韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 프로시딩>
1997. 7. 제6집, 357-370.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Proceedings of Mathematical Education
Series E: July 1997, Vol. 6, 357-370.

解法 發生 模型 究作
(A Model of Generating Solution for Problem Solving)

조 동 호 (명지고등학교)

— 促求模型, 手順模型, 亞流模型 —

차례

00. 발생의 모형

00§1. 진술의 양식은 단조롭다!

수학문제의 내용은 다양다기하며 단지 교육 목적에서 출제된 것들이라 할지라도 천차만별이다. 난이도 또한 예측불허할 뿐더러 현란하기까지 하다. 그러나 매우 높은 빈도로 부과되는 수학문제의 진술 양식은 지루하다 할 만큼 단순하다. 예를 들어보자.

① "무엇 무엇이 알려져 있을 때 무엇 무엇을 알아내어라." 또는, 그 '무엇은 얼마인가?' 아니면, '몇개인가?', 흔히는 '값을 구하라.' 등등.

. . . .

② "무엇이 이러저러할 때 이러이러한 조건을 만족하도록 무엇무엇을 구하라." 또는 '결정하라.', 드물게 '무엇은 무엇이며 어떠해야 하겠는가?' 등등.

③ "무엇은 무엇이고 어떠할 때 무엇무엇을 만족하(도록)는 최적치(최대, 최소, 상계, 하계, 등등)는 얼마인가?"

규범수학 수준에서 아주 흔히 접할 수 있는 문제는 거의 위와 같은 형식으로 진술되어 있다. 먼저 이상과 같이 무엇을 구하라는 발주 형식의 문제를 통틀어서 구답문제라 부르기로 하자. 구답문제로서 구하는 것이 수치일 때 특히 구치문제라 한다.

여러가지 물리량을 구하라든가 가령 길이, 넓이, 부피를 구하라든가 또는 각의 크기

를 구하라는 등등의 문제가 구치문제이다. 구치문제가 아닌 구답문제는 이를테면 함수(수열, 행렬)를 구하라든가, 관계식(등식, 부등식)을 구하라든가, 도형을 작도하라든가, 필요충분조건을 구하라는 등등의 여러가지가 있겠다.

④ "무엇이 무엇을 어떻게 할 때, 무엇이 어떻게 될(할) 확률을 구하라."

위의 진술 양식은 확률문제의 전형이다. 이 또한 구치문제에 해당됨은 물론이다. 그밖에도 집합의 원소의 갯수를 구하라는 문제 곧, 계수(경우의 계수)문제도 일종의 구치문제이다. 그밖에도 또 없을까?

각종 방정식 문제는 어떤가? 이야말로 구치문제의 원형이다. 그리하여 구치문제와 구답문제는 절대다수를 차지하는데, 이들 모두가 조건문($p \rightarrow q$) 형태로 번역될 수 있다는 사실이다. 이 점은 이후 논지의 중요한 단서가 된다.

⑤ "'만일 무엇이 이러저러하면 이러이러한 사실이 성립한다.' 이를 밝혀라," 또는 밝혀라는 말 대신에 '보여라' 든가 '증명하라', 아니면 '왜 그런가?' 등등.

⑥ "다음의 동치관계식(예: 등식) 또는 순서관계식(예: 부등식)이 성립함을 밝혀라." 또는 '보여라, 증명하라, 입증하라.' 등등.

위에서 보는 바와 같은 진술 양식의 문제들을 이른바 증명문제라 부르기로 하자. 이는 주어진 명제의 진위를 밝히라는 문제이다. 여기에는 가령 '여사여사한 공식을 유도하라.'는 진술의 문제도 포함된다. 증명문제는 명제의 내용이나 형식 만큼이나 다양하다. 그러나 여기에서도 높은 빈도는 역시 조건문 형식이다.

⑦ "다음의 존재명제를 증명하라." 또는 "적어도 몇개가 존재함을 보여라." 라든가 "무한히 많음을 밝혀라." 또는 "하나도 없음을 입증하라." 아니면, "오직 하나 뿐(일의적)임을 증명하라." 등등

위의 ⑤와 같이 조건문($p \rightarrow q$)의 형태로 번역될 수 있는 문제들만을 우선 주목해 두기로 하자. 이것은 빈도가 높기 때문이기도 하지만 본고가 다루고자 하는 발생의 원리상 중요한 의미를 가지기 때문이다. 전칭명제이든 존재명제이든 조건문의 형식을 갖추었으면 마찬가지이다.

