韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 프로시딩>
1997. 7. 제6집, 495-509.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Proceedings of Mathematical Education
Series E: July 1997, Vol. 6, 495-509.

수학적 창의력에서의 메타인지의 역할
(The Role of Metacognition in Mathemaitcal Creativity)

김 수 환 (청주교육대학교)

Ⅰ. 서 론

우리는 어떤 문제를 해결하는 데 필요한 똑 같은 지식을 보유한 아동들 중에서도 어떤 아동은 풀고 어떤 아동은 풀지 못하는 경우를 볼 수 있다. 이는 문제해결에 필요한 지식을 보유하는 것과 그 지식을 실제로 활용하는 것은 별개의 능력이라는 것이다. 후자, 즉 지식을 실제로 활용하는 능력은 자기 자신의 지식의 기저의 상태를 모니터하고 문제 해결의 과정을 평가하는 등의 측면과 관련된다. 이러한 측면이 곧 "메타인지"의 시사점에 관한 것이다. 최근에 "메타인지"는 심리학자들 사이에서 뿐 아니라 수학교육 연구자들 간에서도 인간의 인지 활동의 중요한 기능으로 주목되어 왔다. 그럼에도 불구하고, 메타인지의 양상과 역할들은 충분히 밝혀지지 못하였으며, "메타인지"의 개념은 여전히 모호하고 퍼지한 개념이다(Yamaguchi, 1993).

"메타인지"란, 광의로 말해서 認知 그 자체를 反映하는 知識과 理解의 일체로 볼 수 있다. 또한 객관적인 知識이 인간의 思考 活動들에서 活性化되게 하는 知識과 機能으로 볼 수 있다. 다시 말해서, 메타인지는 다른 지적 상태나 과정들이 반영의 대상이 되는 지적 활동들을 말한다. 이와 같이 메타인지는 때로는 "認知에 관한 思考", "思考에 관한 思考", "認知에 관한 反映" 또는 "認知에 관한 認知" 등으로 언급되고 있다. 이러한 예로는(Yussen, 1985) (1) 일련의 단어들의 암기를 돕기 위해 두 전략들 중 어느 것을 이용할 것인가에 대한 숙고(메타기억) (2) 누군가가 방금 여러분에게 전한 말을 이해하였는지 어떤지에 대한 고려(메타이해) (3) 여러분이 무언가를 관찰하려 할 때, 어떤 조건들이 적어도 주의를 빗나가게 할 것인가에 대한 고려(메타 주의)등을 포함한다.

본고에서는 이러한 메타인지의 개념들을 살펴보고, 창의력에서의 메타인지의 역할을 알아보려고 한다. 이를 위해 여러 학자들에 의한 메타인지의 분류를 조사해본 다음, 창의력, 특히 수학적 창의력의 발달 단계와 수학적 이론의 구조, 그리고, 수학적 창의력의 잠정적 정의와 요소들, 수학적 창의력의 원동력과 특성 그리고 그 결과들을

알아보기로 한다.

Ⅱ. 메타인지의 분류

먼저, 1971년 경부터 일관되게 메타인지란 용어를 사용하면서 관심을 집중해왔으며 이 분야의 선구자 격인 Flavell의 메타인지 개념을 살펴본다. 그리고 메타인지의 활발한 연구자 중의 한 사람인 Brown과 Schoenfeld의 분류를 살펴본다.

1. Flavell의 분류

그는 "메타인지적 지식"과 "메타인지적 경험"(Flavell, Cited in Yamaguchi, 1993)으로 분류한다. 그리고 그는 "메타인지적 지식"에는 세 가지 종류의 변인, 즉 개인 변인, 과제 변인, 전략 변인이 있다고 적시하고 있다. 그의 뒤를 이은 많은 사람들은 일명, "메타기억"이라고 하는 기억 현상에 관심을 두기도 하였다(Yussen,1985).

독서와 같은 어떤 인지적 활동에 관여하는 동안 우리는 일반적으로 그 활동에 관하여 우리의 기억 속에 저장하고 있던 어떤 지식에 반응하여서는 우리가 하고 있는 것을 지시할 수도 있다. 가령, 내가 이미 숙달한 자료임을 인지하고는 한 단원을 빨리 읽어버릴 수 있다. 또는 나는 독서 자료를 덮어두고, 그 의미가 그 부분의 많은 점들을 이해하는데 장애가 될 것으로 보이는 모르는 단어를 사전에서 찾아볼 수도 있다. 각각의 경우에 나는 지난 학습 경험을 통하여 독서 행위에 관하여 이미 알고 있는 그 무엇을 기초로 행동하였다고 할 수 있다. 구체적으로 나는 다음과 같은 지식을 이용하였다(Yussen,1985). (1) 내가 독서 중에 잘 알고 있는 것을 대하면, 그 자료를 빨리 지나가는 것이 매우 효율적이다. (2) 내가 모르는 단어를 대하면, 그 단어가 더 이상의 이해를 저해하기 전에 그 의미를 재빨리 찾아보는 것이 최선이다.

