韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 프로시딩>
1997. 7. 제6집, 383-407.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Proceedings of Mathematical Education
Series E: July 1997, Vol. 6, 383-407.

다원환의 보편적 미분가군

한 재 영 (충북대학교)
연 용 호 (충북대학교)

ABSTRACT. 가환다원환의 대수적 미분에 관한 성질들은 많은 연구의 대상이 되어 왔다. 본 논문은 가환 다원환에서 정의된 대수적 미분의 일반화로써 가환일 필요가 없는 일반다원환의 대수적 미분의 성질을 연구한 것이다. 비가환다원환의 미분정의를 바탕으로 하여 가환다원환에서 연구되어 온 보편적 미분가군의 성질을 일반다원환 의 미분가군에 적용하려고 노력하였다. 이 논문에서 사용한 정리의 증명과정이나 기본개념은 가환다원환의 미분개념에서 나타난 성질들을 바탕으로 하였다.

0. 서 론

R이 단위원 1을 갖는 가환환이라 하자. A가 가환인 R-다원환이고, M이 A-가군일 때, $d(ab) = ad(b) + bd(a)$, $a, b \in A$를 만족하는 R-선형사상 $d : A \to M$을 A의 R-미분이라 하고, M과 A의 R-미분 d의 쌍 (M, d)를 A의 미분가군이라 한다. A의 두 미분가군 (M, d)와 (N, δ)에 대하여, A-가군준동형사상 $f : M \to N$이 존재하여 $f \circ d = \delta$일 때, f를 미분가군준동형사상이라 하고, $f : (M, d) \to (N, \delta)$로 나타낸다. A의 미분가군 (U, d)로부터 임의의 미분가군 (M, δ)로의 미분가군 준동형사상 f가 유일하게 존재할 때, (U, d)를 A의 보편적 미분가군이라 하고, R-미분 $d : A \to U$를 보편적 미분이라 한다.

가환인 R-다원환의 보편적 미분가군이 존재한다는 것과 이 보편적 미분가군들은 동형사상에 의하여 유일하다는 것은 [3], [4], [5], [9]에서 잘 알려져 있다. 단위원 1을 갖는 가환인 R-다원환 A에 대하여 서로 다른 두 가지 형태의 보편적 미분가군이 존재한다. J를 $1 \otimes ab - a \otimes b - b \otimes a$, $a, b \in A$와 같은 형태의 원들에 의해 생성된 $A \otimes_R A$의 부분가군이라 할 때, R-미분 $d : A \to (A \otimes_R A)/J$, $d(a) = 1 \otimes a + J$, $a \in A$에 대하여 $((A \otimes_R A)/J, d)$는 A의 보편적 미분가군이다. 또한, 사상 $\pi : A \otimes_R A \to A$가 $\pi(a \otimes b) = ab$, $a, b \in A$ 로 정의된 곱사상이고, $I = \ker \pi$라 할 때, R-미분 $d : A \to I/I^2$, $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1 + I^2$, $a \in A$ 에 대하여 $(I/I^2, d)$도 A의 보편적 미분가군이다.

R이 단위원 1을 갖는 가환환이고, A가 단위원 1을 갖는 R-다원환이라 하자(이 다원환은 가환일 필요는 없다). A-좌가군인 동시에 A-우가군인 M이 임의의 $a, b \in A$, $x \in M$에 대하여 $a(xb) = (ax)b$를 만족할 때, M을 (A, A)-좌우가군이라 한다. A^{op}가 A와 같은 집합으로 A^{op}내의 곱 $\circ$을 $a \circ b = ba$, $a, b \in A$로 정의한 반대다원환이라 할 때, 다원환 $A \otimes_R A^{op}$를 R-다원환 A의 포락다원환이라 한다. 만약 M이 (A, A)-좌우가군이면 M에서의 스칼라곱을 $(a \otimes b)x = a(xb) = (ax)b$, $a, b \in A$, $x \in M$로 정의함에 의하여 M은 $A \otimes_R A^{op}$-좌가군을 이룬다. 그러므로 계산의 편리에 따라 (A, A)-좌우가군 M을 $A \otimes_R A^{op}$-좌가군으로 바꾸어 생각할 수 있다.

R-다원환 A와 (A, A)-좌우가군 M에 대하여 R-선형사상 $d : A \to M$이 $d(ab) = ad(b) + d(a)b$, $a, b \in A$을 만족할 때, d를 R-미분이라 한다. (A, A)-좌우가군 M과 R-미분 $d : A \to M$의 쌍 (M, d)를 A의 미분가군이라 한다. A의 두 미분가군 (M, d)와 (N, δ)에 대하여 M으로부터 N으로의 (A, A)-좌우가군준동형사상 f가 $f \circ d = \delta$를 만족할 때 이를 미분가군준동형사상이라 하고, $f : (M, d) \to (N, \delta)$로 나타낸다. 미분가군준동형사상이 일대일대응일 때, 이를 미분가군동형사상 이라 한다. (U, d)가 A의 미분가군이고, A의 모든 미분가군 (M, δ)에 대하여 미분가군준동형사상 $f : (U, d) \to (M, \delta)$가 유일하게 존재할 때, (U, d)를 A의 보편적 미분가군이라 한다.

임의의 다원환에 대하여 서로 다른 두 가지 형태의 보편적 미분가군이 존재한다. 하나는 [1]에서 주어진 것이며, 다른 하나는 다원환의 삼중텐서곱을 이용하여 만들어진 보편적 미분가군이다. 이렇게 다른 형태의 보편적 미분가군들은 문제의 성격에 따라 다르게 이용될 수 있으며, 이러한 보편적 미분가군은 미분가군동형사상에 의하여 같은 구조를 갖고 있음을 알 수 있다. 실제로, (U, d)와 (V, δ)가 모두 A의 보편적 미분가군이라 하면, 보편적 미분가군의 정의에 의하여 미분가군준동형사상 $f : (U, d) \to (V, \delta)$와 $g : (V, \delta) \to (U, d)$가 존재하여 $f \circ d = \delta$, $g \circ \delta = d$이고, 사상 $g \circ f : U \to U$와 $f \circ g : V \to V$는 (A, A)-좌우가군준동형사상으로 각각 $(g \circ f) \circ d = d$, $(f \circ g) \circ \delta = \delta$이다. 또한, 항등사상 $i_U : U \to U$와 $i_V : V \to V$도 $i_U \circ d = d$, $i_V \circ \delta = \delta$를 만족하는 (A, A)-좌우가군준동형사상이다. 따라서 이러한 미분가군준동형사상의 유일성에 의하여 $g \circ f = i_U$, $f \circ g = i_V$이므로 사상 f는 일대일대응이며, (A, A)-좌우가군으로써 $(U, d) \cong (V, \delta)$이다. 또한, 다음과 같은 두 가지 형태의 보편적 미분가군이 있다.

A가 단위원 1을 갖는 R-다원환이라 할 때, $A \otimes_R A \otimes_R A$의 좌우스칼라곱을

다음과 같이 정의하자.

$$a(\sum_i a_i \otimes b_i \otimes c_i) = \sum_i aa_i \otimes b_i \otimes c_i,$$

$$(\sum_i a_i \otimes b_i \otimes c_i)b = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes c_i b,$$

$a,\ b,\ a_i,\ b_i,\ c_i \in A$. 이 스칼라곱은 올바르게 정의된 곱이며 $A \otimes_R A \otimes_R A$는 위의 스칼라곱에 의하여 (A, A)-좌우가군을 이룬다. J를 다음과 같은 형태의 모든 원소에 의해 생성된 $A \otimes_R A \otimes_R A$의 (A, A)-부분가군이라 하자.

$$1 \otimes ab \otimes 1 - a \otimes b \otimes 1 - 1 \otimes a \otimes b, \quad a,\ b \in A$$

$U = (A \otimes_R A \otimes_R A)/J$라 놓고, 사상 $d : A \to U$를 $a \longmapsto 1 \otimes a \otimes 1 + J,\quad a \in A$와 같이 정의하면 (U, d)는 다원환 A의 보편적 미분가군이다.

A가 단위원 1을 갖는 R-다원환이라 하자. 사상 $\pi_0 : A \times A \to A$가 $(a, b) \longmapsto ab,\quad a,\ b \in A$로 정의된 R-쌍선형사상이고, 사상 $\pi : A \otimes A \to A$를 π_0의 R-선형화사상, $U = \ker \pi$라 하면, (U, d)는 A의 보편적 미분가군이다. A의 보편적 미분가군 (U, d)는 $d(A)$에 의해 (A, A)-좌우가군으로 생성되며 U의 모든 원소는 $\sum_i a_i d(b_i) = -\sum_i d(a_i) b_i$ 로 나타낼 수 있다.

R-다원환 A와 B에 대하여 사상 $f : A \to B$를 위로의 R-다원환준동형사상이라 하고, (U, d)가 A의 보편적 미분가군이라 하면, B의 보편적 미분가군 (V, δ)는 $(U/J, \partial)$와 동형이다. 여기에서 $J = U(\ker f) + (\ker f)U + Ad(\ker f)A$이고, 사상 $\partial : B \to U/J$는 $\partial(b) = d(a) + J,\quad b \in B,\quad a \in f^{-1}(b)$로 정의된 R-미분이다.

1. 다원환의 자유결합

$T(M)$이 R-가군 M을 포함하는 R-다원환이라 하자. 임의의 R-다원환 C와 R-선형사상 $\varphi : M \to C$에 대하여 R-다원환준동형사상 $f : T(M) \to C$가 유일하게 존재하여 $f|_M = \varphi$일 때, $T(M)$을 R상에서의 M의 텐서다원환이라 한다. R-가군 M의 모든 텐서다원환은 M에 의하여 생성되며 이것은 다원환동형사상에 의하여 유일하다.

$(A_\alpha)_{\alpha\in I}$가 R-다원환 A의 부분다원환의 모임이라 하자. 임의의 R-다원환 C와 R-다원환 준동형 사상의 모임 $\{f_\alpha : A_\alpha \to C\}_{\alpha\in I}$에 대하여 R-다원환준동형사상 $f : A \to C$가 유일하게 존재하여 $f|_{A_\alpha} = f_\alpha(\alpha \in I)$일 때, 다원환 A를 $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$의 자유결합이라 한다. R-다원환 A의 부분다원환 $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$의 직합 $\bigoplus_{\alpha\in I} A_\alpha$의 텐서다원환 $T(\bigoplus_{\alpha\in I} A_\alpha)$는 각각의 $A_\alpha\,(\alpha \in I)$에 대한 텐서다원환의 모임 $(T(A_\alpha))_{\alpha\in I}$의 자유결합이고, R-다원환 A가 부분다원환의 모임 $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$의 자유결합이면, A는 $A_\alpha(\alpha \in I)$에 의하여 다원환으로 생성된다.([4])

정리 1. 1. R-다원환 A가 이것의 부분다원환의 모임 $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$의 자유결합이고, R이 각각 $A_\alpha\,(\alpha \in I)$의 직합성분이라 하자. 각각의 A_α에 대하여 R-다원환준동형사상 $u_\alpha : A_\alpha \to R$가 존재하면, I의 서로 다른 원소로 이루어진 유한수열 $\beta = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$에 대하여 $a_1 \cdots a_k \longmapsto a_1 \otimes \cdots \otimes a_k$ $(a_i \in A_{\alpha_i},\ \ i = 1, 2, \cdots, k)$ 로 정의된 사상 $f : A_{\alpha_1} \cdots A_{\alpha_k} \to A_{\alpha_1} \otimes_R \cdots \otimes_R A_{\alpha_k}$ 는 R-가군동형사상이다.

