기하 문제의 분석적 증명방법과 그 본질

장 병 철 (경북 산북중학교)
한 인 기 (모스크바 사범대학교)

우리는 학생들이 무엇을 배워야 하며, 어떤 주제가 보다 더 중요하게 다루어져야 할지를 알고 싶어한다. 이에 대해, 모든 학생들은 추론과 계산, 문제해결 그리고 수학적인 의사소통을 배워야 한다(NCTM, 1989)고 답할수는 있다.하지만, 모든 학생들이 '어떻게, 결과를 증명하고, 2차 방정식을 풀 수 있게 하는가 ? ' 에 대한 답은 그리 간단하지 않다.

논의의 핵심은, 과정(논리적 추론, 문제 해결, 수학적 사고)이냐, 산출(개념, 사실, 정리들)이냐 에 관한 것인데, 이는, 수학의 본질이 무엇인지에 대한 우리의 믿음에 따라 결정되는 것이다(Schoenfeld, 1994). 수학교육의 경향이 산출에서 절차로, 아는 것(knowing)에서 행하는 것(doing)으로 이행됨에 따라 학생들의 사고가 각각의 주제 단락들의 모임으로서가 아닌, 통합적인 사고 활동을 요구하고 있다. 또한, 뉴질랜드의 수학교육과정(MOE,1992) 과 호주의 교육과정 PROFILE-수학편(CC,1994) 에서도 논리와 추론의 개발과, 추측, 문제해결은 중요한 수학적 활동으로 간주되고 있다. 이미 학습자의 사고 활동에 있어서 기본이 되는 분석과 종합에 대해서 많은 연구 결과들이 제시되었다(루빈슈타인, 1958; 보고이블렌스키, 1969; 깔야긴 외, 1975, Pappus, Polya;1957 등).

분석과 종합은 기하학 문제의 증명 방법으로써 중요한 도구가 되는데, 이 **분석적 증명 방법**은 증명하려는 결론을 증명의 출발점으로 삼아 증명하는 방법을 의미하고, 종합적 증명 방법은 증명의 출발점이 정리의 주어진 조건들이고, 그 조건들 사이의 관계를 찾고, 그것들을 종합하여 우리가 증명하려는 결론을 산출해 내는 방법을 의미한다(다니로바, 1958 ; 그루데노프, 1990 ; 구세프, 1994). 즉, 분석적 증명 방법은 증명하려는 결론을 다른 명제로 변형시켜서, 우리가 주어진 조건으로부터 쉽게 얻을 수 있게 하는 과정이 증명의 중심이 된다. 반면에, **종합적 증명 방법**은 주어진 조건으로부터 논리적 추론을 거쳐 결론을 유도하는 즉, 우리가 수학 교과서에서 볼 수 있는 증명의

과정과 그 기술들은 거의 대부분이 종합적인 방법에 속한다. 그러나, 학습자가 아직 증명의 방법을 모르고 있는 상태에서 종합적인 방법으로 증명의 전 과정을 스스로 생각해 낸다는 것과, 왜? 증명이 그곳에서부터 시작 되어야 하는지에 대한 근거를 알기 어려운 일이다(Senk, 1985 ; Ernest, 1984). 때문에, 문제 상황에서 분석적 증명 방법이 효과적으로 이용될 수 있다.

분석적 증명 방법은 분석을 통해서 얻어지는 명제의 성질에 따라 크게 **상향 분석과 하향 분석**으로 나눌 수 있다. 본 논문에서는 이 중에서 하향 분석의 방법을 통한 기하 문제의 증명에 대해서 상세히 알아보려고 한다.

I. 하향 분석 방법에 의한 기하 문제의 증명절차

기하학적인 문제의 증명을 위한 활동 과정을 요약하면 다음과 같다.

첫째. 문제의 요소를 분리(추출)하기.

둘째. 문제의 요소에 대한(대응되는) 그림그리기.

셋째. 주어진 문제의 요소에서 얻어지는 그림들간의 관계를 나타내기.

넷째. 얻어진 관계 사이들간의 관계를 구하기.

(관계 사이들간의 관계를 구하는 것이, 결국 주어진 문제의 해답을 구하는 것이다.)