이와 같은 상황들은 독서 중에 나의 지식의 상태에 대하여 어떤 의식적 지각을 불러 일으킨다. 친숙한 자료를 대하는 것은 "아, 나는 이미 이것을 알고 있다."와 같은 반응을 즉시에 일으키거나 혹은 모르는 단어에 집착하는 것은 "오,오, 나는 이 단어를 몰라. 작가는 여기서 어떤 의도를 가지고 있을까?"와 같은 반응을 불러일으킬 수 있다. 이러한 반응들이 곧 메타인지적 경험이다. 메타인지적 경험은 진행중인 인지적 활동에 대한 즉각적인 반응이다. 반면에 메타인지적 지식은 저장된 개념들(서술적 지식과 절차적 지식)로 구성되는 바, 인지적 활동으로 안내되기 위해서는 기억으로부터 재생되어야 한다.

Flavell은 계속 개인이 어떤 인지적 활동으로 획득하는 광의의 지식을 설명하고 있다. 네 가지 부류로 나누어 생각해보면 다음과 같다(Yussen, 1985). 첫째, 과제란 과제의 성격이 그 수행에 어떤 영향을 주는가에 관한 지식으로 가령, 어떤 이야기의 정확한 표현보다는 그 요지를 재생하는 것이 더 쉽다는 것을 아는 것을 들 수 있다. 둘째, 자아란 인지적 존재로서의 자신의 기능, 강점, 약점 등에 관한 지식으로, 가령, 자기는 수보다 단어를 더 잘 기억한다는 것을 아는 것을 말한다. 셋째, 전략이란 수행을 제고시키기 위한 대안적인 전략들의 다른 가치에 관한 지식으로, 가령, 반복적인 단어의 암기보다 상호작용적인 시각적 심상이 두 단어들 간의 연합을 더 잘 보존할 것이라는 것을 아는 것을 말한다. 넷째, 상호작용은 앞에서의 두 세가지 지식의 범주들이 서로 상호작용하여 어떤 인지적 수행의 결과에 영향을 미친다는 방식들에 관한 지식을 말한다. 가령, 과제와 전략의 짝에 대하여, 그들을 기억하기 위해서는 목록에서의 항목들을 반복하는 것이 약간의 도움은 되지만, 만약 청취자가 처음에 그것을 이해하지 못하면, 청취자에게 똑 같은 전문을 반복하는 것은 전혀 도움이 되지 않음을 아는 것을 들 수 있다.

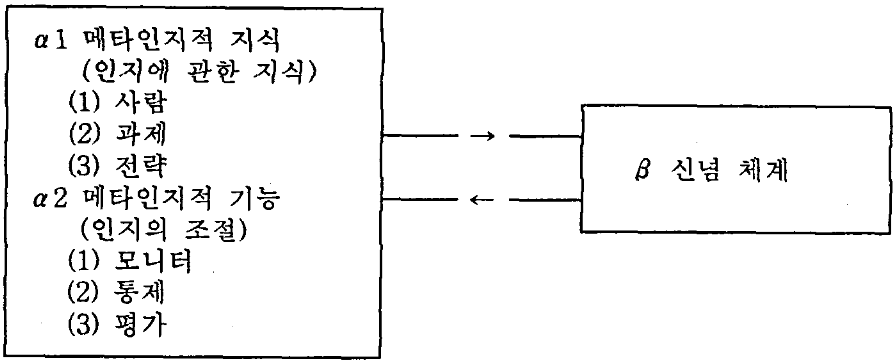
2. Brown의 분류

Brown은 모니터링, 자아 조절, 통제, 계획과 점검과 같은 메타인지의 역동적인 측면들을 강조한다. 메타인지의 정의와 설명에 대한 그의 공헌은 소위 메타인지적 지식에 대한 정련이었다. 정적 지식은 사람들이 흔히 인지라고 말하는 것들로, 가령, Flavell의 네 가지 범주에 관한 것들을 말한다. 그리고 전략적 지식은 인지적 활동이 실제로 발생할 때, 개인들이 그 인지적 활동의 과정을 실제로 조정하고 수정하는 그러한 단계들로 구성되어 있다. 그는 주장하기를 메타인지의 전략적 형태들은 이 분야에서의 연구와 발전의 매우 흥미로운 접근 수단이며, 메타인지의 정적인 형태가 흥미롭기는 하지만, 그들은 과학적인 조작과 모델 구안의 전망이 부족하다는 것이다.

모든 종류의 인지 활동에 거의 존재하는 일반적인 메타인지적 전략들은 다음과 같다(Yussen,1985). 첫째, 계획은 어떻게 진행할 것인가를 아는 것이며, 둘째, 예측은 기억 또는 이해되어야 할 지식의 분량 또는 어떤 과제의 완수에 걸릴 시간과 같은 인지적 활동의 결과의 어떤 양적인 측면을 말한다. 셋째, 추측은 어떤 완전한 인지적 해결에 도달하기 전에 답일 것이라고 시도해보는 것을 말하며, 넷째, 모니터링은 인지적 활동에서 우리가 어떤 목표에 얼마나 잘 도달하였는가를 평가해보는 것을 의미한다.