A와 B가 R-가군 M을 포함하는 R-다원환, A_α, $B_\alpha\,(\alpha \in I)$가 각각 R-가군 M_α에 의하여 생성된 A와 B의 부분다원환, A가 $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$의 자유결합이라 하자. 사상 $h : A \to B$가 $h|_M = i_M$(M의 항등사상)인 R-다원환준동형사상이고 $h_\alpha : A_\alpha \to B$를 $h_\alpha = h|_{A_\alpha}$로 정의된 사상이라 하면, B가 $(B_\alpha)_{\alpha\in I}$의 자유결합이기 위한 필요충분조건은 h가 위로의 사상이고 $\ker h$는 $\sum_{\alpha\in I} \ker h_\alpha$에 의하여 생성된 A의 아이디얼이다([4]).

정리 1. 2. R-다원환 A가 부분다원환의 모임 $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$의 자유결합이고, $B = \bigoplus_{\alpha\in I} A_\alpha$라 하자. 사상 $h_\alpha : T(A_\alpha) \to A_\alpha$가 각각의 A_α에 대한 항등사상 i_{A_α}를 확장한 다원환준동형사상이면, 각각의 h_α를 확장한 다원환준동형사상 $h : T(B) \to A$는 위로의 사상이며 $ker\, h$는 $\sum_{\alpha\in I} ker\, h_\alpha$에 의하여 생성된 $T(B)$의 아이디얼이다.

정리 1. 3. R-다원환 A가 부분다원환의 모임 $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$의 자유결합이고, $\beta = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$가 모든 $i = 1, 2, \cdots, k-1$에 대하여 $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$인 I의 원소로 이루어진 유한수열이면, $(A_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes A_{\alpha_k}) \cap ker\, h = 0$이다.

정리 1. 4. R-다원환 A가 자신의 부분다원환의 모임 $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$의 자유결합이고, $\beta = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ 가 모든 $i = 1, 2, \cdots, k-1$에 대하여 $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$인 I의 원소로 이루어진 유한수열이면, $a_1 \otimes \cdots \otimes a_k \longmapsto a_1 \cdots a_k$, $a_i \in A_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \beta$ 로 정의된 R-선형사상 $f : A_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes A_{\alpha_k} \to A_{\alpha_1} \cdots A_{\alpha_k}$ 는 R-가군동형사상이다.

R-다원환 A가 부분다원환의 모임 $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$의 자유결합이고, $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ $(i = 1,2,\cdots,k-1)$이면, $A_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes A_{\alpha_k}$와 $A_{\alpha_1}\cdots A_{\alpha_k}$를 같은 R-가군으로 볼 수 있다. 또한, A는 $A_\alpha(\alpha\in I)$에 의하여 생성되므로 A의 모든 원소는 $x_1\cdots x_k$ $(x_i\in A_{\alpha_i})$로 나타낼 수 있고, $x_1\cdots x_k$는 $x_1\otimes\cdots\otimes x_k$의 형태로 나타낼 수 있다.

정리 1. 5. R-다원환 A를 부분다원환의 모임 $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$의 자유결합이라 하고, 각각의 $\alpha\in I$에 대하여 (U_α, d_α)를 A_α의 보편적 미분가군이라 하자.

$U = \bigoplus_{\alpha\in I} A\otimes_{A_\alpha} U_\alpha\otimes_{A_\alpha} A$와 R-미분 $D: A\to U$,

$D(\sum_\alpha x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_k}) = \sum_\alpha(\sum_{i=1}^k x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{i-1}}\otimes d_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})\otimes x_{\alpha_{i+1}}\cdots x_{\alpha_k})$, $x_{\alpha_i}\in A_{\alpha_i}$, $\alpha_i\in I$ 에 대하여 (U,D)는 A의 보편적 미분가군이다.

증명. 사상 $\varphi_i': A_{\alpha_1}\times\cdots\times A_{\alpha_k}\to(\bigotimes_{j=1}^{i-1}A_{\alpha_j})\otimes_{A_{\alpha_i}}U_{\alpha_i}\otimes_{A_{\alpha_i}}(\bigotimes_{j=i+1}^{k}A_{\alpha_j})$가 다음으로 주어진 R-다중선형사상이고,

$$(a_1,\cdots,a_k)\longmapsto a_1\otimes\cdots\otimes a_{i-1}\otimes d_{\alpha_i}(a_i)\otimes a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_k,\quad a_i\in A_{\alpha_i}$$

사상 $\varphi_i: A_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes A_{\alpha_k}\to(\bigotimes_{j=1}^{i-1}A_{\alpha_j})\otimes_{A_{\alpha_i}}U_{\alpha_i}\otimes_{A_{\alpha_i}}(\bigotimes_{j=i+1}^{i-1}A_{\alpha_j})$가 φ_i'의 R-선형화사상이라 하자. 정리 1.4에서 주어진 세 개의 R-가군동형사상 $f_k: A_{\alpha_1}\cdots A_{\alpha_k}\to\bigotimes_{j=1}^{k}A_{\alpha_j}$, $h_{i-1}:\bigotimes_{j=1}^{i-1}A_{\alpha_j}\to A_{\alpha_1}\cdots A_{\alpha_{i-1}}$, $g_{i+1}:\bigotimes_{j=i+1}^{k}A_{\alpha_j}\to A_{\alpha_{i+1}}\cdots A_{\alpha_k}$에 대하여, $D_{\alpha_i}=(h_{i-1}\otimes 1_{U_{\alpha_i}}\otimes g_{i+1})\circ\varphi_i\circ f_k$라 놓으면, f_k, h_{i-1}, g_{i+1}, 그리고 항등사상 $1_{U_{\alpha_i}}$는 모두 R-가군동형사상이고, φ_i가 R-선형사상 이므로 D_{α_i}는 $A_{\alpha_1}\cdots A_{\alpha_k}$로부터 $A_{\alpha_1}\cdots A_{\alpha_{i-1}}\otimes_{A_{\alpha_i}}U_{\alpha_i}\otimes_{A_{\alpha_i}}A_{\alpha_{i+1}}\cdots A_{\alpha_k}$로의 R-선형사상이다. 사상 $D: A\to U$를 다음과 같이 정의하면,

$$D(\sum_\alpha a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_k})=\sum_\alpha\sum_{i=1}^k D_{\alpha_i}(a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_k}),\quad a_{\alpha_i}\in A_{\alpha_i},\ \alpha_i\in I$$

각각의 D_{α_i}가 선형사상이므로 D도 선형사상이다. A의 원 $a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_k}$에 대하여

$$\begin{aligned}
&D_{\alpha_i}(a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_k})\\
&=[(h_{i-1}\otimes 1_{U_{\alpha_i}}\otimes g_{i+1})\circ\varphi_i\circ f_k](a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_k})\\
&=[(h_{i-1}\otimes 1_{U_{\alpha_i}}\otimes g_{i+1})\circ\varphi_i](a_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes a_{\alpha_k})\\
&=(h_{i-1}\otimes 1_{U_{\alpha_i}}\otimes g_{i+1})[a_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes a_{\alpha_{i-1}}\otimes d_{\alpha_i}(a_{\alpha_i})\otimes a_{\alpha_{i+1}}\otimes\cdots\otimes a_{\alpha_k}]\\
&=h_{i-1}(a_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes a_{\alpha_{i-1}})\otimes d_{\alpha_i}(a_{\alpha_i})\otimes g_{i+1}(a_{\alpha_{i+1}}\otimes\cdots\otimes a_{\alpha_k})\\
&=a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_{i-1}}\otimes d_{\alpha_i}(a_{\alpha_i})\otimes a_{\alpha_{i+1}}\cdots a_{\alpha_k}
\end{aligned}$$

이므로 A의 임의의 원 $\sum_{\alpha} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k}$ 에 대하여

$$D(\sum_{\alpha} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k}) = \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^{k} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_{i-1}} \otimes d_{\alpha_i}(a_{\alpha_i}) \otimes a_{\alpha_{i+1}} \cdots a_{\alpha_k}$$

또한, A의 모든 원 $\sum_{\alpha \in I} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k}$, $\sum_{\beta \in I} b_{\beta_1} \cdots b_{\beta_l}$에 대하여

$$\begin{aligned}
&D[(\sum_{\alpha \in I} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k})(\sum_{\beta \in I} b_{\beta_1} \cdots b_{\beta_l})] \\
&\quad = D(\sum_{\alpha,\beta \in I} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k} b_{\beta_1} \cdots b_{\beta_l}) \\
&\quad = \sum_{\alpha,\beta \in I} [\sum_{i=1}^{k} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_{i-1}} \otimes d_{\alpha_i}(a_{\alpha_i}) \otimes a_{\alpha_{i+1}} \cdots a_{\alpha_k}] b_{\beta_1} \cdots b_{\beta_l} \\
&\qquad + \sum_{\alpha,\beta \in I} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k} [\sum_{i=1}^{l} b_{\beta_1} \cdots b_{\beta_{i-1}} \otimes d_{\beta_i}(b_{\beta_i}) \otimes b_{\beta_{i+1}} \cdots b_{\beta_l}] \\
&\quad = [\sum_{\alpha \in I} \sum_{i=1}^{k} D_{\alpha_i}(a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k})][\sum_{\beta \in I} b_{\beta_1} \cdots b_{\beta_l}] \\
&\qquad + [\sum_{\alpha \in I} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k}][\sum_{\beta \in I} \sum_{i=1}^{l} D_{\beta_i}(b_{\beta_1} \cdots b_{\beta_l})] \\
&\quad = D(\sum_{\alpha \in I} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k})(\sum_{\beta \in I} b_{\beta_1} \cdots b_{\beta_l}) + (\sum_{\alpha \in I} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k}) D(\sum_{\beta \in I} b_{\beta_1} \cdots b_{\beta_l})
\end{aligned}$$

따라서 D는 R-미분이다. 다음으로 (U, D)가 A의 보편적 미분가군임을 보이기 위하여 (M, δ)를 A의 R-미분가군이라 하자. $\delta_\alpha = \delta|_{A_\alpha}$라 하면, $\delta_\alpha : A_\alpha \to M$은 R-미분이다. (U_α, d_α)가 A_α의 보편적 미분가군이므로 δ_α에 대하여 (A_α, A_α)-좌우가군 준동형사상 $f_\alpha : U_\alpha \to M$이 유일하게 존재하여 $f_\alpha \circ d_\alpha = \delta_\alpha$를 만족한다. 사상 $g'_\alpha : A \times U_\alpha \times A \to M$이 다음으로 주어진 A_α-다중선형사상이라 하고,

$$(a, u_\alpha, b) \longmapsto a f_\alpha(u_\alpha) b, \quad u_\alpha \in U_\alpha, \ a, b \in A$$