다섯째. 관계 체계의 완전성과 비모순성을 검사하기.

여섯째. 문제풀이를 통해 얻어진 결과로 구조도를 그리기.

II. 하향 분석 방법을 통한 기하 문제의 증명의 실제

하향 분석 방법으로 몇 가지의 기하 문제들을 증명해 보고, 그 본질에 대해서 진술해 보기로 하자.

(1) 등변 사다리꼴에서 대각선의 제곱은 한 옆변의 제곱에 두 밑변들의 곱을 합한 것과 같다는 것을 증명하여라. (고등학교 기하 내용 -**증명의 절차 이해**)

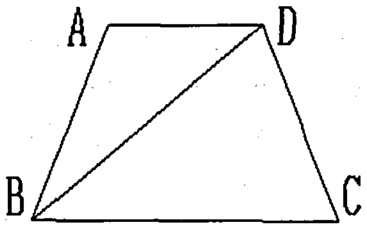
문제의 성분들 : ① 등변 사다리꼴 ② 등변 사다리꼴의 대각선 ③ 등변 사다리꼴의 옆변 ④ 등변 사다리꼴의 밑변

문제를 구성하는 성분들을 분류해 냈고, 그 다음에는 문제에서 주어진 요소들을 도형으로 나타내고, 그 도형에 문자로 표시를 했다. 이 과정에서 우리는 다음의 것들을

얻을 수 있다.

1. □ ABCD : 등변 사다리꼴
2. $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ = $\overline{CD}$

   (∵ 등변 사다리꼴의 정의)
3. BD : 등변 사다리꼴의 대각선
4. $\overline{BD}^2$ = $\overline{CD}^2$ + $\overline{AD}\cdot\overline{BC}$: 증명해야 할 것



<그림 - 1>

이 정리에 대한 증명을 하향 분석 방법을 통해서 증명해 보자.

물론, 지금까지의 풀이 과정은 대부분의 학생들에게 아직은 어려움을 주지 않을 것이다. 그런데, '왜 ? 이 문제에서, 그리고 이 순간에 하향 분석법을 통해서 증명을 해야 하는가?' 라는 물음이 발생할 것이다. 이 물음에 대한 대답은 이 논문에서 논의하고자 하는 내용을 벗어난다. 즉, '증명 방법의 탐구'에 관련된 물음이다. 이 문제는 매우 중요한 문제이지만, 이 논문의 논의에서는 그것을 제외시키고, 하향 분석 방법에 의한 증명 과정과 그 방법의 본질을 제시하려 한다.

우선, 주어진 정리가 옳고, 즉 증명되었다고 가정을 하자(증명 방법 중의 하나인 귀류법에서는 주어진 정리가 성립하지 않는다는 가정을 하고 증명을 시작하지만, 이 방법에서는 성립한다고 가정한다). 즉, $\overline{BD}^2$ = $\overline{CD}^2$+ $\overline{AD}\cdot\overline{BC}$이라는 것을 가정한다.

그렇다면, $\overline{BD}^2$를 다른 방법으로 구해서 우리의 가정과 비교를 해 보자. 삼각형 BCD에서 코사인 제 2법칙을 사용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

5. $\overline{BD}^2$ = $\overline{BC}^2$ + $\overline{CD}^2$ - 2$\overline{BC}\cdot\overline{CD}$ cos(∠BCD) (∵ 코사인 제 2법칙)

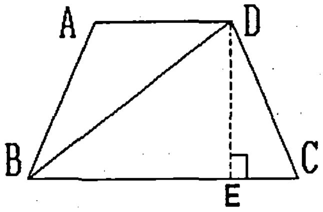
이 식을 우리의 가정과 비교해 보면, 첫번째 식에는 코사인 값을 가지지 않는다. 즉, 코사인 법칙에서 얻어진 식에서 코사인 값을 소거할 수 있는가에 대해서 생각해 보자. 만약, 점 D에서 밑변 BC에 수선을 긋고, 그 점을 E라고 한다면, $\overline{CD}$ cos(∠BCD) = $\overline{CE}$가 된다.