3. Schoenfeld의 분류

Schoenfeld는 다음 <그림 1>과 같이 지적 행동의 세 가지 관련된 다른 영역들에 촛점을 두었다. (1) 자기 자신의 사고 과정에 관한 자신의 지식 (2) 통제 또는 자아-조절 (3) 신념과 직관(Yamaguchi, 1993). Schoenfeld의 체계에서 신념 체계는 메타인지적 지식과 메타인지적 기능 뿐 아니라 메타인지와 관련된 중요한 측면으로 강조되었다. 정말로 신념 체계는 수학적 문제해결 수행에 중요한 영향을 미치는 것으로 생각된다. 가령, "나는 문장제를 해결하기가 어렵다고 느낀다" 와 같은 신념은 문장제 문제를 해결하는 데 부정적인 영향을 미칠 것이다. 그리고, "나는 수학을 좋아한다." 와 같은 신념은 긍정적인 영향을 미쳐 수학의 학습을 증진시킬 것이다.



<그림 1> 메타인지의 분류와 메타인지와 신념 체계의 관계(Yamaguchi, 1993)

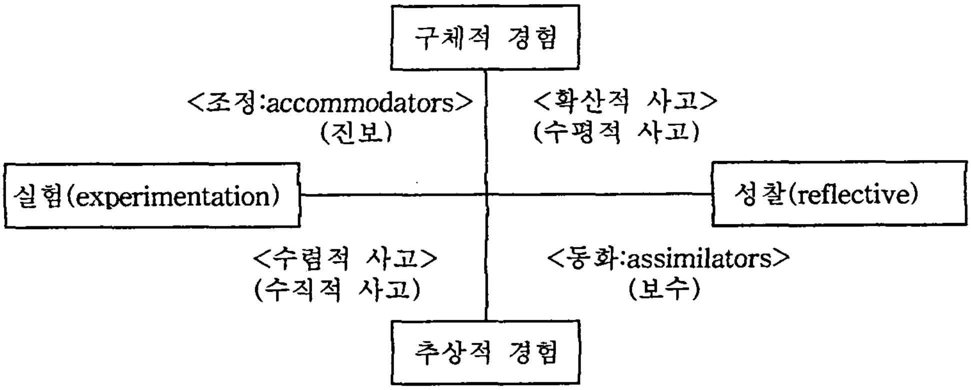
한편, Shigematsu & Katsumi(1993)는 "메타인지"를 교사에 대한 대체 개념인 또 다른 자아, 즉 "내적 교사"로 보고 있다.

Ⅲ. 수학에서의 창의력

창의성이란 인지의 종류 중 확산적 사고의 영역에 해당하는 것으로, 주어진 문제 상황에서 미지의 정보를 이용한 새로운 생각들로 새로운 형태의 문제해결을 발현시키는 것으로 볼 수 있다.

이중석(1993)은 창의성을 무의식의 세계에서 돌출하는 噴水 感情에 의한 頂上 經驗으로 보고, 정상 경험의 조건들로, 完美의 經驗(experience of perfection), 知的 發見(intellectual discovery), 音樂的 鑑別(musical appreciation), 戀愛 關係에 沒入하는 것 등을 들고 있다. 창의성의 과정은 Wallas에 의하면, 苦肉(準備)(thorn in the flesh), 孵化(incubation), 閃光(illumination), 確認(verification)의 과정을 거친다. 그리고 창의

성의 종류는 Tayler에 의하면 表現形(expressive creativity), 技術形(technical creativity), 創案形(inventing creativity), 突出形(emergentive creativity), 刷新形(innovative creativity) 등이 있다(이중석,1993)고 한다.



<그림 2> 인지의 종류(이중석, 1993)

창의력은 고등 수학적 사고 전체에 중요한 역할을 수행한다. 그것은 가능한 추측이 수학적 상황에 대한 개인적 경험의 결과로 형성될 때 수학적 이론 발달의 최초의 단계에 공헌한다. 그것은 또한 명확하게 정의된 공리와 형식적으로 구성된 증명을 구비한 하나의 연역적 체계로서의 수학의 최종적인 구조물의 형성에도 어떤 역할을 수행한다. 그것은 새로운 아이디어들이 이전에는 수학적 사회에 알려지지 않은 방법으로 형성될 때, 수학의 연구에서 필수적인 요소이다. 그러나 그것은 수학 이론의 외적인 것이다. 그것은 인간의 활동이며, 메타-과정으로, 새로운 수학을 발생시키는 것이다. 그래서 그것은 이따금 신비로운 현상으로 간주되기도 한다. 대부분의 수학자들은 그들 스스로의 사고 절차들의 분석에는 관심이 없으며, 그들의 이론들을 어떻게 연구하며 생각하였는가를 설명하지는 않는다. 소수(Poincaré, Hadamard 등)만이 수학적 창의력과 관련된 생각들을 분명하게 묘사하려고 하였을 뿐이다(Ervynck, 1991).

1. 수학적 창의력의 발달 단계

수학적 창의력은 진공 상태에서는 발생하지 않는다. 그것은 개인이 어떤 방향으로 나아가는 중요한 단계에서 선행 경험으로 준비되어 있는 어떤 상황을 필요로 한다. 그러한 준비는 창의력의 발달을 위한 적절한 환경을 이루는 선행적인 활동들을 통하여 발생한다. 창의력을 위한 상황은 수학적 절차들이 수학적 사고의 대상들로 되기 전에 활동을 통하여 내면화되는 준비 단계에서 시작된다고 볼 수 있다(Ervynck,1991).