사상 $g_\alpha : A \otimes_{A_\alpha} U_\alpha \otimes_{A_\alpha} A \to M$을 g'_α $(\alpha \in I)$ 의 선형화사상이라 하면, A의 두 원

a, b와 $A \otimes_{A_\alpha} U_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$의 원 $\sum_i a_i \otimes u_i \otimes b_i$에 대하여

$$\begin{aligned}
&g_\alpha[a(\sum_i a_i \otimes u_i \otimes b_i)b] \\
&\qquad = \sum_i g_\alpha(aa_i \otimes u_i \otimes b_ib) = \sum_i aa_if_\alpha(u_i)b_ib \\
&\qquad = a(\sum_i a_if_\alpha(u_i)b_i)b = a[g_\alpha(\sum_i a_i \otimes u_i \otimes b_i)]b
\end{aligned}$$

이므로 g_α는 (A, A)-좌우가군준동형사상이다. 사상 $g : U \to M$가 다음과 같이 정의된 사상이라 하면,

$$\sum_{\alpha\in I} a_\alpha \otimes u_\alpha \otimes b_\alpha \longmapsto \sum_{\alpha\in I} g_\alpha(a_\alpha \otimes u_\alpha \otimes b_\alpha), \quad a_\alpha, b_\alpha \in A,\ u_\alpha \in U_\alpha$$

사상 g_α가 (A, A)-좌우가군준동형사상이므로 g도 (A, A)-좌우가군준동형사상이며, 임의의

$\sum_{\alpha\in I} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k} \in A$ $(a_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i},\ \alpha_i \in I)$ 에 대하여

$$\begin{aligned}
&(g \circ D)(\sum_{\alpha\in I} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k}) = g(\sum_{\alpha\in I} D_\alpha(a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k})) \\
&= g(\sum_\alpha \sum_{i=1}^k a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_{i-1}} \otimes d_{\alpha_i}(a_{\alpha_i}) \otimes a_{\alpha_{i+1}} \cdots a_{\alpha_k}) \\
&= \sum_\alpha g_{\alpha_i}(\sum_{i=1}^k a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_{i-1}} \otimes d_{\alpha_i}(a_{\alpha_i}) \otimes a_{\alpha_{i+1}} \cdots a_{\alpha_k}) \\
&= \sum_\alpha \sum_{i=1}^k a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_{i-1}} (f_{\alpha_i} \circ d_{\alpha_i})(a_{\alpha_i}) a_{\alpha_{i+1}} \cdots a_{\alpha_k} \\
&= \sum_\alpha \sum_{i=1}^k a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_{i-1}} \delta_{\alpha_i}(a_{\alpha_i}) a_{\alpha_{i+1}} \cdots a_{\alpha_k} \\
&= \sum_\alpha \sum_{i=1}^k a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_{i-1}} \delta(a_{\alpha_i}) a_{\alpha_{i+1}} \cdots a_{\alpha_k} \\
&= \delta(\sum_{\alpha\in I} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_k})
\end{aligned}$$

이므로 $g \circ D = \delta$이다. $A \otimes_{A_\alpha} U_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$가 $D_\alpha(A_\alpha)$에 의해 생성되므로 U는 $D(A)$에 의하여 생성된다. 따라서 g는 유일하고, (U, D)는 A의 보편적 미분가군이다.

2. 분수확대다원환

E가 R-다원환 A의 유니타리확대다원환이라 하자. A의 아이디얼 I가 $EI = IE = E$를 만족할 때, I를 E-덴스아이디얼이라 한다. 임의의 $q \in E$에 대하여 A의 E-덴스아이디얼 I와 J가 존재하여 $qI \subseteq A$, $Jq \subseteq A$를 만족할 때, E를 A의 분수확대다원환이라 한다. M이 (A, A)-좌우가군이라 하자. A의 임의의 E-덴스아이디얼 I에 대하여 $Ix = 0$또는 $xI = 0$인 M의 원 x가 오직 0뿐일 때, M을 E-토션프리라 한다. A의 아이디얼 I와 E-덴스아이디얼 J에서 $J \subseteq I$이면, I도 E-덴스아이디얼이고, I와 J가 모두 A의 E-덴스아이디얼이면, IJ와 $I \cap J$도 E-덴스아이디얼이다.

R이 환이라 하자. 항등원 1을 갖는 환 Q가 다음을 만족할 때, Q를 R의 우측상환이라 한다.

(1) $R \subseteq Q$

(2) R의 모든 정칙원이 Q안에서 곱셈에 대한 역원을 갖는다.

(3) 모든 $q \in Q$에 대하여 $q = rc^{-1}$인 $r \in R$과 R의 정칙원 c가 존재한다.

같은 방법으로 R의 좌측상환에 대해서도 정의를 내릴 수 있다. Q_1이 R의 우측상환이고 Q_2가 R의 좌측상환이며 $Q_1 = Q_2$일 때, Q_1을 R의 양측상환이라 한다. 양측상환의 예로써,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : \ b \in \mathbb{Z},\ a, c \in \mathbb{Z}/(p),\ p \text{ 는소수} \right\}$$

라 놓으면 S는 좌측아티니언도 우측아티니언도 아닌 양측상환을 갖는다([11]). 따라서 S는 양측 상환인 $\mathbb{Z}$-다원환을 갖는다.

정리 2. 1. S가 영인자를 갖지않는 R-다원환 A의 곱셈부분집합이라 하자. Q가 S에 관한 A의 양측상다원환이라 하면, Q는 A의 분수확대다원환이다.

증명. S의 모든 원 s에 대하여 A의 단항아이디얼 (s)는 Q-덴스임을 보이자. $s \in S$라 하면, $Q = AS^{-1}$이므로 임의의 $q \in Q$에 대하여 적당한 $a \in A$와 $c \in S$가 존재하여

다음을 만족한다.

$$q = ac^{-1} = ass^{-1}c^{-1} = as((cs)^2)^{-1}cs$$
$$= (as1_A)((cs)^2)^{-1}cs \in (AsA)S^{-1}Q \subseteq (AsA)Q$$

따라서 $Q \subseteq (AsA)Q$이다. 또한, $A \subseteq Q$이고 $s \in A$이므로 $(AsA)Q \subseteq Q$이다. 따라서 $Q = (AsA)Q = (s)Q$이다. 같은 방법으로 $Q = Q(AsA) = Q(s)$임을 알 수 있다. 이것은 $(s) = AsA$가 A의 Q-텐스단항아이디얼임을 의미한다.

Q의 임의의 원 q에 대하여 $qA \subseteq Q = AS^{-1}$이므로 적당한 $s \in S$가 존재하여 $qAs \subseteq A$이다. 그러므로 $q(AsA) = (qAs)A \subseteq A$, $s \in S$또한, $Aq \subseteq Q = S^{-1}A$이므로 적당한 $c \in S$가 존재하여 $cAq \subseteq A$이고, $(AcA)q = A(cAq) \subseteq A$, $c \in S$이다. $I = AsA$와 $J = AcA$라 놓으면, I, J는 $qI \subseteq A$, $Jq \subseteq A$를 만족하는 A의 Q-텐스단항아이디얼이다. 따라서 Q는 A의 분수확대다원환이다.

정리 2. 2. R-다원환 A의 분수확대다원환 E에 대하여 다음이 성립한다.

(1) (E,E)-좌우가군 M은 E-토션프리 (A,A)-좌우가군이다.

(2) 임의의 E-토션프리 (A,A)-좌우가군 M에 대하여 (A,A)-좌우가군 준동형사상 $f : M \to E \otimes_A M \otimes_A E$, $x \longmapsto 1 \otimes x \otimes 1$ $(x \in M)$은 일대일사상이다.

증명. (1) M을 (E,E)-좌우가군이라 하고, I를 A의 E-텐스아이디얼이라 하자. 적당한 $x \in M$에 대하여 $Ix = 0$이라 하면, $x = 1{\cdot}x \in Ex = EIx = 0$이므로 $x = 0$이다. 또한, $xI = 0$이라 하면, $x = x \cdot 1 \in xE = xIE = 0$이므로 $x = 0$이다. 따라서 M은 E-토션프리 (A,A)-좌우가군이다.

(2) M이 E-토션프리 (A,A)-좌우가군이라 하자. F가 집합 $E \times M \times E$에서의 자유가환군이라 하고, K가 $r,s \in A$, $p_i,q_i \in E$, $x_i \in M$ $(i = 1,2,\cdots,6)$ 에 대하여 다음과 같은 모든 원소에 의하여 생성된 F의 덧셈부분가군이라 하자.

$$(p_1+p_2,x_1,q_1) - (p_1,x_1,q_1) - (p_2,x_1,q_1),$$

$$(p_3,x_2+x_3,q_2) - (p_3,x_2,q_2) - (p_3,x_3,q_2),$$

$$(p_4,x_4,q_3+q_4) - (p_4,x_4,q_3) - (p_4,x_4,q_4), \qquad (*)$$

$$(p_5r,x_5,q_5) - (p_5,rx_5,q_5),$$

$$(p_6, x_6 s, q_6) - (p_6, x_6, sq_6).$$

텐서곱의 정의에 의해 $E \otimes_A M \otimes_A E = F/K$이고, $a \otimes x \otimes b = 0 \in E \otimes_A M \otimes_A E$이면, $(a, x, b) \in K$이다. E의 원 p_i, q_i $(i = 1, 2, \cdots, 6)$에 대하여 I_i와 J_i를 각각 $I_i p_i \subseteq A$, $q_i J_i \subseteq A$인 A의 E-텐스아이디얼이라 하고, $I = \bigcap_{i=1}^{6} I_i$, $J = \bigcap_{i=1}^{6} J_i$라 놓으면, 각각의 $j = 1, 2, \cdots, 6$에 대하여

$$Ip_j = \left(\bigcap_{i=1}^{6} I_i\right) p_j \subseteq I_j p_j \subseteq A,$$

$$q_j J = q_j \left(\bigcap_{i=1}^{6} J_i\right) \subseteq q_j J_j \subseteq A.$$

따라서 I와 J는 각각 $Ip_i \subseteq A$, $q_i J \subseteq A$ $(i = 1, 2, \cdots, 6)$를 만족하는 A의 E-텐스아이디얼이다. 임의의 $q \in E$에 대하여 두 집합을 다음과 같이 놓으면,

$$q^{-1}A = \{b \in A \mid qb \in A\}, \quad Aq^{-1} = \{b \in A \mid b\,q \in A\}$$