6. $\overline{CD}$ cos(∠BCD) = $\overline{CE}$ (∵ 코사인의 정의)
7. $\overline{BD}^2$ = $\overline{BC}^2$ + $\overline{CD}^2$ - 2$\overline{BC}\cdot\overline{CE}$ (∵ 5, 6)
8. $\overline{CD}^2$ + $\overline{AD}\cdot\overline{BC}$ = $\overline{BC}^2$ + $\overline{CD}^2$ - 2$\overline{BC}\cdot\overline{CE}$ (∵ 4, 7)

9. $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{CE}$ ($\because$ 8)

10. $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{BC}(\overline{BC} - 2\overline{CE})$ ($\because$ 9)

11. $\overline{AD} = \overline{BC} - 2\overline{CE}$ ($\because$ 10, $\overline{BC} \neq 0$)



<그림 - 2>

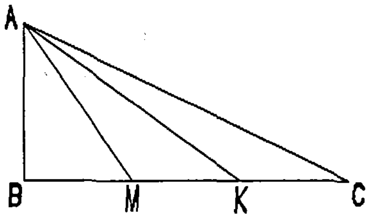
우리가 지금 얻은 명제 11은 □ ABCD가 등변 사다리꼴이므로, 참이라는 것을 쉽게 알 수 있다. 즉, 주어진 정리가 성립한다는 가정으로부터 필요조건들을 유도해 자명한 명제를 얻었다. 이제, 우리가 해야 할 일은 이 논증 과정들이 역으로 거슬러 올라가도 성립하는 가를 증명하는 것이다. 즉, 얻어진 필요조건들이 동시에 충분조건이 되는가를 보는 것이다. 만약, 이것이 가능하다면 역으로 거슬러 올라가 차례대로 기술하기만 하면, 주어진 정리에 완전한 증명을 찾아낸 것이 되고, 만약 가능하지 않다면, 다른 증명 방법을 찾아야 한다. 이 정리의 증명에서는 **가역적인 과정이 성립**한다. 즉, 정리의 증명은 하향 분석을 통해 얻어진 논증의 과정이 아니라, 다음과 같은 순서로 종합적인 방법으로 기술해야 한다 : ⑪ ⇒ ⑩ ⇒ ⑨ ⇒ ⑧ ⇒ ⑦ ⇒ ④

(2) 직각 삼각형에서 직각을 낀 두 변들 중에서 변 BC는 다른 변 AB보다 세 배가 더 길고, 변 BC 위에 이 변을 삼등분 하도록 점 K, M을 표시하였다. 이때, $\angle BMA + \angle BKA + \angle BCA = 90^\circ$ 인 것을 증명하여라. (고등학교 기하- **탐구활동을 통한 증명**)

문제의 성분들 : ① 직각 삼각형; ② 직각 삼각형의 직각을 낀 변; ③ 선분의 분할

문제를 구성하는 성분들을 분류해 냈고, 문제를 증명하기 위해, 문제와 상응하는 작도를 하고, 각 성분과 그들 사이의 관계를 수식을 써서 나타내 보자.

1. $\triangle ABC$: 직각 삼각형
2. $\angle B = 90^\circ$ ($\because$ 1)
3. $3\overline{AB} = \overline{BC}$
4. $\overline{BM} = \overline{MK} = \overline{KC}$
5. $\angle BMA + \angle BKA + \angle BCA = 90^\circ$: 증명해야 할 것



<그림 - 3>

이 문제를 하향 분석 방법에 의해 증명을 해 보자. 그러기 위해서, 우선 우리가 증명해야 할 정리, 즉, $\angle BMA + \angle BKA + \angle BCA = 90^\circ$ 이 증명되었다고 가정을 하자.