문제 진술상의 특징 때문에 붙여진 명칭으로 문장제(word problem)라는 것이 있다. 이를 보통 응용문제라는 명칭과 비슷한 뜻으로 쓰는 사람들이 있는데 이들은 뜻하는 바가 각각 다르다.

⑧ 아주 드물게 "이러이러한 성질이나 조건을 만족하는 보기(정례 또는 반례)를 들어라." 아니면 "그렇게 되는 또는 안되는 이유를 예를 들어 설명하라." 등등.

예를 들어 보이라는 문제도 역시 증명문제이다. 그것은 정례(exact example)의 경우 험증(verification)이 되겠고 반례(counter example)의 경우는 반증이 될 것이다. 이를 거례문제라 부르기로 한다.

⑨ "어떠어떠한 정의나 정리 또는 공식을 써보아라." 또는 "이러한 사실을 어떻게 생각하는가? 당신의 의견을 말해 보아라." 등등.

위와 같은 형식은 특정한 지식의 파지 여부를 알아보려고 가령(구두)시험 같은 데서 종종 볼 수 있는 문제이다. 견해나 철학을 피력하는 문제도 마찬가지이다. 이러한 진술 양식의 문제 유형은 본고가 다루고자 하는 해법 발생의 대상으로서는 거리가 멀다.

그밖에도 puzzle이나 nonsenese quiz를 포함하여 수수께끼나 재치문답의 문제를 고려해 볼 수 있다. 이러한 류의 문제도 또한 본고가 다루려는 해법발생의 대상은 아니다. 그렇지만 이것들은 풍부한 상상력을 고무시키는 바 있으므로 해법발생의 훈련으로서는 아주 좋은 연습 문제가 될 수 있다.

이제까지 고찰한 바는 문제의 진술 양식을 일별한 것인데 이는 해법발생의 대상이 됨직한 문제를 알아보는 데 도움을 얻고자 한 것이다. 또한 명제의 형식으로 번역하는 데 참고가 될 것이다.

다음은 수학문제로서 진술 양식은 물론 소속 분야의 특징이라든가 특성에 따라 명칭이 붙어있는 여러가지 유형의 문제를 일별한 것이다. 이것은 하나의 차림표(menue)로서 참고하면 좋을 것이다.

문제 명칭 일람

<u>구치문제</u>	부정방정식	<u>구답문제</u>
계산문제	<u>(정)수론문제</u>	인수분해
연산문제	diophantine equation	근의 분리문제
오차문제	계수문제	극한문제
(근사치)	(경우수) 수열극한	
최대최소문제	집합계수	무한급수
극대극소	<u>집합의 농도문제</u>	함수극한
최적치문제	면적문제	미적분문제
미정계수	체적문제	부정적분
(항등식)	선적문제	정적분문제

대수방정식	수열문제	차분방정식
초월방정식	급수문제	(점화식)
방정(식)문제	조화해석	수열 구하기
연립방정식	O.R 문제	함수 구하기
(과잉, 정상, 결여)		
미분방정식	해석기하문제	선형대수
상미분방정식	이차곡선	행렬문제
편미분방정식	삼각법	행렬식
적분방정식	다양체	벡터문제
기하문제	증명문제	미분기하학
도형문제	논증기하	응용문제
궤적문제	존재명제	문장제
작도문제	전칭명제	역학문제
벡터문제	충분조건	동력학
(tensor)	필요조건	정력학
부등식문제	필충조건	이산수학문제
대수부등식	(완전조건)	그래프문제
조건부등식	직접증명	매듭문제
절대부등식	간접증명	조합론
초월부등식	확률문제	(combinatorics)
등주부등식	통계문제	수수께끼
복소해석학	고등미적분	재치문답

00 § 2. 해법의 발생은 가능한가?