<0 단계> 예비적인 기교 단계

순수한 수학적 활동은 일종의 수학적 규칙과 절차들에 대한 이론적 기초에 대해서 인식하지 않고서도 일종의 기교적 또는 실용적인 응용으로 구성된 예비 단계에서 선행될 수 있다고 볼 수 있다. 그러한 실용적인 절차의 예는 고대 메소포타미아와 이집트에서 직각을 만드는 데 이용된 규칙을 들 수 있다. 그들은 길이 3, 4, 5의 세 부분의 눈금으로 나누어 표시된 줄을 사용하여, 삼각형 모양으로 만들어 3과 4의 길이를 가진 변들 사이에서 직각을 얻었다. 이러한 준비 단계는 가령, "도구-대상 변증법" (Douady, Cited in Ervynck, 1991)이라는 것으로 설명될 수 있으며, 그것은 아이디어가 문제해결 활동의 한 부분으로써의 도구로 먼저 도입되어야 하며, 그 자체가 대상으로써 반영되기 이전에 개인의 경험적 인지 구조의 일부가 되어야 한다고 주장하는 것이다.

<1 단계> 알고리즘적인 활동

이 단계에서 절차들은 수학적 연산들을 수행하고, 계산하고, 조정하고, 해결하는 데 사용된다. 알고리즘적 활동은 본질적으로 수학적 기교의 수행과 관련되어 있다. 그러한 기교의 예들로는 알고리즘의 응용, 공식의 유도, 다항식의 인수분해, 적분 계산, 미분방정식의 해결을 위한 수치적 방법들과 같은 컴퓨터 프로그램들을 포함한 컴퓨터를 이용한 계산적인 활동 들을 들 수 있다. 이 첫 번째 단계에 관한 그러한 활동들의 특징은 그들이 매우 분명할 필요가 있다는 것이다. 모든 중간 단계들은 적어도 정확해야 한다. 그렇지 않으면, 심각한 오차가 발생하여 그 결과는 완전히 무가치한 것으로 되고 만다. 컴퓨터 알고리즘의 경우, 아무리 사소한 어떤 단계도 망각되어선 안된다. 알고리즘에서 빠진 단계는 재생되지 않는다. 그러한 활동들은 2 단계에서 설명될 보다 높은 활동들의 원리들과 조화를 이루어 창출될 전반적인 이론의 일부로 볼 수 있기 때문에, 고등수학의 일부로 수용되는 것이다. 알고리즘적인 활동이 보다 높은 수준의 이론에서 조작될 지적 대상들로 간주되기 이전에 내면화되고 일반화되어야 하기 때문에 수학 학습의 본질적인 부분이라 볼 수 있다. 도구-대상 변증법에서와 같이 도구는 반영적 활동의 촛점이 되기 전에 활동으로 친숙해져야 하는 것은 필수적인 것이다.

<2 단계> 창의적 활동

진정한 수학적 창의력이 발생하고 수학 이론의 발전에서 원동력으로써 작용하는 것은 이 2 단계에서이다. 비알고리즘적인 의사결정은 근본적인 개념 구조의 분기를 뜻하는 것으로 보이는 방법으로 취해진다. 수학적 창의력은 그러한 단계들을 수행하는

능력이다. 취해야 할 결정들은 매우 다양한 성격을 띄며, 언제나 정의되어야 할 어떤 개념의 선택이나(가령, 개집합의 개념에 대한 Hausdorff의 선택에서와 같이, 그것은 수학의 중요한 부분들에서 매우 중요한 것으로 입증되었다) 정리를 진술하고 증명할 방법의 결정과 같은 선택을 언제나 포함한다. 후자는 두 개의 다른 창의적 단계들을 필요로 한다. 귀결되는 결론이 보다 광범위한 이론에 걸쳐 가치로운 적절한 가설들의 선택 단계와 그 정리의 증명을 완수하기 위하여 가설로부터 실제적인 연역을 하는 단계이다.

수학적 창의력이 세인의 이목을 끄는 것은 그러한 복잡한 활동들에서의 창의력이다. 수학적 창의력이 활성화되도록 하는 데는 독단적으로 어떤 형식적인 이론을 가질 필요는 없다. 창의력의 가장 활성적인 부분은 재생과 개혁의 정신으로서의 직관적인 수준에서 작용한다. Davis & Hersh는 그것은 조잡한 것(직관적인 것)에서 정제된 것(형식화된 것)으로의 관문에서 성취된다고 주장한다(Ervynck, 1991). 개인에게 필수적인 것은 이전에는 무관계한 개념들을 관련시키는 정신적 활동을 위하여 준비된 마음의 상태이다. 그것은 가끔 상황과 모든 구성 요소들에 대한 의식 상태가 고조된 일련의 강렬한 활동이 있은 후에 발생하는 것으로 관찰되었다. 그리고 그것은 마음이 안정되고 잠재의식적으로 조용하고 강요받지 않는 명상으로부터 도움을 받아 아이디어들을 관련시킬 수 있을 때, 더 좋은 결실을 맺는 것으로 보인다.