6. $\triangle ABM$: 직각 이등변 삼각형 ($\because$ 2, 3, 4)

7. $\angle BAM = \angle BMA = 45^\circ$ ($\because$ 6)

8. $\angle BKA + \angle BCA = 45^\circ$ ($\because$ 5, 7)

9. $\tan(\angle BKA + \angle BCA) = 1$ ($\because$ 8)

명제 9가 자명한 명제인가를 알아봐야 한다. 어떤 사람에게 있어서는 자명한 명제가 될 수도 있겠지만, 많은 사람들에게 있어서 그렇지 않다. 그렇기 때문에, 자명한 명제가 얻어질 때까지 증명 과정을 계속 진행해 가도록 하자. 명제 9에서 탄젠트 값의 합이 제시되어 있다. 그렇기 때문에, 이에 관련해 우리는 증명 과정에서 탄젠트 값의 합의 공식을 염두에 두어야 한다.

즉, $\tan(\angle BKA + \angle BCA) = \dfrac{\tan(\angle BKA) + \tan(\angle BCA)}{1 - \tan(\angle BKA) \cdot \tan(\angle BCA)}$.

10. $\tan(\angle BKA) = \dfrac{BA}{BK} = \dfrac{1}{2}$ ($\because$ 3, 4, 탄젠트의 정의)

11. $\tan(\angle BCA) = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{1}{3}$ ($\because$ 3, 4, 탄젠트의 정의)

비로소, 우리의 명제 9는 자명한 것이 되었다. 우선, 우리들의 논증 과정이 가역적인 것인가를 확인해야 한다. 역으로 거슬러 올라갈 때, 그것이 불가능한 단계가 있다면, 지금까지 우리가 거쳐온 증명 과정은 의미가 상실되고 만다. 즉, 이 하향 분석에 의한 증명은 완결된 증명을 기술하는 방법이 아니라(이미 알려진 증명을 체계적으로 기술하는 방법은 종합적인 방법을 통해서 제시된다), 증명 방법에 대한 탐구의 과정인 것이다. 대부분의 교과서나 참고서에서 제시되는 내용들은 이미 발견이 완결된 증명을, 즉 모든 포장이 끝난 제품을 소비자인 학생들에게 배달해 주는 역할을 하기 때문에 이러한 학습 자료들은 학습자들에게 학습 활동을 유발시키기가 어렵다.

그에 반하여, 하향 분석에 의한 **증명 방법의 탐구는 학습자의 활동을 통해서 증명 과정을 발견하도록 도와주는 방법을 제시한다**는 측면에서 중요한 의미를 지닌다. 이제, 증명 과정을 계속 진행해 보자. 하향 분석의 과정 자체로 문제의 증명이 끝난 것은 아니다. 하향 분석의 방법을 통해서 얻어진 명제들이 가역적이기 때문에, 우리는 주어진 문제에 대한 증명을 다음과 같이 손쉽게 기술할 수 있다.

$\tan(\angle BKA) = \dfrac{BA}{BK} = \dfrac{1}{2}$, $\tan(\angle BCA) = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{1}{3}$ 인데, 탄젠트의 합의 공식에 의해,

$(\angle BKA + \angle BCA) = \frac{\tan(\angle BKA) + \tan(\angle BCA)}{1 - \tan(\angle BKA) \cdot \tan(\angle BCA)} = 1$. 즉, $\tan(\angle BKA + \angle BCA) = 1$, 두 각 BKA와 BCA가 90° 보다 작기 때문에, $\angle BKA + \angle BCA = 45°$ 이다. 한편, $\triangle ABM$: 직각 이등변 삼각형이므로, $\angle BAM = \angle BMA = 45°$ 이다. 그러므로, 우리가 증명하려는 명제 $\angle BMA + \angle BKA + \angle BCA = 90°$ 는 증명되었다.

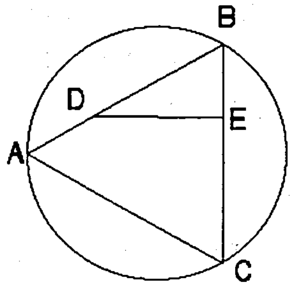
(3) 정삼각형 ABC가 원에 내접해 있고, 점 D, E는 각각 변 AB, BC 위에 있으며, AD : DB = 1 : 2이고, BE : EC = 1 : 2이다. 이때, 선분 DE의 길이가 반지름의 $\frac{2}{3}$ 라는 것을 증명하여라.

