 이미 규명되어 있다.⁽¹⁾ 따라서 성층축열조의 설계를 위한 성능예측에 있어서도 유체혼합을 비롯하여 충전과정에 수반되는 과도적인 현상이 타당하게 고려된 모델에 대한 해석이 필요하다. 실제 다양한 형태의 해석모델이 제안되어 왔으며, 각각의 개념 및 특징에 관해서는 Hollands와 Lightstone,⁽²⁾ Zurigat등⁽³⁾이 포괄적으로 개관한 바 있다.

기존의 모델을 해석방법의 관점에서 재고찰할 때, 명확히 검증되지 않은 경험적 인자를 도입하여 해석해를 모색한 경우도 있으나, 대부분은 수치해석에 의존하고 있다.⁽³⁾ 사실 유체혼합과 같은 복잡한 현상이 고려된 모델에 대한 해석적 접근은 용이하지 않기 때문이다. 그러나, 성층 파괴인자를 포함하되 적절히 단순화된 모델에 대하여 해석해가 존재한다면, 그 해는 적용이 편리할 뿐 아니라 성층 축열에 관한 이론적 기초를 확립하는 데도 기여할 것이다. 잘 알려진 Cabelli의 해⁽⁴⁾는 극히 이상화된 모델에 대한 불완전한 해임에도 불구하고 다수의 문헌에 인용되고 있는 사실이 해석해의 중요성을 입증한다. 이와 관련하여, 최근 저자는 일련의 연구^{(5)~(9)}에서 축열조의 충전과정에 대한 새로운 모델을 개발하고, 해석적 접근에 수반되는 수학적 난점을 해결하였으며, 물리적으로 의미있는 다수의 해석해를 성공적으로 유도한 바 있다. 특히 특정한 모델에 대한 해석해⁽⁶⁾는 가용한 실험자료와의 비교를 통하여 그 유용성이 구체적으로 확인된 바 있다. 다만 이러한 연구는 입구온도가 일정한

조건에 국한된 것이므로 그 결과의 적용에는 제한이 따른다. 실제 많은 성능축열조에서 충전과정동안 입구온도가 일정하지 않음을 감안하면,^{(10),(11)} 해석해의 열적 거동 예측능력을 확대하기 위해서는 입구온도가 변화하는 경우까지 포함한 해석이 요구된다.

이와같은 배경에서 본 연구는 충전과정의 유체혼합이 고려된 2영역 1차원모델^{(8),(12)}을 대상으로 입구온도가 변화하는 경우에 대한 근사적 해석해를 도출하고자 시도되었다. 중첩의 원리에 근거하여 불규칙한 형태의 입구온도를 연속 및 불연속적 변화로 구분하고, 연속적인 변화를 유한한 수의 구간 선형함수로 근사화하는 방법으로 접근한다. 이에 따라 최종해 즉 변온유입에 대한 축열조의 과도응답은 기발표된 해석해^{(5)~(9),(12)} 및 추가적으로 유도될 해의 일차결합 형태로 표시될 수 있다. 이 과정에서 다항식 형태의 입구조건에 대한 일반화된 해석방법을 개발함은 물론 해석대상을 단일 출구경계를 갖는 유한영역과 단순화된 반무한영역으로 취급할 때 해의 차이를 구체적으로 검토한다. 접근방법의 타당성 및 유용성은 입구온도가 특정하게 변화하는 경우에 존재하는 엄밀해와 대응하는 근사해의 비교를 통하여 확인될 것이다.

2. 해석모델 및 근사화

2.1 2영역 1차원모델

본 연구의 해석대상은 Fig.1과 같이 상부에 입구, 하부에 출구가 고정되어 있으며, 초기에는 온도 T_0 인 유체가 균일한 상태로 높이 H 까지 채워져 있는 전형적인 성능축열조이다. 충전이 시작되면 온도 $T_i(t)$ 인 고온유체가 입구로부터 유입됨과 동시에 축열조내 유체는 차례로 출구를 통하여 유출된다. 충전과정동안 유체의 유량(또는 단면평균유속 U)은 일정하며, 축열조는 잘 단열되어 외부로의 열손실은 없다.

유입관성에 의한 유체혼합 현상을 해석에 고려하기 위하여 입구가 위치한 축열조의 상부에 온도가 균일하고 깊이가 일정한 유체층이 형성된다고 가정한다(Fig.1 참조). 따라서 축열조는 깊이 H_m 인 완전혼합영역(perfectly mixed region)과 깊이 H_p 인 압출유동영역(plug flow region or thermocline)으로 구분될 수 있다. 유동에 대한 벽면의 경계효과, 벽면을 통한 열전도에 의한 자연대류 등 다차원 현상은 열적 거동에 대한 기여가 크지 않으므로 충전과정은 1차원적으로 취급될 수 있다.^{(2),(3)} 유체혼합의 정도는 분배기와 같은 입구형상 또는 유량과 같은 유입조건에 따라 차이는 있으나, 완전혼합 유체층의 존재와 충전과정동안 그 깊이의 변화가 크지 않다는 사실은 이미 실험적으로 규명된 바 있다.^{(13)~(15)} 이러한 2영역 1차원모델의 유용성은 입구온도가 일정한 경우에 대한 선행연구⁽⁵⁾에서 확인된 바 있으며, 유사한 모델이 수치해석^{(10),(16)}에 사용되고 있다는 점도 이를 뒷받침한다.

충전과정동안 완전혼합영역의 온도 $T_m(t)$ 은 입구 온도 $T_i(t)$ 만에 의해 결정되며, 압출유동영역의 온도 $T(x, t)$ 는 2영역사이의 계면조건 $T(0, t) = T_m(t)$ 을 만족하면서 영역내의 위치 및 시간에 따라 변화한다. 이상적인 분배기 또는 저유량을 채용하여 유체혼합이 완전히 억제되었다면 ($H_m=0$) 당연히 $T_m(t) = T_i(t)$ 이다. 결과적으로 해석은 먼저 $T_m(t)$ 를 구하고 이를 경계조건으로 한 온도분포 $T(x, t)$ 를 유도하는 것이다.