문제해결(problem solving)은 해결자 스스로가 해법을 능히 발생시킬 수 있느냐의 여부에 달려있다. 타고난 소질 같은 것이 별로 없어 보이는 대다수의 개인에게 있어서 그것은 쉬운 일이 아니다. 더구나 해결자(problem solver)가 풀이를 만들어 낼 수 있도록 능력을 계발하고 도와주는 일은 매우 어렵다. 그러나 문제해결은 가르쳐져야만 하는 수학교육의 출발점이자 실질적 과정이며 동시에 최종 목표이기도 하다. 이것은 단

순한 덕목의 하나가 아니다.

수학교육이 문제해결을 중요한 영역으로 인식하게 되었다는 근자의 세태는 매우 고무적이다. 이 벅찬 과제 앞에서 주의할 점은 너무 탐욕을 내어서는 안된다는 사실이다. 수학교육은 분수를 알아야 한다. 되도록 작은 규모의 목표를 세우고 그것을 잘 관리함으로써 도울 수 있는 한계안에서만 도움을 주는 것으로 만족해야 한다. 해결자의 자발성에 불을 붙이는 정도로 그 소임이 가능하다고 본다. 또한 그 이상은 어떻게 할 수도 없는 법이다.

목표와 방법을 알맞게 조절하면 수행하여야 할 과제가 분명해지고 또한 작업이 수월해진다. 문제해결을 위한 해법의 발생은 정의적 여건이 충분히 갖추어져 있을 때, 본고가 제시하려는 적절한 방법을 활용한다면, 누구에게나 가능한 일이다.

이 말이 어떠한 문제이든지 해결자가 자유자재로 풀어낼 수 있도록 해주는 비방이 있다는 뜻으로 오해되어서는 안되겠다. 아주 제한된 문제들을 부과하고 해결자 중심의 전인적인 사고 행동 과정을 경험하도록 함으로써, 우선 나쁜 습관을 고치고, 이로써 해법발생의 소지를 열어 줄 수 있다는 뜻이다.

그 정의적 여건이란 무엇인가? 이점에 관해서는 다른 논문([03],[04])에서 충분히 논의된 바 있다. 먼저 해결자에게 문제를 풀고자 하는 의욕이 있어야 한다는 것이다. 문제해결의 의지가 참신한 흥미와 건전한 동기에 의하여 인도되고 창조적인 분위기에서 자발적인 행동으로 추진된다면 더할 나위없이 좋다.

순진한 호기심도 좋고 강렬한 의지도 필요한데 그것은 도처에서 기다리고 있는 좌절과 절망을 극복하는 데 크게 도움이 될것이기 때문이다. 뿐만 아니라 이러한 희망은 발견과 탐구를 촉진시킴으로써 이어지는 작업을 생산적으로 이끌 수 있다.

그 다음은 부과된 문제를 해결하는 데 필요한 최소한의 관련 지식이 어느 정도 습득되어야 한다는 점이다. 선수 학습이 전혀 이루어지지 않은 상태에서 현안 문제를 타결한다는 것은 무모하다. 대부분의 해결자는 능력의 한계 앞에서 막연해지는 일이 다반사이다. 실제로 무슨 지식이 필요한지도 짐작하지 못하는 일이 허다하다.

필요한 지식을 찾아 스스로 공부한다면 좋겠지만 그것이 가능한 해결자는 이미 교육 목표를 어느 정도 이룬 사람일 것이다. 그래서 선수 학습으로 이끌어주는 식환(feedback) 장치가 필요하다. 이것은 약간의 훈련만 거치면 고칠 수 있는 병이다. 기대되는 것은 앞에서 언급한 진취적 의지와 성취 의욕이다.

이렇게 되었을 때 되도록 쉬운 문제에서부터 시작하여 점차로 능력에 미칠만한 문

제를 부과하여 가는 방법이 좋다. 작은 성취감과 기쁨을 누려서 그 보상으로 자심감을 유지하고 긍정적 자아를 확보하도록 하여야 한다. 수학하는 힘이 길러지도록 배려하는 일은 세련된 교사의 특징이다. 게다가 사려 깊은 교사는 중속의 심리와 개인의 정서를 잘 파악하고 있을 것이다.