(중학기하-**명제의 참,거짓확인**)

문제의 성분들 : ① 원에 내접한 정삼각형 ② 삼각형의 변 ③ 선분의 길이의 비 ④ 원의 반지름

우선, 문제에 상응하는 작도를 하고, 주어진 요소들을 나타내 보자.

1. $\triangle ABC$: 원에 내접한 정삼각형
2. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$ ($\because$ 1)
3. $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB}$, $\overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{BC}$
4. $\overline{DE} = \frac{2}{3}r$ (r : 주어진 원의 반지름) : 증명해야 할 것



<그림 - 4>

이 정리의 증명을 하향 분석 방법을 통해서 탐구해 보자. 우선, 주어진 정리가 증명되었다고 가정을 하자. 즉, $\overline{DE} = \frac{2}{3}r$이다. 앞의 문제 1과 마찬가지 방법으로, $\overline{DE}$를 다른 방법으로 구해서 우리의 가정과 비교해 보자. 선분 $\overline{DE}$의 길이를 구하기 위해, $\overline{AC} // \overline{DK}$인 보조선 $\overline{DK}$를 긋자.

5. $\overline{AC} // \overline{DK}$ ($\because$ 작도에 의해)
6. $\overline{AD} = \overline{CK}$ ($\because$ 5)
7. $\overline{BD} = \overline{BK}$ ($\because$ 2, 6)
8. $\triangle BDK$: 정삼각형 ($\because$ 1, 7)

9. $\overline{BE} = \overline{EK}$ (∵ 3, 6)

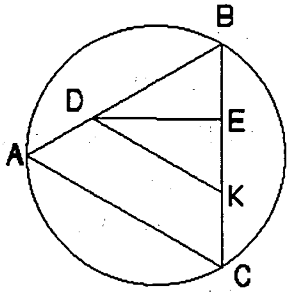
10. $\overline{DE}$: 삼각형 BDK의 중선 (∵ 9)

11. $\overline{DE}$: 삼각형 BDK의 높이 (∵ 8, 10)

12. $\overline{DE} = \overline{BE} \cdot \tan 60^\circ$ (∵ 11)

13. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = r\sqrt{3}$ (∵ 1)

14. $\overline{DE} = \frac{1}{3} r\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = r$



<그림 - 5>

우리가 지금 얻은 명제 14는 처음에 가정한 명제 4와 일치되지 않는다. 이러한 모순은 우리의 가정이 잘못 되었음을 나타내는 것이다. 즉, $\overline{DE} \neq \frac{2}{3}r$이다. 이 예를 통해서 우리는 하향 분석에 의한 증명 방법이 주어진 정리의 증명뿐만 아니라 주어진 **명제가 거짓임을 밝혀 내는 데도 쓰일 수 있음**을 알 수 있다.

(4) 삼각형 ABC 의 ∠A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점은 D 라 하자. CA 에 평행하고 점 D를 지나는 직선이 점 E에서 AB 와 만난다. 점 E 로부터 BC 에 평행한 직선을 그으면 ,AC와 점 H에서 만난다. AE=CH 됨을 보여라. (중학교수학 -**논증의 과정확인**)

문제의 성분들 : ① 삼각형 ② 각의 이등분선 ③ 두 평행선과 만나는 한직선

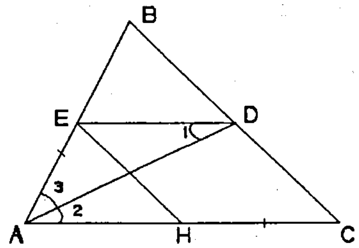
이제 문제를 구성하는 성분들을 분류해 냈고, 문제를 증명하기 위해, 문제에 맞는 작도를 하고, 주어진 요소들을 나타내어 보자.

C1 : ∠3 = ∠2 (∵ AD : 각 의 이등분선)

C2 : DE // AC

C3 : BC // EH :주어진 것.

C4 : AE = CH : 증명해야 할 것.



<그림 - 6>

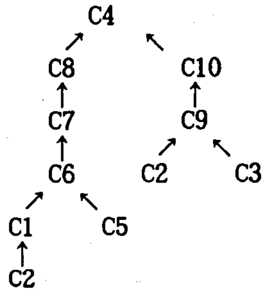
이 문제를 하향 분석방법에 의해 증명해 보자.