높은 수준의 창의력은 덜 정제된 상황에서는 발현되지 않는 근본적인 형태들과 공명할 수 있도록 조율된 정신적 구조의 미묘함을 요한다. 수학적 복잡성이 다른 수준들에서 해결될 수 있는 어떤 문제의 예를 들어보기로 한다. 첫째 (낮은) 수준은 주로 알고리즘의 응용에 의존한다; 관련된 창의력은 전체 수학에서의 그 문제의 전반적인 위치의 재인식과 적절한 모델의 구성 만을 요한다(가령, 연립일차방정식이나 진리표). 둘째 (더 높은) 수준은 알고리즘의 직접적인 응용은 피하지만, 수학적 모델의 내부의 직접적인 추론에 터하고 있다. 어떤 통찰과 직관은 문제의 올바른 해결 방법을 개발하는 데 필요하다. 환경(모델)은 여전히 일반적인 이론으로부터 빌려온 것이지만, 문제를 직접 해결하는 것은 주어진 상황으로부터의 직접적인 추론에 의하여 수행된다. 세째 (가장 높은) 수준은 그 모델을 완전히 버리고, 어떤 형식화된 이론의 밖에서 추론하고, 그 문제에서 진술된 바에 대한 지적인 조사에 의해 처음부터 해를 구하는 것이다.

문제: 어떤 사람은 생의 1/6을 소년으로, 1/12을 청년으로, 1/7을 미혼으로 살았다. 그의 아들은 결혼 후 5년 만에 태어났으며, 그의 아버지보다 4년 먼저 사망하였다. 아들의 생애는 아버지의 절반이었다. 아버지가 사망한 나이는?

가. 수학적 창의력이 낮은 수준에서의 해결

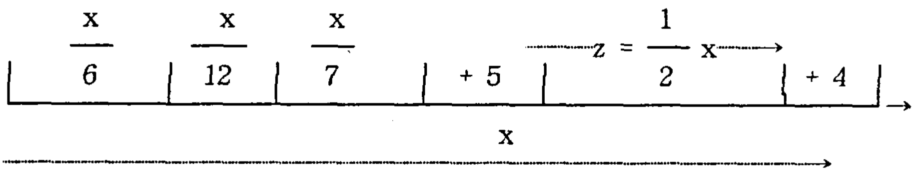
x: 아버지의 사망 시 나이

y: 아버지의 결혼후의 삶의 기간

z: 아들의 사망 시 나이

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + y = x, \quad 5 + z + 4 = y, \quad z = \frac{x}{2}, \quad \text{따라서, } x = 84$$

나. 수학적 창의력이 더 높은 수준에서의 해결



$$\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7}\right) x + 9, \quad \text{따라서, } x = 84$$

다. 세 번째 수준의 해결

문제를 해결하기 위한 보다 복잡한 방법은 직관, 경험, 그리고 그 문제의 본질에 함축된 어떤 그럴듯한 가정들에 기초를 두고 있다. 첫 번째 가설은 나이는 일반적으로 0 에서 100 사이의 양의 정수로 표현된다는 가정이다. 이 그럴듯한 출발점은 정수해를 찾는 것이다. 두 번째 단계는 나타나는 분수들 1/6, 1/12, 1/7 역시 범자연수일 아버지의 삶의 기간을 언급할 것이라는 가정이다. 결정적인 단계는 분모 6, 12, 7은 0과 100 사이에서 공배수를 거의 갖지 않으므로 최소공배수를 계산하는 것은 유용할 것이다. 그것은 84이다. 검증은 84가 유일한 해임을 확증시켜 준다.

이러한 높은 수준의 수학적 활동은 문제 제기자의 연구방법들에 대한 통찰력 뿐 아니라 수론에 대하여 고도로 조율된 경험을 필요로 한다. 그것은 구식의 문제를 새로운 방법으로 해결할 때 창의적인 수학자에 의해 취해질 수 있는 비상한 관문들을 예

증해준다. 그러나 새로운 상황들에서의 새로운 수학의 창의력의 역할을 분석할 수 있으려면 우리는 먼저 고등수학의 본질을 수학적 창의력의 주요 목표로 간주해야 한다.

2. 수학 이론의 구조와 수학적 창의력

형식적인 수학의 이론이란 다음 <그림 3>과 같이 개념들의 정의와 정의된 개념들 간의 관계들로 구성된 체계라고 할 수 있다.

<그림 3> 형식적인 수학의 이론

여기서 관계란 연역적인 규칙들로부터 출현하는 매우 특수한 것이다. 이것은 개념의 정의가 매우 정확하여야 할 필요성을 필연적으로 수반한다. 그 개념들은 연결망의 연결고리들이고, 관계들은 연결고리들을 연결하는 유향선분들인 것으로 생각될 수 있다. 연결은 논리적으로 기본적인 연결고리들로부터 더 복잡한 고리들로 순서있게 진행된다.

수학적 창의력은 추측과 논의에 의해 그러한 체계의 부분들을 구성할 뿐 아니라 그 구조를 연역적인 체계로 정련할 관점을 필요로한다. 창의성이란 적어도 다음과 같은 목적들 중의 하나를 실현할 필요가 있다. ① '유용한' 새로운 개념을 창안하는 것, 여기서 '유용하다'는 것은 현재의 이론을 표현하는 데 더 선호되는 것 ② 두(그 이상의) 연결고리들 간의 이전에 알려지지 않은 관계를 필요한 순서대로 발견하는 것 ③ 유용한 순서를 구성하는 것, 즉 그 논리적, 연역적 순서가 더욱 명확해지게 하는 그러한 이론의 부분을 조직하는 것을 말한다. 군론에서와 같이 예전엔 공리화되지 않은 이론에 대한 성공적인 일련의 공리들의 분류는 위의 세 가지 목적들이 실현된 수학적 창의력의 사례로 간주될 수 있을 것이다.