$q^{-1}A$와 Aq^{-1}는 각각 A-우가군이고, A-좌가군이다. 임의의 $a \in I$와 $b \in J$에 대하여 텐서곱 $a^{-1}A \otimes_A M \otimes_A Ab^{-1}$를 생각하자. F'을 집합 $a^{-1}A \times M \times Ab^{-1}$에 의해 생성된 자유가환군이라 하고, $p_i \in a^{-1}A$, $q_i \in Ab^{-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, 6)$그리고 $r, s \in A$로 이루어진 (*)와 같은 형태의 원소들에 의해 생성된 F'의 부분가군을 K'이라 하면, $a^{-1}A \otimes_A M \otimes_A Ab^{-1} = F'/K'$이고, 모든 $p_i, q_i \in E$에 대하여 $ap_i \subseteq Ip_i \subseteq A$, $q_i b \subseteq q_i J \subseteq A$이므로 $K \subseteq K'$이다. $E \otimes_A M \otimes_A E$에서 $f(x) = 1 \otimes x \otimes 1 = 0$이라 하면, $a^{-1}A \otimes_A M \otimes_A Ab^{-1}$에서도 $f(x) = 1 \otimes x \otimes 1 = 0$이다. 사상 $g^*_{a,b} : a^{-1}A \times M \times Ab^{-1} \to M$을 다음과 같이 정의된 A-다중선형사상이라 하고,

$$(c, x, e) \longmapsto acxeb, \ c \in a^{-1}A, \ e \in Ab^{-1}, \ x \in M.$$

사상 $g_{a,b} : a^{-1}A \otimes M \otimes Ab^{-1} \to M$을 사상 $g^*_{a,b}$의 A-선형화사상이라 하면,

$$0 = g_{a,b}(0) = g_{a,b}(1 \otimes x \otimes 1) = axb.$$

여기에서 $a \in I$와 $b \in J$는 임의로 선택한 원소이므로 모든 $a \in I$, $b \in J$에 대하여 $axb = 0$이고, $IxJ = 0$이다. M은 E-토션프리이고, I와 J가 A의 E-텐스아이디얼이므로 $x = 0$이다. 따라서 f는 일대일이다.

정리 2. 3. R-다원환 A의 분수확대다원환 E와 (E, E)-좌우가군 M과 N에 대하여 다음이
성립한다.

(1) M에서 N으로의 모든 (A, A)-좌우가군준동형사상은 (E, E)-좌우가군준동형사상이다.

(2) E에서 M으로의 R-미분 d와 δ가 A에서 $d = \delta$이면, E에서도 $d = \delta$이다.

증 명. (1) 사상 $f : M \to N$를 (A, A)-좌우가군준동형사상이라 하고, E의 두 원 p와 q에 대하여 I와 J가 각각 $Ip \subseteq A$, $qJ \subseteq A$를 만족하는 A의 E-덴스아이디얼이라 하면, 임의의 $a \in I$와 $b \in J$에 대하여

$$af(pxq)b = f(apxqb) = apf(x)qb = a(pf(x)q)b,$$

$$a[f(pxq) - pf(x)q]b = 0$$

이므로 $I[f(pxq) - pf(x)q]J = 0$. N이 E-토션프리 (A, A)-좌우가군이고, I와 J는 A의 E-덴스 아이디얼이므로 모든 $p, q \in E$에 대하여 $f(pxq) - pf(x)q = 0$, $f(pxq) = pf(x)q$. 따라서 $f : M \to N$은 (E, E)-좌우가군준동형사상이다.

(2) M을 (E, E)-좌우가군이라 하고, E로부터 M으로의 R-미분 d와 δ가 A에서 $d = \delta$라 하자. E의 원 p에 대하여 I를 $Ip \subseteq A$인 A의 E-덴스아이디얼이라 하면, 모든 $b \in I$에 대하여 $0 = (d-\delta)(bp) = b(d-\delta)(p) - (d-\delta)(b)p = b(d-\delta)(p)$. 따라서 $I(d-\delta)(p) = 0$이다. $(d-\delta)(p) \in M$이고, M은 E-토션프리 (A, A)-좌우가군이므로 $(d-\delta)(p) = 0$. 즉, 모든 $p \in E$에 대하여 $d(p) = \delta(p)$이다. 따라서 E에서 $d = \delta$이다.

(A, A)-좌우가군 N을 (A, A)-좌우가군 M의 확대가군이라 하자. N의 모든 영이 아닌 부분가군 N'에 대하여 $N' \cap M \neq 0$일 때, N를 M의 본질적 확대가군이라 한다. H가 M의 극대 본질적 확대가군일 때, H를 M의 단사포락가군이라 한다. (A, A)-좌우가군 M은 $A \otimes_R A^{op}$-좌가군 또는 $A^{op} \otimes_R A$-우가군으로 볼 수 있으므로 단사포락가군 H는 $A \otimes_R A^{op}$-좌가군 M의 좌측단사포락가군 이고, $A^{op} \otimes_R A$-우가군 M의 우측단사포락가군이다.

정리 2. 4. E-토션프리 (A, A)-좌우가군 M에 대하여 M의 단사포락가군 H도 E-토션프리이다.

증 명. $T_l = \{ x \in H \mid A$ 의 E − 덴스아이디얼 I가 존재하여 $Ix = 0 \}$이라 놓자. T_l의 임의의 두 원 x, y에 대하여 적당한 E-덴스아이디얼 I와 J가 존재하여 $Ix =$

0, $Jy=0$이고, $I\cap J$또한 E-텐스아이디얼이다. $(I\cap J)(x-y)=(I\cap J)x-(I\cap J)y=0$이므로 $x-y\in T_l$이다. 또한, 임의의 $a,b\in A$와 $x\in T_l$에 대하여 적당한 A의 E-텐스아이디얼 I가 존재하여 $Ix=0$이며 $I(xb)=(Ix)b=0$, $I(ax)=(Ia)x\subseteq Ix=0$이므로 xb, $ax\in T_l$이다. 이와 같이 집합 T_l는 H의 (A,A)-부분가군이므로 H의 $A\otimes_R A^{op}$-좌부분가군이다. M이 E-토션프리 (A,A)-좌우가군이므로 $T_l\cap M=0$이다. 단사포락가군의 정의에 의하여 H는 M의 극대 본질적 확대가군이므로 $T_l=0$이다. 따라서 $Ix=0$ $(x\in H)$이면 $x=0$이다. 또한, 같은 방법으로 집합 $T_r=\{x\in H \mid A$의 $E-$ 텐스아이디얼 I 가 존재하여 $xI=0\}$은 H의 (A,A)-부분가군이고, $T_r=0$이다. 따라서 $xI=0$ $(x\in H)$이면, $x=0$이고, H는 E-토션프리이다.

따름정리 2. 5. M이 E-토션프리 (A,A)-좌우가군이라 하자. H_r이 M의 우측단사포락가군이고, H_l이 M의 좌측단사포락가군이면, 임의의 $x\in H_r$, $y\in H_l$와 A의 E-덴스아이디얼 I에 대하여 $xI=0$이면 $x=0$이고, $Iy=0$이면 $y=0$이다.

정리 2. 6. E가 R-다원환 A의 분수확대다원환이고, M이 (E,E)-좌우가군이라 하자. I가 A의 E-덴스아이디얼이고, 사상 $\varphi:I\to M$이 (A,A)-좌우가군준동형사상이면, φ를 확장하는 (A,A)-좌우가군준동형사상 $f:A\to M$이 유일하게 존재한다.

증 명. H가 (A,A)-좌우가군 M의 단사포락가군이라 하자. A와 I가 $A\otimes_R A^{op}$-좌가군이고, $A\otimes_R A^{op}$-좌가군으로 H가 단사포락가군이므로 $f|_I=\varphi$인 $A\otimes_R A^{op}$-좌가군준동형사상 $f:A\to H$가 유일하게 존재한다. 실제로, 사상 $g:A\to C$가 사상 φ를 확장하는 또 하나의 $A\otimes_R A^{op}$-좌가군준동형사상이라 하면, $g(1)I=g(I)=\varphi(I)=f(I)=f(1)I$이므로 $(g(1)-f(1))I=0$. M이 (E,E)-좌우가군이므로 정리 2.2와 정리 2.4에 의하여 M은 E-토션프리 (A,A)-좌우가군이고, H가 M의 단사포락가군이므로 H도 E-토션프리이다. $g(1)-f(1)\in H$이고 I는 A의 E-텐스아이디얼 이므로 $g(1)=f(1)$. 따라서 모든 $a\in A$에 대하여 $g(a)=g(1)a=f(1)a=f(a)$이므로 $f=g$.

정리 2.2에 의하여 임의의 E-토션프리 (A,A)-좌우가군은 (E,E)-좌우가군으로 이입된다. $\bar{H}$가 H를 포함하는 (E,E)-좌우가군이라 하면, $f(1)E\subseteq\bar{H}$. $f(I)=\varphi(I)\subseteq M$이고, M은 $\bar{H}$의 (E,E)-부분가군이므로 $f(I)E\subseteq M$. 그러므로 $f(A)=f(1)A\subseteq f(1)E=f(1)IE=f(I)E\subseteq M$이고, 사상 $f:A\to M$는 φ를 확장하는 유일한 (A,A)-좌우가군준동형사상이다.

따름정리 2. 7. M을 (E,E)-좌우가군이라 하고, I를 A의 E-덴스아이디얼이라 하자. 사상 $\varphi: I \to M$가 A-좌가군준동형사상이면, φ를 확장하는 A-좌가군준동형사상 $f: A \to M$가 유일하게 존재한다.

정리 2. 8. E가 A의 분수확대다원환이고, M이 (A,A)-좌우가군이며, 사상 $f: M \to E \otimes_A M \otimes_A E$가 $f(x) = 1 \otimes x \otimes 1,\ x \in M$로 정의된 (A,A)-좌우가군준동형사상이라 하자. 사상 $d: A \to M$가 R-미분이면, 적당한 R-미분 $\delta: E \to E \otimes_A M \otimes_A E$가 유일하게 존재하여 $\delta|_A = f \circ d$를 만족한다.