즉, AE = CH 가 증명되었다고 가정하자.

C5 : ∠1 = ∠2 (∵ C2)

C6 : ∠1 = ∠3 (∵C1,C5)

C7 : △AED :이등변△ (∵ C6)
C8 : AE = ED (∵ C7)
C9 : □ HEDC: 평행사변형 (∵ C2,C3)
C10 : ED = HC (∵ C9)
C4 : AE = CH (∵ C8,C10)



<구 조 도>

여기에서는 논증의 과정을 명확히 알아보기 위하여 구조도로 작성해보았다. 또한, 구조도의 위계를 보면, 종합의 시작점이 바로 C2 임을 쉽게 알 수 있고, 가역적 추론 과정의 확인도 용이함을 알 수 있다.

(5) a> 0,b> 0, a≠b 일 때, $\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}$ 임을 증명하라 (고등학교 대수 - 문제의풀이).

(우리는 여기서 대수적인 문제 풀이에 분석법과 종합법을 적용해보기로하자.)

증명 :먼저 분석법을 써보자.

$\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}$ (?)

$(a+b)>2\sqrt{ab}$ (?)

$(a+b)^2>4ab$ (?)

$a^2+2ab+b^2>4ab$ (?)

$a^2-2ab+b^2>0$ (?)

♠ $(a-b)^2>0$, (∵ a>0, b>0,a≠b)

이제 종합법을 적용해 보자.

♠ $(a-b)^2>0$

$\Rightarrow a^2-2ab+b^2>0$

$\Rightarrow a^2+2ab+b^2>4ab$

$\Rightarrow (a+b)^2>4ab$

$\Rightarrow (a+b)>2\sqrt{ab}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$$

우리는 위의 증명과정에서 분석법은 종합적 증명이 어디서 시작되어야하며 왜? 그곳에서 시작되는지의 근거를 제공해주고있다.

III. 하향 분석을 통한 증명 과정 및 그것의 본질

앞의 다섯 문제를 통해서 하향 분석을 통한 증명 방법 및 그 의의에 대해서 살펴보았다. 하향 분석을 통한 증명 방법을 단계 별로 요약하면 다음과 같다.

① 증명해야 할 명제가 이미 증명되었다고, 즉 주어진 명제를 옳은 것으로 가정한다 ② 그 명제로부터, 혹은 이미 알려진 자명한 수학적 사실들로부터 논리적 추론을 통해 새로운 명제들을 얻어낸다 ③ 이러한 과정을 문제의 주어진 조건들로부터 직접 유도할 수 있는 명제를 얻을 때까지 계속 진행한다. 이때, 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

첫 번째, 얻어진 명제가 자명한 경우(문제 1, 2의 경우), 즉 참인 명제를 얻은 경우, 두 번째, 얻어진 명제가 거짓인 경우(문제 3의 경우). 거짓인 명제가 얻어졌다면, 증명과정은 모두 끝난 것이 되고, 우리가 증명하려고 했던 정리는 성립하지 않는 것이다. 첫 번째의 경우에는 다음과 같은 과정을 거쳐 주어진 명제에 대한 증명이 계속 진행된다 ④ 논리적 추론의 과정이 가역적인가를 확인한다. 즉, 역으로 거슬러 추론을 할 때, 모순이 생기지 않는가를 확인한다. 이때, 추론이 가역적이면 증명 과정을 계속 진행해 가고, 비가역적이면, 다른 증명 방법을 찾아야 한다 ⑤ 하향 분석을 통해 얻어진 증명의 과정을 역순서로 거슬러 올라가 기술하면, 완전한 증명을 제시하는 것이다(문제 2, 4 참조). 이 하향 분석의 방법을 문제 2의 증명 과정을 도식화하여 구체화해 보자. 문제 2의 증명 과정에서 하향 분석을 통한 논증의 과정은 다음과 같다.