이후의 내용에서는 기호설명에 정의된 무차원 변

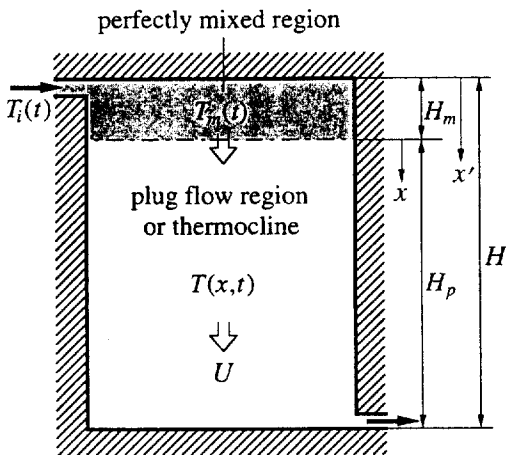


Fig.1 Schematic of the present two-region one-dimensional model.

수 및 인자를 사용한다.

2.2 구간선형근사

축열조 입구온도의 변화는 열원의 종류, 운전방법 등에 따라 상이하며 일반적으로 특정한 함수의 형태는 아니다. 본 연구에서는 열적으로 안정한 성층이 유지되도록 입구온도가 시간에 따라 상승하는 경우로 국한하되 불연속적인 변화(계단변화)를 포함한다. 따라서 임의의 입구온도는 Fig.2와 같이 변화한다. 연속 및 불연속적 변화에 대한 축열조의 과도응답에는 차이가 있으므로 각각은 별개로 취급되어야 한다. 불연속적인 경우, 변화가 일어나는 시간 τ_n 및 온도변화의 폭 $\Delta\theta_n$ 에 따라 축열조내의 열적 거동에 대한 입구온도의 영향은 Fig.2의 음영부분으로 표시되며, 수학적으로 비교적 쉽게 처리될 수 있다. 이에 비하여 연속적인 경우, 해석적 접근이 가능하기 위해서는 임의의 변화를 유한한 수의 구간으로 적절히 구분하고 구간내의 변화를 선형화할 필요가 있다. 이때 입구온도가 열적 거동에 미치는 영향은 Fig.3의 음영부분이 된다.

이러한 근사화에 따라 임의의 입구온도 변화는 다음과 같이 K 개의 선형변화구간 및 N 개의 계단 변화의 합으로 표시될 수 있다.

$$\theta_i(\tau) \cong \sum_{k=1}^K b_k [(\tau - \tau_{k-1})H(\tau - \tau_{k-1}) - (\tau - \tau_k)H(\tau - \tau_k)] + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta\theta_n H(\tau - \tau_n) \quad (1)$$

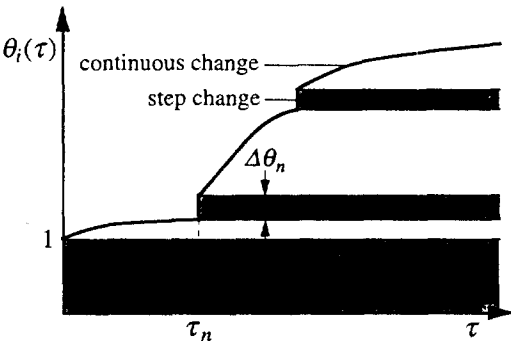


Fig.2 Typical variation pattern of the inlet temperature and contribution of the step change to thermal behaviors in the tank.

여기서 $H(\tau - \tau_n)$ 는

$$H(\tau - \tau_n) = 0 \text{ for } \tau < \tau_n, \quad (2)$$

$$H(\tau - \tau_n) = 1 \text{ for } \tau > \tau_n, \quad (3)$$

로 정의되는 단위계단함수(Heaviside's unit function)이다. 또한 무차원온도의 정의에 의해 $\Delta\theta_0 = 1$ 이며, $\tau_0 = 0$ 이다. 식(1)의 우변 제1급수항은 선형화된 입구온도가 열적 거동에 미치는 영향을 정해진 구간내로 국한시키는 수학적 표현으로서 비선형 함수의 경우 이러한 접근은 당연히 불가능하다.

3. 과도 온도분포

3.1 완전혼합영역

입구온도의 변화에 대응하는 완전혼합영역의 과도온도 $\theta_m(\tau)$ 는 무차원화된 방정식 및 초기조건

$$\frac{d\theta_m(\tau)}{d\tau} = a[\theta_i(\tau) - \theta_m(\tau)] \quad (4)$$

$$\theta_m(0) = 0 \quad (5)$$

에 의해 결정된다.^{(8),(12)} 식(4)에서 계수 a 는 다음과 같이 정의된다.

$$a = u/h_m \quad (6)$$

식(4), (5)의 해는 임의의 입구온도에 대하여

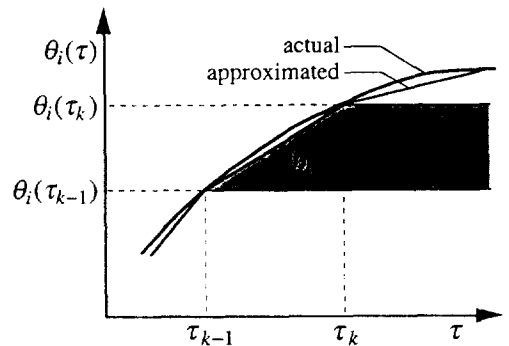


Fig.3 Piecewise linear approximation for the continuously changing interval of inlet temperature and its contribution to thermal behaviors in the tank.

$$\theta_m(\tau) = a \cdot e^{-a\tau} \int_0^\tau e^{a\lambda} \theta_i(\lambda) d\lambda \quad (7)$$

이므로 입구온도가 식(1)일 때 대응하는 $\theta_m(\tau)$ 은

$$\begin{aligned} \theta_m(\tau) = & \sum_{k=1}^K b_k \{ (\tau - \tau_{k-1}) - [1 - e^{-a(\tau - \tau_{k-1})}] / a \} \\ & H(\tau - \tau_{k-1}) - \sum_{k=1}^K b_k \{ (\tau - \tau_k) \\ & - [1 - e^{-a(\tau - \tau_k)}] / a \} H(\tau - \tau_k) \\ & + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta\theta_n [1 - e^{-a(\tau - \tau_n)}] / H(\tau - \tau_n) \quad (8) \end{aligned}$$

가 된다. 유체혼합이 없는 경우 ($h_m=0$) 식 (6)으로부터 $a=\infty$ 이므로 식(8)은 식(1)로 귀결된다. 즉 식(8)은 유체혼합의 유무에 무관하게 성립한다.