수학적 창의력이란 본질적으로 수학적 대상들을 창안하는 능력이며, 동시에 그들의 상호 관계들을 발견하는 것으로 볼 수 있다. 이러한 활동은 여기서는 알고리즘적인 수학적 대상들 (앞에서 언급된 "첫 번째 단계")과는 다른 것으로, 심지어 반대되는 것으로 간주된다. 잠정적인 정의는 다음과 같다.

수학적 창의력은 수학의 독특한 논리-연역적 성격을 이용하고 수학에서 중요한 핵심으로 통합시키기 위하여 일반적인 개념들의 적합성을 이용하여 문제를 해결하는 능력이며, 동시에 사고를 구조적으로 발전시키는 능력이다.

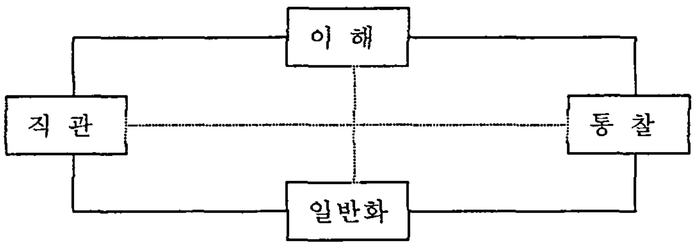
수학적 창의력의 작동 절차들은 앞에서 논의된 단계들과 밀접하게 연결되어 있다. 그들은 본질적으로 연구하는 수학자의 창의력을 선도하는 추진력의 설계이며, 일반적으로 다음과 같은 순서로 작동된다. ① 연구하여 교과와 친숙해진다. ② 교과의 심오한 구조에 대한 직관을 가진다. ③ 상상력과 영감을 가진다. ④ 연역적(형식적) 구조내에서 체계화된 결과를 도출한다. 수학적 창의력의 잠재력을 갖는 개념적 구조들을 마음에 새겨두는 것은 연구로 인하여 교과와 친숙해지려는 노력이다. 직관은 새로이 획득된 자료들에 관한 그러한 개념적 구조들에 대한 활동의 산물이다. 직관은 세련된 도구로 연마될 수 있다. 정신적 구조가 보다 세련될수록, 세련된 직관들을 산출할 가능성은 더 커진다. 그러한 직관들이 필요한 결과들을 형성하는 상상력과 영감으로 인도하는 것은 교과의 심오한 구조에 대한 반영에 의해서이다. 여기서 직관은 처음에는 불완전한 형태이지만 반영에 의해서 형식적이고 연역적인 순서로 조율되는 것이다.

3. 수학적 창의력의 原動力

수학적 창의력의 원동력은 다음 <그림 4>와 같이 열거될 수 있는 몇 가지 요소들의 상호작용으로부터 유래한다고 볼 수 있다.

<이해> 어떤 정리나 이론의 일부의 저자의 수학적 창의력의 단계들을 재생하는 능력... 수학적 창의력은 어떤 개념의 이해의 심화와 통찰을 동시에 하는 데 기초를 두고 있다.

<직관> 그럴듯한 추측들의 구안을 가능하게 하기 위하여 형식적인 개념에 충분히 가까운 개념의 심상의 형성. 직관은 수학자로 하여금 역시 효과적인 선택을 할 수 있게 해준다. 직관과 관련되며 수학적 창의력의 과정에서 추진력으로써 작용하는 똑 같이 중요한 다른 요소들은 상상력, 수학적 환상과 호기심이다(Dieudonnè, Cited in Ervynck, 1991).



<그림 4> 수학적 창의력의 요소

<통찰> 새로운 지식의 형성으로 나아가는데 필요한 추진력. 이것은 관심의 재집중과 중요한 것을 강화하는 새 방향 심지어 장래에 중요하게 될 것을 예측하는 새로운 방향성을 포함한다.

<일반화> 일반화 능력은 그것이 장래에 무엇이 중요할 것인가를 예측할 능력에 주로 의존하므로 통찰과 관계되어 있다. 일반화란 수학적 창의력의 한 형태이지만, 이따금은 단지 약한 형태일 뿐이다: 어떤 이론의 일반화는 어려울 경우도 있고 간단한 경우도 있다. 어떤 때에는 그것은 착각일 수도 있다. 가령, 임의의 유한군은 치환군으로 표현될 수 있다. 유한군의 이론에서 Galois 와 Jordan의 치환군 이론의 일반화는 오직 재형성일 뿐이다. 비록 그것은 전자의 보다 훌륭한 구현인 것은 분명하지만 말이다.