수학교육은 문제해결에 임하여 해결자 자신의 능력이 성장하고 수준이 향상되는 최소한의 말미와 과정을 배려해야만 한다. 부과되는 문제도 되도록, 본고가 제한하고 있는, 약간 도식적인 해법 발생이 가능한 문제들이 좋겠다. 너무나 어려운 문제를 풀려다가 낙심하거나 식상하는 일은 좋지 않다.

이렇게 문제해결을 통하여 수학하는 힘을 키우는 일은 어느 수준까지는 밀고 나갈 수가 있다. 그 어간에 되도록 무리없이 젖을 때는 소위 이유 조치가 필요하다. 그것은 다소의 개인차(individual difference)를 고려하여야 한다. 자발적인 탐구 의지가 손상을 입지 않는다면 혼자서 문제와 씨름하도록 하기까지 그렇게 오래 보살펴야 하는 것은 아니다.

그 다음은 해결자 자신의 내부에 도사린 소질과 천품이 발휘되어야 할 단계를 남겨 놓고 있다. 해결자 스스로 문제를 제기하고 찾아다니며 도전적인 자세로 해결을 추진하여 나아가도록 고무시켜야 한다. 상처입은 자신감 또는 인습과 악습에 찌든 행동이 치유된다면 자발성을 회복할 수 있을 것이다.

그렇다면 앞에서 언급한 해법발생의 적절한 방법이란 무엇인가? 그것은 일차적으로 해결자 개인을 억누르고 있는 나쁜 사고 습관과 비효율적인 병리적 행동을 고치는 일이다. 이것이 어떻게 가능한가! 물론 어렵다. 그러나 이를 치료하는 데 도움을 주는 여러가지의 권고사항 또는 발문을 제시할 수는 있다.

여기에다가 적극적으로는 일련의 절차에 따라 해법을 발생시키는 장치를 개발할 수 있다. 그것은 생산적인 행동 방식 또는 사고 방식을 함양하는 데에 실질적인 도움을 줄 것이다. 그것은 극히 제한된 어떤 유형의 문제들에 대해서만 가능하다는 점을 다시 한번 상기해 두고자 한다.

문제해결에 임하여 해법을 발생하는 일은 얼마큼 가르쳐져야만 한다. 그래서 해법발생의 모형이나 여러가지 장치라고 하는 것들은 누구에게나 성과를 보장하려는 의도하에 만들어지는 법이다. 그러나 이것은 소망일 뿐이며 앞에서 언급한 바와 같이 불가하다. 그러면 우리가 할 일이란 무엇인가?

요행이라 할만한 발견을 기대하는 일은 어리석다. 또한 막연한 시행착오도 한심하

다. 이지랑이처럼 피어오르는 행운의 묘안(idea)이나 기대할 수 있을 뿐이라면 해법의 발생은 애초부터 가르쳐질 수가 없는 일이다. 그래서 우리가 이룩해야 할 과제란 얼마큼 해법발생의 기능을 일깨워주는 일이다.

매우 제한된 유형의 문제에 대해서는 '조작적 조건 형성'에 의하여 해결자의 문제해결 능력을 어느 수준까지 활성화할 수 있다. 모형을 근거로 하여 괄목할만한 연습 효과를 거둘 수 있다. 그리고 이로써 해결과 자신의 잠재 능력이 발휘될 희망을 가지는 것이다.

이 모형은 외연적이고 내포적으로 타당한 것인 바 이 점은 다른 논문([03], [04])에서 논증된 바 있다. 가령 기술적으로 잘 기획된 임상 수업을 통하여 효능과 효율이 검증될 수 있을 것이다. 되도록 좁은 범위의 변인에 한하여 발생모형에 의한 수업이 긍정적 효과를 내는지 확인해보는 일은 그리 어렵지 않다.

00§3. 발생의 모형을 개괄하면?

본고가 제시한 문제해결을 위한 해법의 발생모형은 촉구모형을 근간으로 하고 있다. 이를 기능적인 절차로 번안한 수순모형이 있고, 다시 이들을 보완하여 주는 여러 개의 아류모형으로 짜여져 있다. 앞서의 두 모형은 동일한 내용의 서로 다른 표현이다. 그리고 아류모형은 얼마가 개발되어 있고 앞으로도 얼마든지 개발될 여지가 있다.