3.2 압출유동영역

3.2.1 지배방정식 및 경계조건

압출유동에 대한 무차원화된 지배방정식은 잘 알려진 바와 같이

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \quad (9)$$

이며,⁽⁵⁾ 초기조건 및 2영역의 계면에서 경계조건은 각각 다음과 같다.

$$\theta(\xi, 0) = 0 \quad (10)$$

$$\theta(0, \tau) = \theta_m(\tau) \quad (11)$$

출구경계조건은, 축열조를 Cabelli⁽⁴⁾와 같이 반무한 영역으로 단순화하여

$$\theta(\infty, \tau) = 0 \quad (12)$$

를 적용하거나, 유한한 영역으로 취급하고 단열조건

$$\frac{\partial \theta(h_m \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad (13)$$

을 부여할 수도 있다.^{(9),(12)} 전자는 해석이 용이한 반면 후자는 실제상태에 보다 근접한 조건이다. 편의상 양자에 대응하는 해를 각각 반무한해 및 단열

해로 지칭하기로 한다. 실제 축열조의 운전조건하에서 이들 해사이의 정량적 차이는 충분히 무시될 수 있을 만큼 작기 때문에(후술될 부록B 참조) 본 연구는 기본적으로 반무한 경계조건 식(12)를 대상으로 수행되었다. 그러나 입구온도 변화에 대한 접근방법은 출구경계조건과는 무관하기 때문에 필요시 반무한해는 대응하는 단열해로 대체될 수 있다. 이점에 관해서는 다음절에서 구체적으로 취급될 것이다.

지배방정식 식(9)는 선형이고 체차(homogeneous)이므로 계면조건(즉 압출유동영역의 입구경계조건) 식(11)은 $\theta_m(\tau)$ 을 구성하는 각 항에 대응하는 해를 중첩시킴으로써 만족될 수 있다. 식(8)에서 $\theta_m(\tau)$ 은 상수, 선형함수 및 지수함수를 τ 에 대하여 평행이동시킨 항들로 구성되므로, 적어도

$$\theta(0, \tau) = 1 \quad (14)$$

$$\theta(0, \tau) = \tau \quad (15)$$

$$\theta(0, \tau) = e^{-a\tau} \quad (16)$$

로 대표되는 3종류의 계면조건 각각에 대하여 초기조건 식(10) 및 출구경계조건 식(12)를 만족시키는 식(9)의 해(각각 상첨자 c, e, l로 표기)가 구해져야 한다. 최종해 즉 압출유동영역의 온도분포는 이들의 적절한 일차결합으로 표시된다.

3.2.2 각 계면조건에 대한 해

계면조건이 식(14)로 표시된 상수인 경우에 대한 해는 Laplace변환방법에 의해 체계적으로 유도된 바 있다.⁽⁵⁾ 본 연구에서는 이 해석방법을 보다 일반화하여 계면조건이 시간에 대하여 다항식 형태인 경우까지 확장하였으며, 그 구체적인 내용은 부록 A에 수록되어 있다. 부록 A로부터 식(14) 및 (15)에 대응하는 해는 각각

$$\theta^c(\xi, \tau) = [\text{erfc}(\xi_1) + e^{u\xi} \text{erfc}(\xi_2)] / 2 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \theta^e(\xi, \tau) = & [(\tau - \xi/u) \text{erfc}(\xi_1) \\ & + (\tau + \xi/u) e^{u\xi} \text{erfc}(\xi_2)] / 2 \quad (18) \end{aligned}$$

로서, 도입된 변수 ξ_1, ξ_2 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\zeta_1 = (\xi - u\tau) / \sqrt{4\tau} \quad (19)$$

$$\zeta_2 = (\xi + u\tau) / \sqrt{4\tau} \quad (20)$$

또한 여오차함수(complementary error function)사이의 관계⁽¹⁷⁾

$$\text{ierfc}(\zeta) = \frac{e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} - \zeta \cdot \text{erfc}(\zeta) \quad (21)$$

$$2n \cdot i^n \text{erfc}(\zeta) = i^{n-2} \text{erfc}(\zeta) - 2\zeta \cdot i^{n-1} \text{erfc}(\zeta) \quad (22)$$

를 이용하면 식(18)은 다른 형태로 표현될 수도 있다.

$$\theta(\xi, \tau) = (u\sqrt{4\tau})[\text{ierfc}(\zeta_1) - e^{\xi^2} \text{ierfc}(\zeta_2)] / (2u^2) \quad (23)$$

여기서, $i^n \text{erfc}(\zeta)$ 는 여오차함수의 n 차 적분함수이다.

계면조건이 식(16)의 지수함수인 경우도 역변환시 차이가 있을 뿐 해석방법은 부록 A에 포함된 상수인 경우와 유사하므로⁽⁸⁾ 구체적인 유도과정은 생략하고 결과만을 게재하였다.

$$\theta(\xi, \tau) = e^{-a\tau} [e^{(u-v)\xi/2} \text{erfc}(\eta_1) + e^{(u+v)\xi/2} \text{erfc}(\eta_2)] / 2 \quad (24)$$

식(24)에 포함된 변수와 계수는 각각 다음식으로 정의된다.

$$\eta_1 = (\xi - v\tau) / \sqrt{4\tau} \quad (25)$$

$$\eta_2 = (\xi + v\tau) / \sqrt{4\tau} \quad (26)$$

$$v = 2[(u/2)^2 - a]^{1/2} \quad (27)$$

식(27)은 $(u/2)^2 \geq a$ 인 조건하에서 성립하지만, 실제 축열조의 충전과정은 이 조건을 충분히 만족시킨다.