이해란 단지 과정들을 실행할 수 있기 위한 도구적 이해 뿐 아니라 개념들 간의 관계의 유의미한 파악을 필요로 하는 Skemp의 관계적 이해를 의미한다. 심지어 이것은 충분하지 않다. 왜냐하면, 그것은 개념들이 현재 알려져 있는 상황에서 개념들간의 유의미한 관계를 의미하기 때문이다. 창의력이란 전에는 생각되지 않았던 방법으로 이러한 상황의 확대를 요한다. 그러므로 그것은 개인이 새로운 아이디어들을 창안하고 오래된 아이디어들을 새로운 방식으로 통합하는 것을 필요로 한다. 그것은 요구대로 실행될 수 있는 그 무엇은 아니다. 그것은 Poincaré의 완화와 부화기를 필요로 한다. 준비가 잘되고 운이 좋은 상태에서, 부화는 창의적인 도약을 가져오기 위하여 분출하는 기본적인 통찰로 이끄는 직관들을 부추긴다. 일반화에는 기본적으로 두 가지 종류가 있다. 이른바 확장적 일반화, 그것은 인지 구조의 본질을 변화시키지 않고 이론의 적용을 넓히는 것이며, 재구성적 일반화, 그것은 지식 구조가 재조직될 필요가 있는 것이다. 전자가 상대적으로 손쉬운 반면, 후자는 대단히 곤란한 인지적 전이를 필요로 하는 바, 그것은 특정 인물의 개인적 자질이 경쟁에서 이겨내야 할 필요가 있는 것이다. 후자는 선행지식의 일반화일 수 있다. 그것은 현행의 인지도식을 보다 넓은 상황으로 확대하는 것을 의미한다.

4. 수학적 창의력의 특성과 결과

가. 수학적 창의력의 특성

수학적 창의력이란 수학 문제에 대한 창의적인 문제해결력이라 할 수 있다. Ervynck(1991)은 창의력의 특성을 다음과 같이 관계성, 선택성, 적합성, 요약성 등을 들고 있다.

(1) 관계성(relational)

수학적 창의력은 상호작용을 통하여 자극하며, 어떤 아이디어가 출현하여 초기의 서로 다른 형태의 개념들을 단 하나의 개념으로 통합하는 것처럼, 두 세개의 개념들 간의 개념적 연결을 달성한다. 수학자의 마음 속의 생각들의 상호작용은 아마 수학적 창의력의 가장 중요한 추진력일 것이다. 수학적 생각들과 개념들은 어떤 새로운 형태를 이루기 위하여 움직이는 벽돌 블럭과 콤바인처럼 작용한다. 만약 어떤 형태가 선호되면, 그것은 이론화된다. 이것은 이미 Poincaré에 의해 설명되었다.

(2) 선택성(selective)

생물학에서의 적자생존의 원리와 마찬가지로, 수학적 개념들에서도, 자연적으로 선택되고 적자만이 생존하게 된다. 가령, 19세기 말과 20세기 초에 리이만 적분을 일반화하기 위해 확립된 여러 가지 적분 이론이 서로 경쟁하여 마침내 Lebesgue 적분이 살아 남아 수학의 해석학을 석권하고 있다(Van Dalen & Monna, Cited in Ervynck, 1991).

(3) 적합성(fitness)

적합성은 수학에서의 정의와 정리 그리고 일련의 공리들에 대한 질을 평가하는 준거이다. 잘 알려진 바대로, Stanislas Ulam의 추산에 의하면 일년에 200,000 개의 정리들이 공표되므로 거름 장치가 필요하다. 사실상, 거름 장치는 존재하며 우선 수많은 학술 잡지의 심판관은 없지만, 모르는 사이에 자발적으로 작동한다. 수학적 생존 경쟁을 통하여 적절한 생각들 만이 생존한다.

(4) 요약성(condensing)

수학적 창의력은 수학적 개념들의 표상을 위한 적절한 문구와 기호들을 선택할 능력을 포함한다. 수학에서의 기호적 표상의 중요성은 과대평가될 수 없다. 잘 선택된 기호는 그 기호가 교재에 출현할 때마다 일깨워지는 한 개념의 여러 가지 측면들을 단 하나의 전체로 압축할 수 있게 한다. 이러한 방법으로 기호의 사용은 마음 속의 "기억 공간"을 자유롭게 하여 다른 여전히 모르거나 불분명한 개념들을 위하여 사용될 수 있게 해준다.

나. 수학적 창의력의 결과

수학적 창의력의 과정이 있은 후, 새로운 생각들이 수학 세계에서 수용되고 살아남기 위해서는 나타나야 할 여러 가지 성질들이 존재한다. 새로운 생각들이 "훌륭한 수학"이 되도록 하는 준거는 다음과 같다(MacLane, Cited in Ervynck, 1991)

(1) 계몽성(Illuminating)

훌륭한 수학은 이해에 도움이 되는 것이어야 한다. 분명하지 않은 결과는 창의적이지 못하며, 창의력은 길고 기교적인 계산에 몰두하는 방향 부적합한 방향으로는 사용되지 않는다. 똑 같은 이유로, 첫 번째 단계(알고리즘적인 활동)에서의 수학적 창의력은 매우 낮은 것이라 할 수 있다.

(2) 관련성(Deep)

수학적 창의력은 숨겨진 관련성들을 밝혀내는 것이어야 한다. 심오한 결과는 반드시 증명하기 어려울 필요는 없지만, 그 관련성과 응용의 면에서 광범위하여야 한다.

(3) 생산성(Responsive or fruitful)

창의성의 성공적인 결과물은 선행 연구의 결과에 기초를 두고서 현재의 요구에 부응하는 것이어야 한다. 만약 그것이 살아남기 위해서는 또한 생생한 수학의 본질적인 부분으로 남기 위한 장래의 발전의 기초를 제공하는 것이어야 한다.