증 명. 임의의 $q \in E$에 대하여 I가 $qI \subseteq A$인 A의 E-덴스아이디얼이라 하고, $f_{I,q}: I \to E \otimes_A M \otimes_A E$가 다음과 같이 정의된 사상이라 하자.

$$f_{I,q}(b) = 1 \otimes d(qb) \otimes 1 - q \otimes d(b) \otimes 1, \quad b \in I$$

임의의 $a, b \in I$와 $x \in A$에 대하여

$$\begin{aligned} f_{I,q}(a+b) &= 1 \otimes d(q(a+b)) \otimes 1 - q \otimes d(a+b) \otimes 1 \\ &= [1 \otimes d(qa) \otimes 1 - q \otimes d(a) \otimes 1] + [1 \otimes d(qb) \otimes 1 - q \otimes d(b) \otimes 1] \\ &= f_{I,q}(a) + f_{I,q}(b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{I,q}(bx) &= 1 \otimes d(qbx) \otimes 1 - q \otimes d(bx) \otimes 1 \\ &= 1 \otimes d(qb)x \otimes 1 + 1 \otimes qb\, d(x) \otimes 1 - q \otimes d(b)x \otimes 1 - q \otimes bd(x) \otimes 1 \\ &= [1 \otimes d(qb) \otimes 1 - q \otimes d(b) \otimes 1]x \\ &= [f_{I,q}(b)]x \end{aligned}$$

이므로 $f_{I,q}$는 A-우가군준동형사상이다. $E \otimes_A M \otimes_A E$는 (E,E)-좌우가군이므로 $E \otimes_A M \otimes_A E$는 E-토션프리 (A,A)-좌우가군이며, 따름정리 2.7에 의하여 $f_{I,q}$를 확장하는 A-우가군준동형사상 $\varphi_{I,q}: A \to E \otimes_A M \otimes_A E$가 유일하게 존재한다. 이 때, 사상 $\varphi_{I,q}$는 A의 E-덴스아이디얼 I의 선택에 영향을 받지 않는다. 실제로, J가 $qJ \subseteq A$를 만족하는 또 하나의 E-덴스아이디얼이라 하면, $I \cap J$도 $q(I \cap J) \subseteq qJ \subseteq A$를 만족하는 A의 E-덴스아이디얼이고, $f_{I \cap J,q}: I \cap J \to E \otimes_A M \otimes_A E$는 다음으로 정의된 A-우가군준동형사상이다.

$$f_{I \cap J,q}(c) = 1 \otimes d(qc) \otimes 1 - q \otimes d(c) \otimes 1, \quad c \in I \cap J.$$

$\varphi_{I,q}|_{I\cap J} = f_{I,q}|_{I\cap J} = f_{I\cap J,q} = f_{J,q}|_{I\cap J} = \varphi_{J,q}|_{I\cap J}$이므로 $\varphi_{I,q}$와 $\varphi_{J,q}$는 $f_{I\cap J,q}$를 확장하는 A-우가군준동형사상이고, 그와 같은 A-우가군준동형사상의 유일성에 의하여 $\varphi_{I,q} = \varphi_{J,q}$.

각각의 $q \in E$에 대하여 $\varphi_{I,q} = \varphi_q$라 놓고, 사상 $\delta : E \to E \otimes_A M \otimes_A E$를 $\delta(q) = \varphi_q(1), q \in E$(1은 A의 단위원) 로 정의하자. 임의의 $p, q \in E$에 대하여 I와 J가 각각 $pI \subseteq A$와 $qJ \subseteq A$를 만족하는 A의 E-텐스아이디얼이라 하면, 임의의 $r, s \in R$에 대하여 $rp + sq \in E$이고,

$$(rp+sq)(I\cap J) \subseteq rp(I\cap J) + sq(I\cap J) \subseteq rpI + sqJ \subseteq A + A \subseteq A.$$

사상 $\varphi_{rp+sq} : A \to E\otimes_A M \otimes_A E$가 $f_{I\cap J, rp+sq} : I\cap J \to E\otimes_A M\otimes_A E$를 확장하는 유일한 A-우가군준동형사상이라 하면, 임의의 $b \in I\cap J$에 대하여

$$\begin{aligned}\delta(rp+sq)b &= \varphi_{rp+sq}(1)b = \varphi_{rp+sq}(b) = f_{I\cap J, rp+sq}(b)\\ &= 1\otimes d(rpb+sqb)\otimes 1 - (rp+sq)\otimes d(b)\otimes 1\\ &= r[1\otimes d(pb)\otimes 1 - p\otimes d(b)\otimes 1] + s[1\otimes d(qb)\otimes 1 - q\otimes d(b)\otimes 1]\\ &= r\varphi_p(b) + s\varphi_q(b) = r\varphi_p(1)b + s\varphi_q(1)b = [r\varphi_p(1) + s\varphi_q(1)]b\\ &= [r\delta(p) + s\delta(q)]b\end{aligned}$$

이므로 $\{\delta(rp+sq) - [r\delta(p) + s\delta(q)]\}(I\cap J) = 0$. $\delta(rp+sq) - [r\delta(p)+s\delta(q)]$가 E-토션프리 (A,A)-좌우가군 $E\otimes_A M\otimes_A E$의 원이고, $I\cap J$는 E-텐스아이디얼이므로 임의의 $r, s \in R$과 $p, q \in E$에 대하여 $\delta(rp+sq) - [r\delta(p)+s\delta(q)] = 0$, $\delta(rp+sq) = r\delta(p) + s\delta(q)$. 따라서 사상 $\delta : E \to E\otimes_A M\otimes_A E$는 R-선형사상이다. 또한, 임의의 $p, q \in E$에 대하여 I, J, K가 각각 $pI \subseteq A$, $qJ \subseteq A$, $pqK \subseteq A$를 만족하는 A의 E-텐스아이디얼이라 하고, $D = I\cap J\cap K$라 놓으면, D는 A의 E-텐스아이디얼이며 다음을 만족한다.

$$pD \subseteq pI \subseteq A, \quad qD \subseteq qJ \subseteq A, \quad pqD \subseteq pqK \subseteq A$$

φ_p, φ_q, φ_{pq}가 각각 $f_{D,p}$, $f_{D,q}$, $f_{D,pq}$를 확장한 A-우가군준동형사상이라 하면, 임의의 $b \in D$에 대하여

$$\begin{aligned}\delta(pq)b &= \varphi_{pq}(1)b = \varphi_{pq}(b) = f_{D,pq}(b) = 1\otimes d(pqb)\otimes 1 - pq\otimes d(b)\otimes 1\\ &= [1\otimes d(pqb)\otimes 1 - p\otimes d(qb)\otimes 1] + [p\otimes d(qb)\otimes 1 - pq\otimes d(b)\otimes 1]\\ &= f_{D,p}(qb) + pf_{D,q}(b) = \varphi_p(qb) + p\varphi_q(b) = \varphi_p(1)qb + p\varphi_q(1)b\\ &= [\varphi_p(1)q + p\varphi_q(1)]b = [\delta(p)q + p\delta(q)]b\end{aligned}$$

이므로 $[\delta(pq)-(\delta(p)q+p\delta(q))]\,D=0$. D는 A의 E-텐스아이디얼이고 $E\otimes_A M\otimes_A E$는 E-토션프리 (A,A)-좌우가군이므로 $\delta(pq)=\delta(p)q+p\delta(q)$. 따라서 사상 $\delta: E\to E\otimes_A M\otimes_A E$는 R-미분이다. 또한, 임의의 $a\in A$에 대하여 A는 $aA\subseteq A$인 E-텐스아이디얼이다. $\varphi_a=f_{A,a}: A\to E\otimes_A M\otimes_A E$라 하면, $\delta(a)=\varphi_a(1)=1\otimes d(a)\otimes 1=f(d(a))=(f\circ d)(a)$이므로 사상 δ는 $\delta|_A=f\circ d$를 만족하는 R-미분이다.

정리 2. 9. E를 R-다원환 A의 분수확대다원환, (U,d)를 A의 보편적 미분가군, 그리고 사상 $f: U\to E\otimes_A U\otimes_A E$를 $f(x)=1\otimes x\otimes 1,\ \ x\in U$로 정의된 (A,A)-좌우가군준동형사상이라 하자. 사상 $\delta: E\to E\otimes_A U\otimes_A E$가 $\delta|_A=f\circ d$인 R-미분이면, $(E\otimes_A U\otimes_A E,\delta)$는 E의 보편적 미분가군이다.

증 명. (M,τ)를 E의 R-미분가군이라 하고, $\tau'=\tau|_A$라 놓으면, 사상 $\tau': A\to M$은 R-미분이므로 적당한 (A,A)-좌우가군준동형사상 $g: U\to M$이 존재하여 $g\circ d=\tau'$. 사상 $\varphi_0: E\times U\times E\to M$을 다음으로 주어진 A-다중선형사상이라 하고,

$$(p,u,q)\longmapsto pg(u)q,\quad p,q\in E,\quad u\in U$$

사상 $\varphi: E\otimes_A U\otimes_A E\to M$을 φ_0의 A-선형화사상이라 하면, φ는 (E,E)-좌우가군준동형사상이다. 또한, 임의의 $a\in A$에 대하여

$$\begin{aligned}(\varphi\circ\delta)(a)&=\varphi(\delta(a))=\varphi((f\circ d)(a))=\varphi(f(d(a)))\\&=\varphi(1\otimes d(a)\otimes 1)=1\cdot g(d(a))\cdot 1\\&=g(d(a))=\tau'(a)=\tau(a)\end{aligned}$$

즉, $\varphi\circ\delta|_A=\tau|_A$이다. 따라서 δ는 A에서 $\varphi\circ\delta=\tau$인 R-미분이고, 정리 2.3에 의하여 E에서 $\varphi\circ\delta=\tau$. $E\otimes_A U\otimes_A E$가 $\delta(A)$에 의하여 생성된다는 사실로부터 사상 φ는 유일하고, $(E\otimes_A U\otimes_A E,\delta)$는 E의 보편적 미분가군이다.

정리 2. 10. E가 R-다원환 A의 분수확대다원환이고, (U,d)가 A의 보편적 미분가군이라 하자. U가 E-토션프리이면, $U=0$이기 위한 필요충분조건은 $E\otimes_A U\otimes_A E=0$이다.

증 명. $U=0$이면 $E\otimes_A U\otimes_A E=0$임은 명백하다. 역으로 $E\otimes_A U\otimes_A E=0$이라 하면, U가 E-토션프리이므로 정리 2.2에 의하여 (A,A)-좌우가군준동형사상 $f: U\to E\otimes_A U\otimes_A E,\ \ x\longmapsto 1\otimes x\otimes 1\ (x\in U)$는 일대일이다. U의 모든 원 x에 대하여 $f(x)=1\otimes x\otimes 1=0$이므로 $U=\ker f=0$.

F가 R-다원환 A의 유니타리 확대 R-다원환이라 하자. (A,A)-좌우가군 M에 대하여 (A,A)-좌우가군으로서 M을 포함하는 (F,F)-좌우가군 N이 존재할 때, M을 F-확대가능이라 한다.

정리 2. 11. (A,A)-좌우가군 M이 F-확대가능이기 위한 필요충분조건은 (A,A)-좌우가군준동형 사상 $f: M \to F \otimes_A M \otimes_A F$, $f(x) = 1 \otimes x \otimes 1$, $x \in M$가 일대일인 것이다.