3.2.3 압출유동영역의 온도분포

이상에서 식(14)~(16)으로 표시된 각 계면조건에 대한 해 식(17), (18) 또는 (23) 및 (24)를 확립하였다. 식(8)을 구성하는 각 항과 같이 계면조건이 τ 에 대하여 평행이동된 형태일 때 대응하는 해는 Duhamel의 정리⁽¹⁷⁾

$$\theta(\xi, \tau) = \int_0^\tau \theta(0, \lambda) \frac{\partial}{\partial \tau} \theta(\xi, \tau - \lambda) d\lambda \quad (28)$$

로부터 쉽게 결정될 수 있다. 하나의 예로서 계면조건이

$$\theta(0, \tau) = e^{-a(\tau - \tau_k)} H(\tau - \tau_k) \quad (29)$$

인 경우를 고려하자. 식(29)를 식(28)에 대입하고 적분변수를 $\lambda' = \lambda - \tau_k$ 로 변환하면

$$\theta(\xi, \tau) = \int_0^{\tau - \tau_k} e^{-a\lambda'} \frac{\partial}{\partial \tau} \theta[\xi, (\tau - \tau_k) - \lambda'] d\lambda' \quad (30)$$

이다. 식(28), (30)의 λ, λ' 은 가변수(dummy variable)임을 감안하면, 식(30)은 식(28)의 τ 만이 $(\tau - \tau_k)$ 로 대체되었을 뿐 피적분함수는 식(16)을 식(28)에 대입한 형태이다. 식(24)는 다른 방법으로 유도되었으나 식(16)을 식(28)에 대입하여 적분을 수행한 결과와 동등하므로 식(30)은 결국

$$\theta(\xi, \tau) = \theta^*(\xi, \tau - \tau_k) H(\tau - \tau_k) \quad (31)$$

로 귀결된다.

다른 계면조건에 대해서도 같은 원리가 적용될 수 있기 때문에 식(8)에 대응하는 압출유동영역의 최종 온도분포는 다음식과 같이 식(17), (18) 또는 (23) 및 (24)의 일차결합으로 표시된다.

$$\begin{aligned} \theta(\xi, \tau) = & \sum_{k=1}^K b_k [\theta^*(\xi, \tau - \tau_{k-1}) - [\theta^*(\xi, \tau - \tau_{k-1}) \\ & - \theta^*(\xi, \tau - \tau_{k-1})] / a] H(\tau - \tau_{k-1}) \\ & - \sum_{k=1}^K b_k [\theta^*(\xi, \tau - \tau_k) - [\theta^*(\xi, \tau - \tau_k) \\ & - \theta^*(\xi, \tau - \tau_k)] / a] H(\tau - \tau_k) \\ & + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta \theta_n [\theta^*(\xi, \tau - \tau_n) - \theta^*(\xi, \tau - \tau_n)] \\ & H(\tau - \tau_n) \end{aligned} \quad (32)$$

이에 따라 축열조전체에 대한 근사해는, $\xi = \xi + h_m$ 로 정의할 때(Fig.1 참조), $\xi \leq h_m$ 에서는 식(8), $h_m < \xi \leq 1$ 에서는 식(32)가 된다.

3.3 단열해

전술하였듯이 식(17), (18) 또는 (23) 및 (24)로 표시된 각 계면조건에 대한 해석해는 출구경계조건 식(12)를 적용하여 유도된 반무한해이다. 식(12) 대신 식(13)을 적용하면 단순한 경계조건의 차이뿐 아니라 해석영역이 상이하기 때문에 그 해석방법은 부록 A를 비롯한 반무한해의 경우와는 본질적인 차이가 있다.^{(7), (9), (12)} 여기서는 반무한 경계조건을 채택한 타당성을 검토하고 필요시 반무한해를 대체할 수 있도록 각 계면조건에 대한 단열해를 제시하고자 한다.

단열해를 하첨자 ad로 표기할 때 상수 및 지수 함수 계면조건에 대한 해는 선행연구^{(9), (12)}에서 이미 다음과 같이 알려져 있다.

$$\theta_{ad}(\xi, \tau) = \theta^*(\xi, \tau) + e^{uh} [\operatorname{erfc}(\phi_1) - (u\sqrt{4\tau}) \operatorname{ierfc}(\phi_1)/2] \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \theta_{ad}(\xi, \tau) = & \theta^*(\xi, \tau) + u^2 e^{uh} \operatorname{erfc}(\phi_1)/2\alpha \\ & + \frac{e^{-a\tau}}{2} \left[\left(\frac{v-u}{v+u} \right) e^{(u+v)\xi/2 - uh} \operatorname{erfc}(\psi_1) \right. \\ & \left. + \left(\frac{v+u}{v-u} \right) e^{(u-v)\xi/2 + uh} \operatorname{erfc}(\psi_2) \right] \quad (34) \end{aligned}$$

여기서,

$$\phi_1 = (2h_p - \xi + u\tau)/\sqrt{4\tau} \quad (35)$$

$$\phi_1 = (2h_p - \xi - v\tau)/\sqrt{4\tau} \quad (36)$$

$$\phi_2 = (2h_p - \xi + v\tau)/\sqrt{4\tau} \quad (37)$$

로 정의된다. 또한 해의 완결성을 위하여 계면조건이 선형함수인 경우에 대한 단열해를 추가적으로 유도하였다. 기본적인 해석방법은 식(33), (34)의 경우와 같지만 매우 복잡한 수학적 연산이 수반되는 해석과정은 생략하고 아래의 결과만을 게재하였다.

$$\begin{aligned} \theta_{ad}(\xi, \tau) = & \theta^*(\xi, \tau) + e^{uh} \left[- (u\sqrt{4\tau}) \operatorname{ierfc}(\phi_1) \right. \\ & \left. + (u\sqrt{4\tau})^2 \operatorname{ierfc}(\phi_1) \right] / (2u^2) \\ & + [e^{-u(h_p - \xi)} \operatorname{erfc}(\phi_2) - e^{uh} \operatorname{erfc}(\phi_1)] / (2u^2) \quad (38) \end{aligned}$$

식(38)에 포함된 변수 ϕ_2 는 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_2 = (2h_p - \xi - u\tau)/\sqrt{4\tau} \quad (39)$$

식(34), (35) 및 (38)로 표시된 단열해는 공통적으로 대응하는 반무한해를 포함하며 외견상 양자 사이에는 상당한 차이가 있는 것처럼 보인다. 그러나 단열해에 나타난 추가적인 항들은 실제 축열조의 운전조건하에서 그 정량적인 크기는 대단히 작기 때문에 양자는 거의 일치한다. 구체적인 비교는 부록 B에서 취급하였다. 즉 식(8) 및 (32)로 표시된 근사해는 출구경계조건에 관한 한 타당하다고 판단된다. 만일 어떤 이유로 반무한해가 아닌 단열해가 필요하다면 단순히 식(32)에 포함된 θ^* , θ' 및 θ'' 를 식(34), (35) 및 (38)로 대체하면 된다.