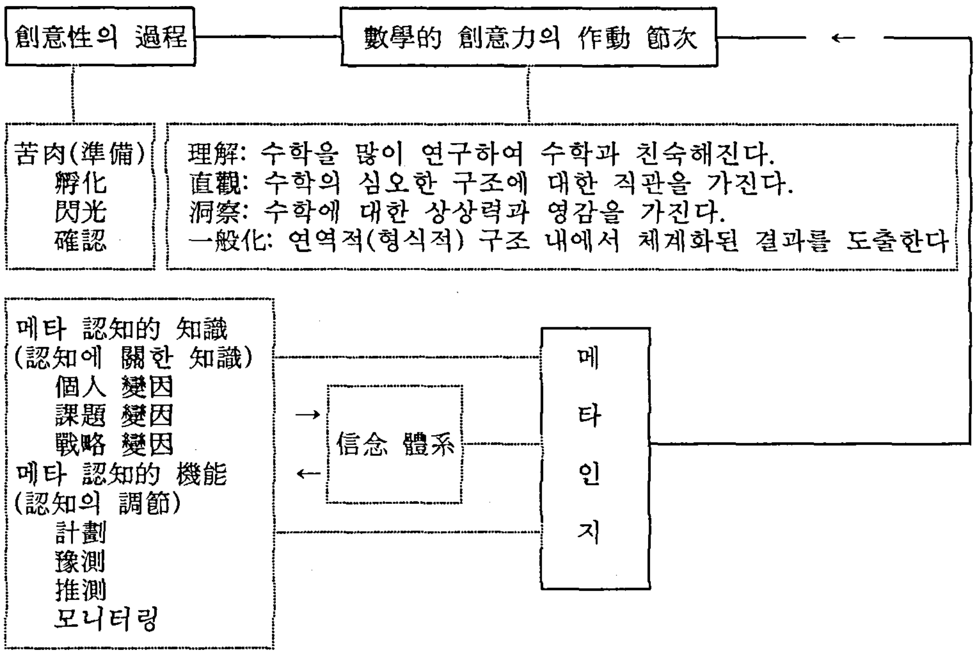
(4) 독창성(Original)

결과물들에는, 무언가 예기치 않은 것, 그 분야에서 새로운 것이 있어야 한다. 그것이 만약 알려진 것들의 재정리에 지나지 않는다면, 성취한 바의 창의적인 측면에 관한 강한 의심이 있을 것이다.

Ⅳ. 결 론

메타인지는 최근들어 각광을 받는 연구 분야이다. 이러한 유형의 지식과 기능들에 관해서는 상대적으로 거의 알려진 바 없었다.

이 분야의 연구에서 알 수 있는 것은 전문가는 그들의 구체적인 전문 영역에 대하여 더 많은 지식을 보유하고 있을 뿐 아니라 그 지식을 응용하는 방법의 면에서 그리고 이러한 접근 방법들을 지식이 요구되는 과제들에 보다 광범위하게 적용한다는 점에서 초보자와 다른 경향성을 보인다는 관점에서는 일치한다. 계획과 전략에 더 큰 비중을 두고, 시간과 자원의 운용을 더 잘하며, 과정에 대한 보다 신중한 모니터링과 평가를 하는 것 등이 교과와는 무관한 전문가의 수행의 특징인 것으로 보인다.



<그림 5> 수학적 창의력에서의 메타인지의 역할

형식적인 수학의 이론이란 개념들의 정의와 정의된 개념들 간의 관계들로 구성된 체계라고 할 수 있다. 그리고 수학적 창의력은 수학의 독특한 논리-연역적 성격을 이용하고 수학에서 중요한 핵심으로 통합시키기 위하여 일반적인 개념들의 적합성을 이용하여 문제를 해결하는 능력이며, 동시에 사고를 구조적으로 발전시키는 능력이다. 이러한 수학적 창의력의 발달 단계는 예비적인 기교 단계, 알고리즘적인 활동, 창의적 활동 등으로 나누어 볼 수 있다. 또한 수학적 창의력의 원동력은 이해, 직관, 통찰, 일반화 등의 상호작용이며, 이는 메타인지적 지식과 메타인지적 경험에 의하여 촉진될 수 있을 것이라 생각된다.

참 고 문 헌

이중석. (1993). 교육의 심리적 기초 강의노트. 한국교원대학교대학원.

Ervynck, G. (1991). Mathematical ceativity. In D. Tall (Ed.) Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Shigematsu, K. & Katsumi, Y. (1993). Metacognition: The role of the "inner teacher"(5): research on the process of internalization of "inner teacher". PME XVII, July 18-23,1993. Tsukuba: University of Tsukuba.

Yamaguchi, T. (1993). A study of metacognition in mathematical problem solving: The role of metacognition on solving a construction problem. PME XVII, July 18-23,1993. Tsukuba: University of Tsukuba.

Yussen, S. R. (1985). The role of metacognition in contemporary theories of cognitive development. In D. L. Forrest-Pressley et al(Eds.), Metacognition, cognition, and human performances: Vol.1, theoretical perspectives. Florida: Academic Press, INC.