문제에서 주어진 조건들 : ①, ②, ③, ④

증명할 것(즉, 옳다고 가정한 것) : ⑤

논증의 과정 : ⑥ ⇒ ⑦ ⇒ ⑧ ⇒ ⑨ ⇒ ⑩ ⇒ ⑪

즉, 논증의 과정은 가정한 명제, 혹은 이미 알고 있는 명제로부터 필요조건들을 찾아가는 과정으로써, 위의 화살표를 보면 '하향 분석'이라는 용어 자체에 대한 이해가 쉽게 될 것으로 생각된다. 이와 반대로, '상향 분석'은 충분 조건들을 찾아내, 곧바로 정리에 대한 증명에 이르는 방법이다. 즉, 논증의 과정을 보면 화살표의 방향이 반대

가 된다. 그리고, 문제 4에서는 논증의 과정이 항상 선형적은 아님을 보여주고 있고, 문제 5 는 대수적 문제해결에 분석과 종합법이 쓰일 수 있음을 보여준다.

한편, 이미 주어진 다섯 문제의 증명 과정에서 하향 분석을 통한 증명 방법의 본질을 제시했다. 이것을 정리해 보면, 이 방법은 증명의 과정, 즉 탐구의 과정을 학습자들에게 가르칠 수 있다. 학교 수학에 있어서 기하학의 정리들에 대한 증명은 학습자들에게 어려운 내용 중의 하나이지만, 수학 자체의 특성으로 보나, 혹은 증명을 통해 학습자들이 얻을 수 있는 사고 활동의 무한한 가능성을 비추어 볼 때, 증명 활동의 가치는 매우 크다. 그렇다면 어떻게 증명을 가르칠 것인가? 증명 과정에서 산출되는 논리적 결과물들 만을 제시해 준다면, 학습자들이 다른 문제들에 대한 증명을 스스로 해 갈수 있을까? 라는 의문이 생긴다. 하향 분석에 의한 증명 방법은 증명에 대한 탐구 활동의 방법을 제시하고 있는 것으로써 학습자들이 스스로 학습 활동을 할 수 있는 도구를 제시함과 동시에, 스스로 정리에 대한 증명을 시도할 수 있도록 도와준다.

그리고, 문제 3에서 살펴본 것처럼, 하향 분석을 통한 증명 방법은 명제의 증명 과정에서 그 명제가 참인지, 거짓인지 확인할 수 있다. 중·고등학교 기하 과정에서 어떤 명제가 주어졌을 때, 학습자들이 그것이 참인가, 거짓인가를 증명하는 것은 매우 어렵다. 하향 분석의 방법을 이용한다면, 올바른 명제에 대한 증명뿐만 아니라 거짓인 명제에 대한 논의까지를 가능하게 할 수 있다.

IV. 결론 및 제언

기하 문제에 대한 다양한 증명 방법이 있지만, 이 방법은 추론과 문제해결 수학적사고영역과 관련되어있으며 중등학교 증명학습시에 만나는 유클리드원론식 종합적 방법에 의한 형식적 학습의 어려움을 극복할 수 있으며. (우정호,1994), 분석 과정을 통해 그증명구조를 보다 잘 이해할 수 있다.(Leron,1983) 또한, Lakatos 는 수학적 발견에서 최초의 추측이 어떻게 생성되는지에 대해서는 명확한 답을 주지 못하고 있지만(강문봉,1993) 분석법은 그발견의 실마리를 제공해주고있다.

하지만, 여러나라의 교과서를 분석(한국 중2수학 교과서 8종, 러시아 6학년 기하, 중국 기하 1권(중1), 대만 중학 수학 1권, 일본 중2수학) 해본 결과, 러시아, 중국, 대만에서는 이 분석 방법이 진술되어 있으나, 일본과 우리 나라에서는 교과서상의 언급이 없었다, 분석과 종합이 교과서에 함께 소개됨이 합당하다고 생각한다.