4. 근사해의 타당성 및 적용예

본 연구에서 제시된 접근방법의 타당성 및 유용성을 검증하기 위하여 특정한 경우에 적용하여 계산을 수행하였다. 다만 지금까지 발표된 변온유입 성능축열조에 대한 실험자료⁽¹¹⁾는 본 연구와 직접적으로 비교하기 곤란한 형태이기 때문에 적용대상은 엄밀해가 존재하는 경우로 국한하였다. 사실 근사해를 자료의 획득 및 처리과정에 불확실성이 내포될 수 있는 실험결과보다는 엄밀해와 비교하는

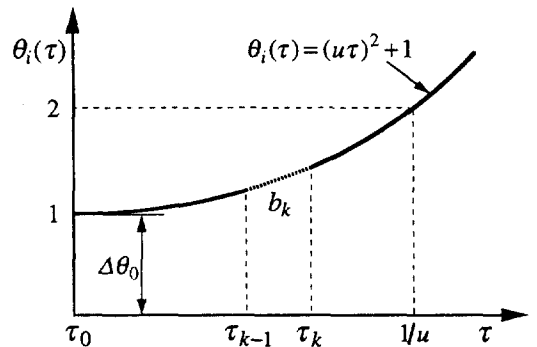


Fig.4 An example of variable inlet temperature : a quadratic function with respect to time.

것이 이론적으로는 보다 바람직하다.

구체적인 적용예로서 Fig.4에 도시되었듯이 입구온도가

$$\theta_m(\tau) = 1 + (u\tau)^2 \quad (40)$$

와 같이 시간의 이차함수형태로 변화하는 경우를 고려하자. 여기서 $u\tau (= Pe \cdot Fo)$ 는 규준화된 충전 시간을 나타낸다.^{(5),(9)} 먼저 이에 대한 엄밀해를 유도하기 위하여 식(40)을 식(7)에 대입하면 완전 혼합영역의 과도온도는

$$\theta_m(\tau) = (1 + 2u^2/a^2)(1 - e^{-a\tau}) - 2u^2\tau/a + (u\tau)^2 \quad (41)$$

로 결정된다. 계면조건이 식(41)과 같이 상수, 지수함수, 선형함수 및 이차함수의 일차결합이므로 각각에 대응하는 압출유동영역의 해는 식(17), (18) 또는 (23), (24) 및 (A9)이다. 따라서 입구온도가 식(40)일 때 압출유동영역에 대한 엄밀해는 다음 식으로 표시된다.

$$\theta(\xi, \tau) = (1 + 2u^2/a^2)[\theta^*(\xi, \tau) - \theta^*(\xi, \tau)] - (2u^2/a)\theta^*(\xi, \tau) + u^2\theta^*(\xi, \tau) \quad (42)$$

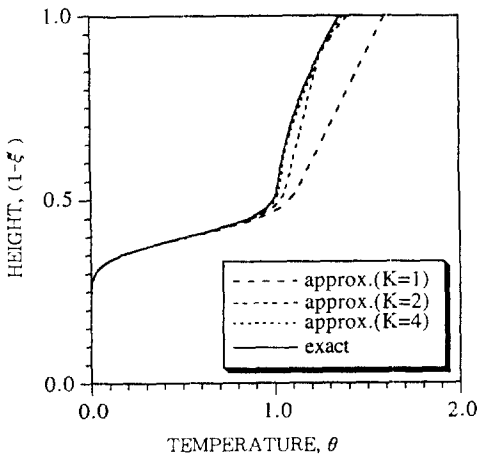


Fig.5 Comparison of the vertical temperature profiles between the exact and approximate solutions of different degrees at $Pe \cdot Fo = 0.6$ for $h_m = 0$ and $Pe = 500$.

엄밀해 식(41) 및 (42)와 근사해 식(8) 및 (32)를 비교함에 있어서 계단변화는 하나 ($N=1$)이며 1회 충전시간동안($0 \leq u\tau \leq 1$)의 선형근사 구간수는 등간격으로 $K=1, 2, 4$ 인 3경우를 취급하였다. 비교의 목적이 특정인자의 효과를 고찰하기 위함은 아니지만, 근사해가 광범위하게 적용가능함을 보이고자 입구온도가 일정할 때의 연구결과⁽⁹⁾를 참조하여, 축열조의 열적 거동에 지배적인 영향을 미치는 혼합깊이(h_m)의 변화는 고려하였으며 영향이 별무한 것으로 알려진 Pe 수는 500으로 고정하였다. 계산결과는 이해의 편의를 위하여 전체 축열조내의 위치 ξ 의 함으로 도시하였다.