증 명. N이 (A,A)-좌우가군으로써 M을 포함하는 (F,F)-좌우가군이고, 사상 φ : $F \otimes_A M \otimes_A F \to N$을 다음과 같이 정의하자.

$$\sum_i c_i \otimes y_i \otimes e_i \longmapsto \sum_i c_i\, y_i\, e_i, \quad y_i \in N, \ c_i, e_i \in F$$

자연단사사상 $j: M \hookrightarrow N$과 $h: F \otimes_A M \otimes_A F \hookrightarrow F \otimes_A N \otimes_A F$에 대하여 사상 φ는 $\varphi \circ h \circ f = j$인 (F,F)-좌우가군준동형사상이다. 따라서 f는 일대일이다. 역으로 $L = \mathrm{Im} f$라 놓으면, f가 일대일 (A,A)-좌우가군준동형사상이므로 M과 L은(A,A)-좌우가군으로써 동형이고, M은 (F,F)-좌우가군 $F \otimes_A M \otimes_A F$의 (A,A)-부분가군이다.

정리 2. 12. E를 R-다원환 A의 분수확대다원환이라 하고, (U,d)를 A의 보편적 미분가군이라 하자. U가 E-확대가능일 때, $U = 0$이기 위한 필요충분조건은 $E \otimes_A U \otimes_A E = 0$이다.

3. 좌우미분가군

A, A', A''이 모두 단위원 1을 갖는 R-다원환이고, 사상 $f: A \to A'$와 $g: A \to A''$이 R-다원환준동형사상이라 하자. (A', A'')-좌우가군 M에 대하여 다음의 성질을 갖는 R-선형사상 $\delta: A \to M$를 A에서 M으로의 R-미분이라 한다.

$$\delta(xy) = f(x)\delta(y) + \delta(x)g(y), \quad x, y \in A$$

또한, (A', A'')-좌우가군 M과 R-미분 $\delta: A \to M$의 쌍 (M,δ)를 A의 미분가군이라 한다. (U,d)를 A의 미분가군이라 하자. 임의의 A의 미분가군 (M,δ)에 대하여 적당한 (A', A'')-좌우가군준동형 사상 $\phi: U \to M$이 유일하게 존재하여 $\phi \circ d = \delta$를

만족할 때, (U, d)를 A의 보편적 미분가군이라 하고, 이 때, R-미분 d를 A의 보편적 미분이라 한다. 이러한 (A', A'')-좌우가군인 A의 보편적 미분가군과 보편적 미분이 존재한다.

가환환 R과 단위원 1을 갖는 R-다원환 A, A', A''에 대하여 사상 $f : A \to A'$과 $g : A \to A''$가 R-다원환준동형사상이라 하자. 위 다원환의 텐서곱 $A' \otimes_R A \otimes_R A''$은 스칼라곱을 아래와 같이 정의함에 의하여 (A', A'')-좌우가군을 이룬다.

$$b'(\sum_i a_i' \otimes a_i \otimes a_i'') = \sum_i b'a_i' \otimes a_i \otimes a_i'', \quad b', a_i' \in A', \; a_i \in A, \; a_i'' \in A'',$$

$$(\sum_i a_i' \otimes a_i \otimes a_i'')b'' = \sum_i a_i' \otimes a_i \otimes a_i''b'', \quad a_i' \in A', \; a_i \in A, \; a_i'', b'' \in A''$$

J를 다음과 같은 형태의 원소에 의해 생성된 $A' \otimes_R A \otimes_R A''$의 (A', A'')-부분가군이라 하자.

$$1 \otimes ab \otimes 1 - f(a) \otimes b \otimes 1 - 1 \otimes a \otimes g(b), \quad a, b \in A$$

$U = (A' \otimes_R A \otimes_R A'')/J$라 놓으면, U는 (A', A'')-좌우가군이다. R-다원환 A로부터 U로의 사상 d를 $d(a) = 1 \otimes a \otimes 1 + J, \;\; a \in A$로 정의하면, 사상 $d : A \to U$는 R-미분이다. 실제로, 임의의 $r, s \in R$과 $a, b \in A$에 대하여

$$\begin{aligned} d(ra + sb) &= 1 \otimes (ra + sb) \otimes 1 + J \\ &= (1 \otimes ra \otimes 1 + J) + (1 \otimes sb \otimes 1 + J) \\ &= r(1 \otimes a \otimes 1 + J) + s(1 \otimes b \otimes 1 + J) \\ &= rd(a) + sd(b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(ab) &= 1 \otimes ab \otimes 1 + J \\ &= 1 \otimes ab \otimes 1 + f(a) \otimes b \otimes 1 - f(a) \otimes b \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes g(b) - 1 \otimes a \otimes g(b) + J \\ &= f(a) \otimes b \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes g(b) + J \\ &= (f(a) \otimes b \otimes 1 + J) + (1 \otimes a \otimes g(b) + J) \\ &= f(a)(1 \otimes b \otimes 1 + J) + (1 \otimes a \otimes 1 + J)g(b) \\ &= f(a)d(b) + d(a)g(b) \end{aligned}$$

따라서 (U,d)는 A의 미분가군이다. 다음으로 (U,d)가 A의 보편적 미분가군임을 보이기 위하여, (M,δ)를 (A',A'')-좌우가군인 A의 미분가군이라 하자. 사상 ψ^* : $A' \times A \times A'' \to M$를
$\psi^*(a',a,a'') = a'\delta(a)a''$, $a' \in A'$, $a \in A$, $a'' \in A''$으로 정의된 R-다중선형사상이라 하고, 사상 $\psi : A' \otimes_R A \otimes_R A'' \to M$를 ψ^*의 R-선형화사상이라 하자. 임의의 $b', a_i' \in A'$, $a_i \in A$, $b'', a_i'' \in A''$에 대하여

$$\begin{aligned}
\psi[b'(\sum_i a_i' \otimes a_i \otimes a_i'')b''] &= \psi(\sum_i b'a_i' \otimes a_i \otimes a_i''b'') = \sum_i \psi^*(b'a_i', a_i, a_i''b'') \\
&= \sum_i b'a_i'\delta(a_i)a_i''b'' = b'(\sum_i a_i'\delta(a_i)a_i'')b'' \\
&= b'\psi(\sum_i a_i' \otimes a_i \otimes a_i'')b''
\end{aligned}$$

이므로 ψ는 (A',A'')-좌우가군준동형사상이다. 또 한, J의 생성원 $1 \otimes ab \otimes 1 - f(a) \otimes b \otimes 1 - 1 \otimes a \otimes g(b)$에 대하여

$$\begin{aligned}
&\psi(1 \otimes ab \otimes 1 - f(a) \otimes b \otimes 1 - 1 \otimes a \otimes g(b)) \\
&\qquad = \psi(1 \otimes ab \otimes 1) - \psi(f(a) \otimes b \otimes 1) - \psi(1 \otimes a \otimes g(b)) \\
&\qquad = \psi^*(1, ab, 1) - \psi^*(f(a), b, 1) - \psi^*(1, a, g(b)) \\
&\qquad = \delta(ab) - f(a)\delta(b) - \delta(a)g(b) = 0
\end{aligned}$$

이므로 $J \subseteq \ker \psi$. 사상 $\psi : U \to M$을 ψ에 의하여 유도된 (A',A'')-좌우가군준동형사상이라 하면, 모든 $a \in A$에 대하여

$$(\psi \circ d)(a) = \psi(1 \otimes a \otimes 1 + J) = \psi(1 \otimes a \otimes 1) = \delta(a)$$

이므로 $\psi \circ d = \delta$.

또한, 모든 $\sum_i a_i' \otimes a_i \otimes a_i'' + J \in U$ 에 대하여

$$\begin{aligned}
\sum_i a_i' \otimes a_i \otimes a_i'' + J &= \sum_i [a_i'(1 \otimes a_i \otimes 1)a_i'' + J] \\
&= \sum_i a_i'[(1 \otimes a_i \otimes 1) + J]a_i'' \\
&= \sum_i a_i' d(a_i) a_i''
\end{aligned}$$

이므로 U가 집합 $d(A)$에 의하여 (A', A'')-좌우 가군으로 생성된다. 이 사실로부터 (A', A'')-좌우가군 준동형사상 $\psi : U \to M$는 유일함을 알 수 있다. 따라서 (U, d)는 (A', A'')-좌우가군 으로써 A의 보편적 미분가군이다.

R-다원환 A의 (A', A'')-좌우가군인 보편적 미분가군은 범주론의 성질로부터 (A', A'')-좌우가군 동형에 의해 유일하다. 그리고 모든 A의 보편적 미분가군 (U, d)는 예제의 보편적 미분가군 $(A' \otimes_R A \otimes_R A'')/J$와 동형이므로 U는 $d(A)$에 의하여 (A', A'')-좌우가군으로 생성된다.

본 장에서 사상 f와 g는 각각 A에서 A', 그리고 A에서 A''으로의 R-다원환준동형사상을 의미 한다.

정리 3. 1. A, A', A'', B', B''이 모두 단위원 1을 갖는 R-다원환이고, 사상 $k_1 : A' \to B'$와 $k_2 : A'' \to B''$이 R-다원환준동형사상이라 하자. (U, δ)가 A의 (A', A'')-좌우가군인 보편적 미분가군이고, 사상 $d : A \to B' \otimes_{A'} U \otimes_{A''} B''$이 $d(a) = 1 \otimes \delta(a) \otimes 1,\ \ a \in A$로 정의된 R-미분이면, $(B' \otimes_{A'} U \otimes_{A''} B'', d)$는 (B', B'')-좌우가군으로써 A의 보편적 미분가군이다.

증 명. $k_1 : A' \to B'$과 $k_2 : A'' \to B''$를 R-다원환준동형사상이라 하고, $\nu_1 = k_1 \circ f$, $\nu_2 = k_2 \circ f$라 하면, ν_1과 ν_2는 R-다원환준동형사상이다. 그리고 B'과 B''은 각각 (B', B')-좌우가군과 (B'', B'')-좌우가군이다. B'과 B''의 스칼라곱을 다음으로 정의함으로써 B'은 (A', A')-좌우가군, B''은 (A'', A'')-좌우가군이다.

$$a'b' = k_1(a')b', b'a' = b'k_1(a'),\ \ a' \in A',\ b' \in B',$$
$$a''b'' = k_2(a'')b'', b''a'' = b''k_2(a''),\ \ a'' \in A'',\ b'' \in B''$$

A의 보편적 미분 $\delta : A \to U$에 대하여 사상 $d : A \to B' \otimes_{A'} U \otimes_{A''} B''$을 다음과 같이 정의하면,

$$d(a) = 1 \otimes \delta(a) \otimes 1,\ \ a \in A$$

d는 R-선형사상이고, 임의의 $a, b \in A$에 대하여

$$\begin{aligned}
d(ab) &= 1 \otimes \delta(ab) \otimes 1 \\
&= 1 \otimes (f(a)\delta(b) + \delta(a)g(b)) \otimes 1 \\
&= 1 \otimes f(a)\delta(b) \otimes 1 + 1 \otimes \delta(a)g(b) \otimes 1 \\
&= (1 \cdot f(a)) \otimes \delta(b) \otimes 1 + 1 \otimes \delta(a) \otimes (g(b) \cdot 1) \\
&= (1 \cdot k_1(f(a))) \otimes \delta(b) \otimes 1 + 1 \otimes \delta(a) \otimes (k_2(g(b)) \cdot 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (k_1 \circ f)(a) \otimes \delta(b) \otimes 1 + 1 \otimes \delta(a) \otimes (k_2 \circ g)(b) \\
&= \nu_1(a) \otimes \delta(b) \otimes 1 + 1 \otimes \delta(a) \otimes \nu_2(b) \\
&= \nu_1(a)(1 \otimes \delta(b) \otimes 1) + (1 \otimes \delta(a) \otimes 1)\nu_2(b) \\
&= \nu_1(a)d(b) + d(a)\nu_2(b)
\end{aligned}
$$