본 논문에서는 하향 분석을 통한 증명 방법에 대해서 논의하였다. 이 방법은 증명 과정에서의 논리적인 결과물들을 학습자에게 제시하는 방법이 아니라, 증명 과정 자체를 학습자들이 찾을 수 있도록, 학습자들에게 증명의 도구를 제시해 준다는 측면에서 더 큰 의의를 지닌다. 즉, 이 하향 분석을 통한 증명 방법은 귀류법과 함께 학습자들이 주어진 정리에 대한 증명 능력을 향상시킬 수 있는 가능성을 제시해 줄 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

박배훈, 정창현, 중학교 수학2,(주)교학사, 서울,1996

박두일, 신동선, 강영환 중학교 수학2,(주)교학사, 서울,1996

김연식, 김흥기, 중학교 수학2,동아출판사, 서울,1996

오병승, 중학교 수학2, 바른교육사, 서울,1996

김호우, 박교식, 신준국, 정은실, 중학교 수학2, (주)지학사, 서울,1996

구광조.황성욱,중학교 수학2,(주)지학사,서울,1996

최용준.이현구,중학교 수학2,(주)천재교육,서울,1996

김응태.박승안.오연장.신현용,중학교 수학2,(주)한샘출판,서울,1996

藤田외 33인 , 新しい數學2,동경서적주식회사,平成8年.93-119

國民中學選修科目 數學 上冊,國立編譯館 ,臺北市.中華民國85年.4-34

幾何(ji he) 第一冊 , 人民教育出版社中學數學室 編著,黑龍江省,1996.90-111

藤本義明,圖的表現を重視し圖形の証明の指導法の改善,일본교육학회지,수학교육 47-1,제75권1호,1993.

片桐重男,이용률 외(공역),문제해결과정과 발문분석, 경문사,서울,1993.

서동엽,증명지도에 관한연구,대한수학교육학회논문집,제1권.제1호,123-135,1991.

강문봉,분석법에 관한고찰,대한수학교육학회논문집,제2권.제2호,81-93,1992.

우정호.강문봉,Lakatos의 수리철학의 교육적연구,제3권.제2호,1-6,1993.

정은실,폴리아의 수학적 방법론 고찰,대한수학교육학회지,제3권.제1호,59-74,1993.

우정호,증명지도의 재음미,대한수학교육학회지,제4권.제1호,3-24,1994.

서동엽,증명지도의 목표와 수준에 대한 소고,대한수학교육학회지,제5권.제1호, 203-215, 1995.

Polya,G.How to solve it (2nd ed).New York;우정호 역(1995),어떻게 문제를 풀것인가? 서울;(주)천재교육.

NCTM,구광조.오병승.류희찬(공역),수학교육과정과 평가의 새로운 방향,서울;경문사.

T.L.Heath,The Thirteen Books of Euclid's Elements,Cambridge,1908,Vol.1,p.138.

M.A.(ken)Clements & N.F.Ellertan,polya,Krutetskii and Restaurant problem.

J.Mason & J.Davis,Forstereing and Substaining Mathematics Thinking through problem Solving Dakin University press,1991.

Schoen feld,Alan,"what do we know about Mathematics curricula?" Journal of Mathematical Behavior,13;1994.

Phares G.O'Daffer &Bruce A.Thornquist,Critical Thinking. Mathematical Reasoning, and proof. Macmillan Publishing Company. Newyork.1993.

Johnston Anderson,The place of proof in school mathematics,London Mathematical society,33-39,1996.

БОгоЯВЛеНСКИЙ Д.Н. ПРИеМЫ УМСТВеННОЙ ДеЯТеЛЬНОСТИ И ИХ ФОРМИРОВаНИе У ШКОЛЬНИКОВ.ВОПРОСЫ ПСИХОЛОГИИ.- М., 1969 ,-No 2. -с. 25-38.

ГРуденоВ Я И СовеРШенсТВоваНИе МеТоДиКи РавоТЫ учиТеЛя математика : Кн. для учителя, - М : Просвещение, 1990. -224 с.

Гусев В А Как помочь ученику полюбить математику? -М: Авангард, 1994. 168 с.

Данилова Е Ф Как помочь учащимся находить путь к решению геометрических задач. -М: Учпедгиз, 1958. -96 с.

Методика преподавания математики в средней школе. /Ю М Колягин, В А Огане сян И Др. / -М: Просвещение

Рубинштейн С Л О Мышлени и путях его исследования. - М: Изд-во АПН РСФСР, 1958. -147 с