충전시작후 일정시간($Pe \cdot Fo = 0.6$)이 경과하였을 때 혼합깊이가 0(유체혼합이 없음) 및 0.2인 경우에 대하여 엄밀해와 근사해에 의한 축열조내 온도분포를 비교한 것이 Fig.5 및 6이다. 혼합깊이에 무관하게 구간수가 증가하면 근사해는 엄밀해로 급속히 접근한다. 입구온도가 이차함수인 본 적용예의 경우 2개 구간만으로 근사하여도 비교적 양호한 결과를 보이며 4개 구간으로 증가시키면 근사해는 엄밀해와 거의 일치한다. 여기서 구간수가 증가할수록 양자의 일치도는 더욱 향상되며 다른

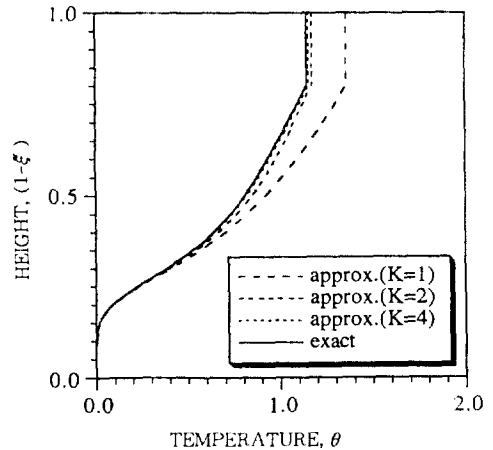


Fig.6 Comparison of the vertical temperature profiles between the exact and approximate solutions of different degrees at $Pe \cdot Fo = 0.6$ for $h_m = 0.2$ and $Pe = 500$.

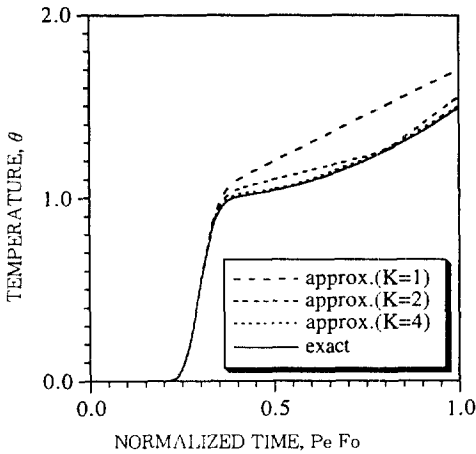


Fig.7 Comparison of the transient temperature responses between the exact and approximate solutions of different degrees at $\xi = 0.3$ for $h_m = 0$ and $Pe = 500$.

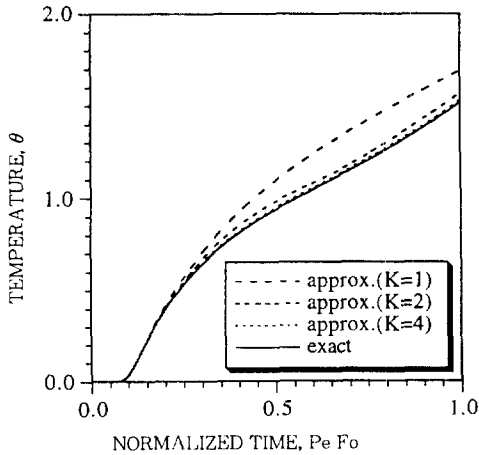


Fig.8 Comparison of the transient temperature responses between the exact and approximate solutions of different degrees at $\xi = 0.3$ for $h_m = 0.2$ and $Pe = 500$.

형태의 입구온도변화에 대해서도 같은 경향을 보이리라는 사실은 쉽게 예측될 수 있다. 이러한 비교 결과는 축열조내 일정위치($\xi = 0.3$)에서 시간에 따른 온도의 변화를 $h_m = 0$ 및 0.2에 대하여 각각 도시한 Fig.7과 8에서도 유사하다. 또한 Fig.5와

6, Fig.7과 8에서 혼합깊이의 차이는 이미 알려져 있듯이⁽⁶⁾ 온도분포 자체에는 상당한 변화를 초래하지만 근사해와 엄밀해사이의 오차에는 큰 영향을 미치지 않는다. 즉 구간수 K 가 같을 때 혼합깊이가 클수록 오차는 약간 감소할 뿐이다. 한편 Fig.5~8에서 일관되게 근사해가 엄밀해보다 과대예측하는 것은 시간에 따라 상승율이 증가하는 식(40)의 함수특성에 기인하며 그 역도 성립한다.

이상의 비교로부터 본 연구에서 제시된 근사해의 타당성은 충분히 확인될 수 있다. 이 타당성은 유체혼합의 유무에 무관하게 임의의 입구온도변화에 대한 축열조내의 거동은 입구온도의 변화형태에 따라 결정된 적실한 수의 구간선형 및 계단함수의 조합을 통하여 원하는 오차범위내에서 예측될 수 있음을 의미한다. 더욱이 잘 정의된 함수의 항으로 표시된 해석해의 일차결합인 근사해는 수치해석에 비하여 그 적용 및 계산이 현저히 용이하기 때문에 향후 변온유입 성능축열조의 충전과정 예측에 매우 유용하리라 기대된다.

5. 결 론

입구온도가 변화하는 성능축열조에서 충전과정 동안의 과도적인 열적 거동을 예측하기 위하여 유입관상에 의한 유체혼합이 고려된 2영역 1차원모델에 대하여 해석적 접근을 시도하였다. 임의의 입구온도를 연속 및 불연속적 변화로 구분하고 연속적인 변화를 구간선형함수로 근사화하였다. 선형화된 입구온도로부터 완전혼합영역의 과도온도를 결정된 후 이에 대응하는 압출유동영역의 온도분포를 해석하였다. 이와같은 방법으로 수행된 본 연구의 결과는 다음과 같이 요약될 수 있다.

완전혼합영역의 과도온도는 시간에 대하여 평행이동된 상수, 선형함수 및 지수함수의 조합으로 표시되며 유체혼합의 유무에 무관하게 적용될 수 있다. 반무한 경계조건이 적용된 압출유동영역에 대하여 계면조건이 상수, 선형함수 및 지수함수일 때 각각에 대응하는 해석해를 잘 정의된 여오차함수의 항으로 유도하였다. 중첩의 원리에 따라 압출유동영역의 과도 온도분포는 이들 해의 일차결합으로

결정된다. 이 해석과정에서 입구경계조건이 시간의 다항식 형태인 경우 압출유동영역에 대한 일반화된 해석방법을 확립하였다. 출구경계조건에 따른 해의 차이를 고찰하고 필요시 반무한해를 대체할 수 있도록 각 계면조건에 대한 단열해를 제시하였으며, 실제 축열조의 운전조건하에서 반무한 경계조건이 유효함을 구체적으로 확인하였다.