이므로 d는 R-미분이다. (M, ∂)가 (B', B'')-좌우가군인 A의 미분가군이라 하자. (B', B'')-좌우 가군인 M은 다음과 같은 스칼라곱에 의하여 (A', A'')-좌우가군을 이룬다.

$$a'x = k_1(a')x, \quad xa'' = xk_2(a''), \quad x \in M, \ a' \in A', \ a'' \in A''$$

그리고 임의의 $a, b \in A$에 대하여

$$
\begin{aligned}
\partial(ab) &= \nu_1(a)\partial(b) + \partial(a)\nu_2(b) \\
&= k_1(f(a))\partial(b) + \partial(a)k_2(g(b)) \\
&= f(a)\partial(b) + \partial(a)g(b)
\end{aligned}
$$

이므로 A로부터 (B', B'')-좌우가군 M으로의 R-미분 ∂는 (A', A'')-좌우가군 M으로의 R-미분 이다. 따라서 (M, ∂)는 (A', A'')-좌우가군인 미분가군이다. (U, δ)가 (A', A'')-좌우가군인 A의 보편적 미분가군이므로 (M, ∂)에 대하여 (A', A'')-좌우가군준동형사상 $\phi^* : U \to M$이 유일하게 존재하여 $\phi^* \circ \delta = \partial$를 만족한다.

사상 $\phi : B' \times U \times B'' \to M$가 다음으로 정의된 (A', A'')-중앙선형사상이라 하고,

$$\phi(b', u, b'') = b'\phi^*(u)b'', \quad u \in U, \ b' \in B', \ b'' \in B''$$

사상 $\Phi : B' \otimes_{A'} U \otimes_{A''} B'' \to M$가 사상 ϕ의 R-선형화사상이라 하자. 임의의 $b' \in B'$, $b'' \in B''$와 $B' \otimes_{A'} U \otimes_{A''} B''$의 원 $\sum_i b_i' \otimes u_i \otimes b_i''$에 대하여

$$
\begin{aligned}
&\Phi[b'(\sum_i b_i' \otimes u_i \otimes b_i'')b''] \\
&\quad = \Phi(\sum_i b'b_i' \otimes u_i \otimes b_i''b'') = \sum_i b'b_i'\phi^*(u_i)b_i''b'' \\
&\quad = b'(\sum_i b_i'\phi^*(u_i)b_i'')b'' = b'\Phi(\sum_i b_i' \otimes u_i \otimes b_i'')b''
\end{aligned}
$$

이므로 Φ는 (B', B'')-좌우가군준동형사상이다. 또한, 임의의 $a \in A$에 대하여

$$(\Phi \circ d)(a) = \Phi(1 \otimes \delta(a) \otimes 1) = \phi^*(\delta(a)) = (\phi^* \circ \delta)(a) = \partial(a)$$

이므로 $\Phi \circ d = \partial$. (U, δ)가 (A', A'')-좌우가군인 A의 보편적 미분가군이므로 U는 $\delta(A)$에 의해 (A', A'')-좌우가군으로 생성되고, 임의의 $b_i' \in B'$, $u_i \in U$, $b_i'' \in B''$에 대하여

$$\begin{aligned}\sum_i b_i' \otimes u_i \otimes b_i'' &= \sum_i b_i' \otimes (\sum_j a_j' \delta(a_j) a_j'') \otimes b_i'' \\ &= \sum_{i,j} b_i' \otimes a_j' \delta(a_j) a_j'' \otimes b_i'' \\ &= \sum_{i,j} b_i' k_1(a_j') \otimes \delta(a_j) \otimes k_2(a_j'') b_i'' \\ &= \sum_{i,j} b_i' k_1(a_j')(1 \otimes \delta(a_j) \otimes 1) k_2(a_j'') b_i'' \\ &= \sum_{i,j} b_i' k_1(a_j') d(a_j) k_2(a_j'') b_i'',\end{aligned}$$

$b_i' k_1(a_j') \in B'$, $k_2(a_j'') b_i'' \in B''$이므로 $B' \otimes_{A'} U \otimes_{A''} B''$은 집합 $d(A)$에 의해 (B', B'')-좌우가군으로 생성된다. 그리고 이 사실로부터 (B', B'')-좌우가군준동형사상 $\Phi : B' \otimes_{A'} U \otimes_{A''} B'' \to M$은 $\Phi \circ d = \partial$를 만족하는 유일한 사상임을 알 수 있다.

정리 3. 2. $f : A \to A'$과 $g : A \to A''$가 위로의 R-다원환준동형사상이고, $I = ker\, f$, $J = ker\, g$라 하자. (U, d)가 (A, A)-좌우가군인 A의 보편적 미분가군이고, 사상 $\partial : A \to U/(IU + UJ)$가 다음과 같이 정의된 R-미분이라 하면,

$$\partial(a) = d(a) + IU + UJ, \quad a \in A$$

(A', A'')-좌우가군인 A의 보편적 미분가군 (V, δ)는 $(U/(IU + UJ), \partial)$와 동형이다.

증 명. (A', A'')-좌우가군 V는 다음과 같은 스칼라곱에 의하여 (A, A)-좌우가군이다.

$$ax = f(a)x, \quad xa = xg(a), \quad a \in A, \ x \in V$$

임의의 $a, b \in A$에 대하여

$$\delta(ab) = f(a)\delta(b) + \delta(a)g(b) = a\delta(b) + \delta(a)b$$

이므로 $\delta : A \to V$는 (A,A)-좌우가군의 R-미분이고, (A,A)-좌우가군준동형사상 $\phi : U \to V$가 유일하게 존재하여 $\phi\circ d = \delta$. $K = IU + UJ$라 놓으면, U/K는 다음의 스칼라곱에 의하여 (A', A'')-좌우가군을 이룬다.

$$a'(u+K) = au + K,\ \ u\in U,\ a'\in A',\ a\in f^{-1}(a'),$$

$$(u+K)a'' = ua + K,\ \ u\in U,\ a''\in A'',\ a\in g^{-1}(a'')$$

임의의 $a_1, a_2 \in f^{-1}(a')$에 대하여 $f(a_1 - a_2) = f(a_1) - f(a_2) = 0$이므로 $a_1 - a_2 \in \ker f = I$이고, $(a_1 - a_2)u \in IU \subseteq IU + UJ = K$. 마찬가지로 임의의 $b_1, b_2 \in g^{-1}(b'')$에 대하여 $u(b_1 - b_2) \in UJ \subseteq IU + UJ = K$. 이는 위에서 정의된 스칼라곱이 $f^{-1}(a')$과 $g^{-1}(b'')$의 원소의 선택에 영향을 받지 않음을 의미한다.

모든 $a\in I,\ b\in J,\ u_1, u_2 \in U$에 대하여

$$\phi(au_1 + u_2b) = a\phi(u_1) + \phi(u_2)b = f(a)\phi(u_1) + \phi(u_2)g(b) = 0$$

이므로 $K \subseteq \ker\phi$. 사상 $\Phi : U/K \to V$가 ϕ에 의해 유도된 (A,A)-좌우가군준동형사상이라 하면, Φ는 위로의 (A', A'')-좌우가군준동형사상이다. 실제로, (V,δ)는 (A', A'')-좌우가군인 A의 보편적 미분가군이므로 $\delta(A)$에 의하여 (A', A'')-좌우가군으로 생성된다. 그리고, 모든 V의 원 $\sum_i a_i'\delta(a_i)b_i''\,(a_i' \in A', b_i'' \in A'', a_i \in A)$에 대하여 $a_i \in f^{-1}(a_i')$과 $b_i \in g^{-1}(b_i'')$가 존재하여 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned}\phi\Big(\sum_i a_i d(a_i) b_i\Big) &= \sum_i a_i(\phi\circ d)(a_i)b_i = \sum_i a_i\delta(a_i)b_i\\ &= \sum_i f(a_i)\delta(a_i)g(b_i) = \sum_i a_i'\delta(a_i)b_i''\end{aligned}$$

따라서 ϕ는 위로의 사상이고, Φ도 위로의 사상이다. 또한, 임의의 $a_i, b_i, c_i \in A,\ \ b'\in A',\ \ c''\in A''$ 그리고 $b\in f^{-1}(b'),\ \ c\in g^{-1}(c'')$에 대하여

$$\begin{aligned}&\Phi\Big[b'\Big(\sum_i b_i d(a_i)c_i + K\Big)c''\Big]\\ &\quad= \Phi\Big(\sum_i bb_i d(a_i)c_i c + K\Big) = \phi\Big(\sum_i bb_i d(a_i)c_i c\Big)\\ &\quad= \sum_i bb_i(\phi\circ d)(a_i)c_i c = b\Big(\sum_i b_i(\phi\circ d)(a_i)c_i\Big)c = b\phi\Big[\sum_i b_i d(a_i)c_i\Big]c\\ &\quad= f(b)\Phi\Big[\sum_i b_i d(a_i)c_i + K\Big]g(c) = b'\Phi\Big[\sum_i b_i d(a_i)c_i + K\Big]c''\end{aligned}$$

이므로 Φ는 위로의 (A', A'')-좌우가군준동형사상이다. 사상 $\partial : A \to U/K$를 다음으로 정의하면,

$$\partial(a) = d(a) + K, \quad a \in A$$

A의 임의의 두 원 a, b에 대하여

$$\begin{aligned}\partial(ab) &= d(ab) + K = ad(b) + d(a)b + K \\ &= f(a)(d(b) + K) + (d(a) + K)g(b) \\ &= f(a)\partial(b) + \partial(a)g(b)\end{aligned}$$

이므로 ∂는 (A', A'')-좌우가군의 R-미분이다. 따라서 $(U/K, \partial)$는 A의 미분가군이다. 그리고 (V, δ)가 A의 보편적 미분가군이므로 $(U/K, \partial)$에 대하여 (A', A'')-좌우가군준동형사상 $\Psi : V \to U/K$가 유일하게 존재하여 $\Psi \circ \delta = \partial$. 임의의 $a_i, b_i, c_i \in A$에 대하여

$$\begin{aligned}(\Psi \circ \Phi)(\sum_i b_i d(a_i)c_i + K) &= \Psi[\phi(\sum_i b_i d(a_i)c_i)] = \Psi(\sum_i b_i(\phi \circ d)(a_i)c_i) \\ &= \Psi(\sum_i b_i \delta(a_i)c_i) = \Psi(\sum_i f(b_i)\delta(a_i)g(c_i)) = \sum_i f(b_i)(\Psi \circ \delta)(a_i)g(c_i) \\ &= \sum_i f(b_i)\partial(a_i)g(c_i) = \sum_i f(b_i)(d(a_i) + K)g(c_i) = \sum_i (b_i d(a_i)c_i + K) \\ &= \sum_i b_i d(a_i)c_i + K\end{aligned}$$

이므로 $\Psi \circ \Phi = 1_{U/K}$. 따라서 사상 $\Phi : U/K \to V$는 (A', A'')-좌우가군동형사상이다.