근사적 접근방법의 타당성 및 유용성을 검증하기 위하여 입구온도가 시간의 이차함수인 경우에 대한 엄밀해를 유도하여 근사해를 비교하였다. 비교적 넓은 범위의 혼합깊이에 대하여 선형근사 구간수의 증가에 따라 근사해는 엄밀해로 급속히 접근하며 소수의 구간수로도 양자는 양호하게 일치한다. 이러한 예측능력의 바탕위에 수학적 연산과 적용이 용이한 해석해의 특성을 고려할 때 본 근사해는 입구온도가 임의로 변화하는 성층축열조의 충전과정 해석시 이론적 기초로서는 물론 실용적으로도 기여할 수 있을 것이다.

부록 A : 경계조건이 다항식인 경우에 대한 해

이 부록에서는 식(9)에 의해 지배되는 압출유동 영역의 초기조건이 식(10), 출구 경계조건이 식(12)일 때 입구경계조건이 시간 τ 의 다항식 형태로 변화하는 경우에 대한 일반화된 해석방법을 제시하고자 한다.

입구경계조건이 시간의 m 차함수 ($m \geq 0$)

$$\theta(0, \tau) = \tau^m \quad (A1)$$

인 경우를 고려하자. 식(9)를 Laplace 변환한 후 초기조건 식(10)을 대입하면 다음의 보조방정식 (subsidiary equation)을 얻는다.

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{d\xi^2} - u \frac{d\bar{\theta}}{d\xi} - s\bar{\theta} = 0 \quad (A2)$$

식(A2)의 해를 구하고 경계조건 즉 식(A1) 및 (12)의 Laplace 변환된 형태를 적용하면 s -영역에서의 해는

$$\bar{\theta}(\xi, s) = m! e^{u\xi/2} \cdot e^{-[(u/2)^2 + s]^{1/2} \xi} / s^{m+1} \quad (A3)$$

로 결정된다. 식(A3)의 역변환을 구하기 위하여 역변환정리⁽¹⁷⁾에 대입하고 Yoo와 Pak^{(5), (9)}에 의해 제시된 적분변수변환을 수행하면 다음식으로 귀결된다.

$$\theta(\xi, \tau) = m! e^{u\xi/2 - (u/2)\tau} \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s} \xi} / [s' - (u/2)^2]^{m+1}\} \quad (A4)$$

여기서, 변환된 Laplace 변수는 다음과 같이 정의된다.

$$s' = s + (u/2)^2 \quad (A5)$$

역변환표⁽¹⁷⁾로부터

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s'} \xi} / [s' - (u/2)^2]\} = e^{-u\xi/2 + (u/2)\tau} [\operatorname{erfc}(\zeta_1) + e^{u\xi} \operatorname{erfc}(\zeta_2)] / 2 \quad (A6)$$

이므로 $m=0$ (상수)인 경우 식(A4)는 식(17)로 정리된다. 이에 비하여 $m \geq 1$ 이면 식(A4) 우변의 역변환을 구하기 위해서는 식(A6) 및

$$\mathcal{L}^{-1}\{[s' - (u/2)^2]^{-m}\} = \tau^{m-1} e^{(u/2)\tau} / (m-1)! \quad (A7)$$

에 기초하여 내함정리(convolution theorem)를 도입하여야 한다. 그 결과 식(A4)는

$$\theta(\xi, \tau) = \frac{m}{2} \int_0^\tau (\tau - \lambda)^{m-1} [\operatorname{erfc}(\zeta_1) + e^{u\xi} \operatorname{erfc}(\zeta_2)] d\lambda \quad (A8)$$

로 재정리될 수 있다. 식(A8)에서 피적분함수에 포함된 ζ_1, ζ_2 는 식(19), (20)의 τ 대신 적분변수 λ 의 함수임에 유의하여야 한다.

식(A8)의 적분은 $m=1$ (선형함수)인 경우 비교적 쉽게 수행될 수 있으며 식(18)이 된다. 반면 $m \geq 2$ 인 경우 적분과정에는 상당한 수학적 연산이 필요하다. 본 연구에서는 구간선형근사에 의한 해석결과의 검증을 위하여 $m=2$ 즉 입구경계조건이 시간의 이차함수인 경우에 국한하여 대응하는 해(상첨자 q로 표기)를 다음과 같이 구하였다.

$$\theta^q(\xi, \tau) = \{(u\sqrt{4\tau})[-\operatorname{ierfc}(\zeta_1) + e^{u\xi} \operatorname{ierfc}(\zeta_2)] + (u\sqrt{4\tau})^2 [i^2 \operatorname{erfc}(\zeta_1) + e^{u\xi} i^2 \operatorname{erfc}(\zeta_2)]\} / u^4 \quad (A9)$$

만일 필요하다면 $m \geq 3$ 에 대한 해도 이론적으로는 여오차함수의 적분함수의 항으로 유도될 수 있을 것으로 보이나 그 과정이 대단히 복잡하리라 예상되기 때문에 구체적인 결과는 제시하지 않았다.

부록 B : 반무한해와 단열해의 비교

상이한 3개의 계면조건중에서 상수인 경우가 반무한해와 단열해사이의 차이를 비교하기에 가장 편리하다. 일차함수 및 지수함수인 경우 양자의 차이는 시간에 대한 기울기 즉 온도의 증가 또는 감소율에 따라 변화하기 때문이다.

식(33)에서 자명하듯이 반무한해와 단열해의 차이는

$$\Delta\theta(\xi, \tau) = e^{u\tau} [\operatorname{erfc}(\phi) - (u\sqrt{4\tau}) \operatorname{ierfc}(\phi)] / 2 \tag{B1}$$

이다. 여오차함수의 변수에 따른 거동을 고려하면 $\Delta\theta$ 는 $\xi = h_p$ (축열조 출구) 및 $u\tau = 1$ (충전종료 시간) 즉 $\phi = 1 + h_p$ 에서 최대가 된다. 그 크기를 평가하기 위하여 식(21) 및 여오차함수의 수학적 성질

$$\operatorname{erfc}(\zeta) = \frac{e^{-\zeta^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{2\zeta^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \zeta^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \zeta^7} + \dots \right) \tag{B2}$$

을 이용하여 $\Delta\theta_{\max}$ 를 급수 전개한 후 크기가 작은 고차항을 무시하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\Delta\theta_{\max} \approx \frac{2h_p e^{-u(1+h_p)^2/4}}{\sqrt{\pi u} (1+h_p)^2} \tag{B3}$$

를 얻는다. 식(B3)의 $\Delta\theta_{\max}$ 를 특성인자 u 와 $h_m (= 1 - h_p)$ 에 대하여 Fig.B1에 구체적으로 도시하였다. 열확산에 대한 열대류의 비인 Pe수(u) 및 혼합깊이 h_m 이 증가함에 따라 $\Delta\theta_{\max}$ 는 급격히 감소한다. 실제 축열조의 충전조건은 $u \gg 10^2$ 이며 Fig.B1은 $\Delta\theta$ 의 최대값임을 고려하면, h_p 에 무관하게 $\xi < h_p$ 및 $u\tau < 1$ 에 대하여 $\Delta\theta$ 는 충분히 무시될 수 있음을 확인할 수 있다.

정량적인 확인 이전에, 출구조건은 열확산에 관

한 경계조건이므로 열확산에 비하여 열대류가 현저히 우세한 실제 상태에서 ($u \gg 10^2$), 출구조건이 차이가 전체 온도분포에 미치는 영향이 크지 않으리라는 사실은 예측가능하다. 따라서 계면조건이 상이하더라도 반무한해와 단열해의 차이는 식(B3)의 크기(order)를 상회하지는 않을 것이다.

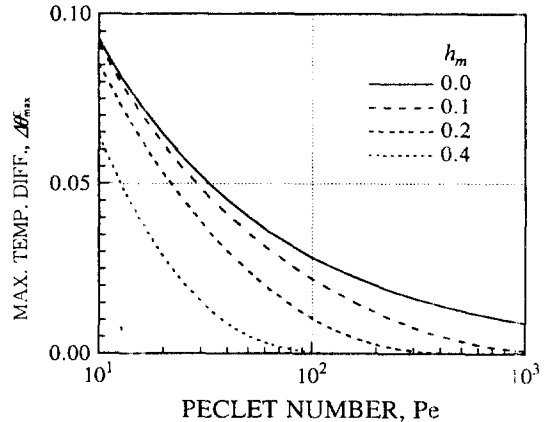


Fig.B1 Maximum temperature differences between the semi-infinite and adiabatic solutions under the constant inlet temperature condition as a function of the Peclet number for different mixing depths.

참 고 문 헌

1. Duffie, J. A. and Beckman, W. A., 1980, *Solar Engineering of Thermal Processes*, John Wiley & Sons, pp. 329~335.
2. Hollands, K. G. T. and Lightstone, M. F., 1989, "A review of low-flow, stratified-tank solar water heating systems", *Solar Energy*, Vol. 43, pp. 97~105.
3. Zurigat, Y. H., Maloney, K. J. and Ghajar, A. J., 1989, "A comparison study of one-dimensional models for stratified thermal storage tanks", *ASME Journal of Solar Energy Engineering*, Vol. 111, pp. 204~210.
4. Cabelli, A., 1977, "Storage tanks-A numeri-

- cal experiment”, *Solar Energy*, Vol. 19, pp. 45~54.
5. Yoo, H. and Pak, E. -T., 1993, “Theoretical model of the charging process for stratified thermal storage tanks”, *Solar Energy*, Vol. 51, pp. 513~519.
 6. 유호선, 1994, 성층축열조의 충전과정 및 축열 효율에 대한 입구경계조건의 영향”, 태양에너지, 제14권 제3호, pp.3~13.
 7. 유호선, 박이동, 1995, “성층화된 축열조의 1차원모델에 대한 해석적인 해”, 공기조화 냉동공학 논문집, 제7권 제1호, pp. 42~51.
 8. 유호선, 박이동, 1995, “완전혼합영역을 갖는 성층축열조의 충전과정에 대한 이론적인 해석”, 공기조화 냉동공학 논문집, 제7권 제2호, pp. 184~195.
 9. Yoo, H. and Pak, E.-T., 1996, “Analytical solutions to a one-dimensional finite-domain model for stratified thermal storage tanks”, *Solar Energy*, Vol. 56, pp. 315~322.
 10. 相良和伸, 中原信生, 1984, “蓄熱槽の特性解析に関する研究 その13-三重大學建築學科棟の溫度成層形蓄熱槽の運轉實績とモデルによるシミュレーション”, 日本空氣調和衛生工學會學術論文集, pp. 765~768.
 11. Abu-Hamdan, M. G., Zurigat, Y. H. and Ghajar, A. J., 1992, “An experimental study of a stratified thermal storage under variable inlet temperature for different inlet designs”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 1927~1934.
 12. 兪皓善, 洪熙基, 朴伊東, 1996, “成層蓄熱槽内の充填過程の過渡熱的舉動に関する解析(第1報. 解析解)”, 日本機械學會論文集(B編), 62卷 596號, pp. 1570~1575.
 13. Sliwinski, B. J., Mech, A. R. and Shih, T. S., 1978, “Stratification in thermal storage during charging”, *Proc. 6th IHTC*, Toronto, Vol. 4, pp. 149~154.
 14. Baines, W. D., Martin, W. W. and Smith, D. M., 1983, “Development of stratification in a rectangular tank by horizontal inflow”, *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 105, pp. 59~64.
 15. Pak. E.-T., 1991, “Thermally stratified hot water storage”, Arden, M. E., Burley, S. M. A. and Coleman, M. ed., *Solar World Congress*, Pergamon Press, Vol. 2, pp. 1417~1423.
 16. Hess, C. F. and Miller, C. W., 1982, “An experimental and numerical study on the effect of the wall in a thermocline-type cylindrical enclosure-II. Numerical model”, *Solar Energy*, Vol. 28, pp. 153~161.
 17. Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., 1959, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd Edn, Oxford University Press.