집합 K가 $\ker f \cap \ker g$에 포함된 A의 아이디얼이고, 사상 $F : A/K \to A'$과 $G : A/K \to A''$을 각각 사상 f와 g에 의해 유도된 R-다원환준동형사상이라 하면, 다원환준동형사상 F와 G에 의해 정의된 R-미분과 A/K의 보편적 미분가군을 생각할 수 있다.

정리 3. 3. (U, d)를 (A', A'')-좌우가군인 A의 보편적 미분가군이라 하자. 집합 K가 $\ker f \cap \ker g$에 포함되는 A의 아이디얼이고, M이 $d(K)$에 의해 생성된 U의 부분가군이면, A/K의 (A', A'')-좌우가군인 보편적 미분가군 (V, δ)는 $(U/M, \partial)$와

동형이다. 여기에서 사상 $\partial : A/K \to U/M$은 $\partial(x+K) = d(x) + M, \quad x \in A$로 정의된 R-미분이다.

증 명. (A', A'')-좌우가군 V와 δ가 각각 A/K의 보편적 미분가군과 보편적 미분이라 하고, 사상 $\pi : A \to A/K$를 표준준동형사상이라 하자. A의 임의의 두 원 a, b에 대하여

$$\begin{aligned}(\delta \circ \pi)(ab) &= \delta(ab+K) = \delta[(a+K)(b+K)] \\ &= F(a+K)\delta(b+K) + \delta(a+K)G(b+K) \\ &= f(a)(\delta \circ \pi)(b) + (\delta \circ \pi)(a)g(b)\end{aligned}$$

이므로 $\delta \circ \pi$는 A로부터 V로의 R-미분이다. 즉, $(V, \delta \circ \pi)$는 (A', A'')-좌우가군인 A의 미분가군이다. (U, d)가 A의 보편적 미분가군이므로 (A', A'')-좌우가군준동형사상 $\phi : U \to V$가 존재하여 $\phi \circ d = \delta \circ \pi$. (V, δ)가 A/K의 보편적 미분가군이므로 V는 $\delta(A/K)$에 의해 (A', A'')-좌우가군으로 생성된다. 따라서 임의의 $v \in V$에 대하여

$$v = \sum_i a_i' \delta(x_i + K) a_i'', \quad a_i' \in A', \; x_i \in A, \; a_i'' \in A''$$

이고, 적당한 U의 원 $u = \sum_i a_i' d(x_i) a_i''$가 존재하여 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \phi(\sum_i a_i' d(x_i) a_i'') = \sum_i a_i' (\phi \circ d)(x_i) a_i'' \\ &= \sum_i a_i' (\delta \circ \pi)(x_i) a_i'' = \sum_i a_i' \delta(x_i + K) a_i'' = v\end{aligned}$$

그러므로 사상 $\phi : U \to V$는 위로의 (A', A'')-좌우가군준동형사상이다. 또한, 모든 $\sum_i a_i' d(k_i) a_i'' \in M$ $(a_i' \in A', \; k_i \in K, \; a_i'' \in A'')$에 대하여

$$\begin{aligned}\phi(\sum_i a_i' d(k_i) a_i'') &= \sum_i a_i' (\phi \circ d)(k_i) a_i'' = \sum_i a_i' (\delta \circ \pi)(k_i) a_i'' \\ &= \sum_i a_i' \delta(\pi(k_i)) a_i'' = \sum_i a_i' \delta(0) a_i'' = 0\end{aligned}$$

이므로 $M \subseteq \ker \phi$. 사상 $\Phi : U/M \to V$를 ϕ에 의하여 유도된 (A', A'')-좌우가군준동형사상이라 하면, Φ도 위로의 사상이다. $\partial : A/K \to U/M$이 $\partial(x+K) = d(x) +$

M, $x \in A$로 정의된 사상이라 하면, 임의의 $x, y \in A$, $r, s \in R$에 대하여

$$\begin{aligned}\partial[r(x+K) + s(y+K)] &= \partial(rx + sy + K) = d(rx + sy) + M \\ &= r(d(x) + M) + s(d(y) + M) = r\partial(x) + s\partial(y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial[(x+K)(y+K)] &= \partial[(x+K)(y+K)] = \partial(xy + K) = d(xy) + M \\ &= (f(x)d(y) + M) + (d(x)g(y) + M) \\ &= F(x+K)(d(y) + M) + (d(x) + M)G(y+K) \\ &= F(x+K)\partial(y) + \partial(x)G(y+K)\end{aligned}$$

이므로 $(U/M, \partial)$는 A/K의 미분가군이다. (V, δ)가 A/K의 보편적 미분가군이므로 (A', A'')-좌우가군준동형사상 $\Psi : V \to U/M$이 유일하게 존재하여 $\Psi \circ \delta = \partial$이고, 두 사상 Ψ와 Φ의 합성사상 $\Psi \circ \Phi : U/M \to U/M$은 항등사상이다. 실제로, U/M의 임의의 원 $u + M$에 대하여 $u = \sum_i a_i' d(x_i) a_i''$ $(a_i' \in A',\ x_i \in A,\ a_i'' \in A'')$이므로

$$\begin{aligned}&(\Psi \circ \Phi)(u + M) \\ &= (\Psi \circ \Phi)(\sum_i a_i' d(x_i) a_i'' + M) = \Psi(\sum_i a_i'(\phi \circ d)(x_i) a_i'') \\ &= \Psi(\sum_i a_i'(\delta \circ \pi)(x_i) a_i'') = \Psi(\sum_i a_i' \delta(x_i + K) a_i'') = \sum_i a_i'(\Psi \circ \delta)(x_i + K) a_i'' \\ &= \sum_i a_i' \partial(x_i + K) a_i'' = \sum_i a_i'(d(x_i) + M) a_i'' = \sum_i a_i' d(x_i) a_i'' + M \\ &= u + M\end{aligned}$$

따라서 Φ는 일대일이며 (A', A'')-좌우가군동형사상이다.

정리 3. 4. (U, d)가 (A', A'')-좌우가군인 A의 보편적 미분가군이고, 집합 K가 $(ker\ f)(ker\ g)$에 포함되는 A의 아이디얼이면, A/K의 (A', A'')-좌우가군인 보편적 미분가군 (V, δ)는 (U, d)와 동형 이다.

증 명. M이 $d(K)$에 의해 생성된 U의 부분가군이고, $\partial : A/K \to U/M$가 $\partial(x+K) = d(x) + M$, $x \in A$로 정의된 R-미분이라 하자. $(\ker f)(\ker g) \subseteq (\ker f) \cap (\ker g)$이므로 정리 3.3에 의하여 (A', A'')-좌우가군인 A/K의 보편적 미분가군 (V, δ)는 $(U/M, \partial)$와 동형이다. A의 아이디얼 $(\ker f)(\ker g)$의 원 ab $(a \in \ker f,\ b \in \ker g)$에 대하여 $d(ab) = 0$이므로 $d((\ker f)(\ker g)) = 0$. $d(K) \subseteq d((\ker f)(\ker g)) = 0$이고, $d(K)$에 의해 생성된 M도 0. 따라서 $V \cong U/M = U$이고, $\partial(x+K) = d(x)$, $x \in A$.

정리 3. 5. (U,d)가 (A',A'')-좌우가군인 A의 보편적 미분가군이라 하자. 집합 K가 $ker\ f \cap ker\ g$에 포함되는 A의 아이디얼이고, R-다원환준동형사상 $f : A \to A'$과 $g : A \to A''$가 위로의 사상이면, A/K의 (A',A'')-좌우가군인 보편적 미분가군 (V,δ)는 $(U/d(K),\partial)$와 동형이다. 여기에서 $\partial : A/K \to U/d(K)$는 $\partial(x+K) = d(x)+d(K)$, $x \in A$로 정의된 R-미분이다.

증 명. M을 $d(K)$에 의해 생성된 U의 (A',A'')-부분가군이라 하면, 정리 3.3에 의하여 $V \cong U/M$. 또한, $d : A \to U$가 R-미분이므로 임의의 $k \in K$와 $a,b \in A$에 대하여 다음이 성립한다.

$$d(akb) = f(a)d(kb) + d(a)g(kb) = f(a)[f(k)d(b) + d(k)g(b)] = f(a)d(k)g(b)$$

R-다원환준동형사상 f와 g가 위로의 사상이므로 M의 모든 원 u에 대하여 $u = \sum_i f(a_i)d(k_i)g(b_i)$ $(k_i \in K,\ a_i,b_i \in A)$로 나타낼 수 있고,

$$\sum_i f(a_i)d(k_i)g(b_i) = \sum_i d(a_ik_ib_i) = d(\sum_i a_ik_ib_i)$$

이므로 $M = d(K)$이고, $U/M = U/d(K)$.

참 고 문 헌

(1) R. Berger, Ü ber verschienence Differentenbegriffe, H-B, Heidelberg Akad. Wiss. Math-Nat. Kl, (1960/1961), 1-44.
(2) G. M. Bergman, On Universal Derivations, J. of Algebra, 36 (1975), 193-211.
(3) I. Y. Chung, Derivation Modules of Free Joins and m-Ardic Completions of Algebras, Proc. Amer. Math. Soc., Vo. 34 (1970), 49-56.
(4) I. Y. Chung, On Free Join of Algebras and Kä hler's differential Forms, Hamburg Abhand, 35, Heft 1/2 (1970), 92-106.
(5) I. Y. Chung, Derivation Modules of Group Rings and integers of Cyclotomic Fields, Bull. Korean Math. Soc., Vo. 20 (1983), 31-36.
(6) J. S. Golan, Extension of Derivation Modules of Quotients, Commu. Algebras,9(3) (1982), 275-285.
(7) S. Lang, Algebras. Addison-Wesley. London, 1961.
(8) J. Lewin, A Matrix Representation for Associative Algebras I, II, Tran. of Amer. Math. Soc. Vo. 188, issue 2 (1994), 293-317.
(9) Hidyuki Matsumura, Commutative Algebra, Benjamin Cummings Publishing Company, London, Amsterdam, Tokyo, 1981.
(10) R. S. Pierce, Associative Algebras, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin , 1982.
(11) P. F. Smith, On Two-sided Artinian Quotient Rings, Glasgow Math. J. 13 (1972), 288-302.

Department of Mathematics, Chungbuk National University, Cheongju 361-763