해법발생의 지침이라고 할 수 있는 촉구모형은 권고와 발문의 목록이다. 모두 3단계 12항목 36세목에 달한다. 그 세목은 앞의 총괄목차에서 보는 바와 같다. 원래는 3단계 10항목 30세목이지만 여기에 추가되는 마지막 2항목 6세목은 앞서의 30세목을 관장하는 초월인지적 조절의 지침이다.

이상에서 첫째 단계는 문제를 분해하고 조립하여 문제의 형질(소위 문질)을 규명하는 절차이다. 그래서 어떠한 방법으로 해법을 발생시킬 수 있는지를 판정하는 것이다. 또한 해법이 어떠한 양상으로 가능할지를 예상하거나 가늠해보는 일까지도 여기에 포괄된다. 이른바 해결을 조망하여 보는 것이다.

둘째 단계는 어떻게 해서든지 해법을 발생시켜야만 하는 절차이다. 앞에서 예견되었거나 판정된 바에 따라 해법발생의 방향을 우선 크게 두 갈래로 설정해 볼 수 있다. 연추적 해법과 비연추적 해법이 그것이다.

먼저 연추적 해법이란 추이율을 연거푸 적용해 감으로써 이어지는 연결 고리를 찾

아내는 작업이다. (졸고 [01] 참조)

마지막으로 셋째 단계는 그 앞 단계에서 안출해낸 풀이의 계획과 방법대로 실행하여 해법을 확정하는 절차이다. 그리고 나서는 풀이를 되돌아 보면서 음미하고 반추하는 일도 바로 여기에서 할 일이다.

문제를 변형 또는 확장·축소함에 따라 해법을 조정하는 일도 여기에 포함된다. 이것은 해법을 일반화하거나 특수한 해법을 찾아내는 일이다. 보통 풀이의 수행과 반성이라는 두 단계로 되어있는 많은 모형과는 달리 본고의 모형은 이를 한 과정으로 묶었다.

이미 앞에서 언급했지만 맨 마지막의 2항목과 2×3=6세목은 발생 단계 그 자체가 아니고 발생의 전과정을 관장하기이다. 해법발생의 시종에 걸쳐서 과정을 통별하면서 전체를 통제하고 정보의 흐름을 조절하며 모형을 운용하는 이른바 초월인지적 사고작용 기능이다.

이 부분은 과정을 통별(monitoring)하면서 총괄할 뿐만 아니라 정보를 관리하고 사고를 운용하는 소위 경영 기능까지를 포괄한다. 이에 대한 논의는 별도로 다른 논문에서 다루었다. (졸고 [04] 참조)

발문 중에는 이 모형 자체를 거부하고 사용을 중지시킬 수도 있는 자유를 일깨우는 것도 있다. 사고의 틀을 일단 선택하여 구부러지면 그곳을 빠져 나오기가 좀체로 어렵기 때문이다.

항목과 세목의 집계표

통제와 조절의 발문 : 2항목, 2×3 = 6세목		
첫째(문제인식) 3항목	둘째(해법안출) 4항목	셋째(확정정돈) 3항목
3×3 = 9세목	4×3 = 12세목	3×3 = 9세목
소계 : 3+4+3 = 10항목, 10×3 = 30세목		
총계 : 2+10 = 12항목, 모두 12×3 = 36세목		

수순모형 및 아류모형

문제를 해결하는 데 맨 먼저 착수하여야 할 일은 무엇인가? 그것은 문제를 읽고 그것을 논리적 언어로 재구성하는 일이다. 일상 언어로 진술된 문제를 수학적인 언어로 분해하고 논리적 언어로 조립하여 명제 형식을 갖추도록 번역하는 것이다. 이로부터 문질을 규명할 수 있고 또 그 해결을 조망해 볼 수 있다. 여기에서 해결자가 만일 이전에 풀어본 경험이 있는 문제라면 해법을 되살려 곧 바로 풀이를 완결지을 수 있다.

문질(問質)이란 문제의 특성, 유형, 부류 명칭, 관련된 수학의 소속 분야 등등을 말한다. 그래서 문질을 규명한다고 함은 이상과 같은 특질을 판정하는 일이다. 가령 수열 문제라든가, 방정식 문제라든가, 또는 확률 문제라든가…… 등등과 같이 그 문제의 명칭을 붙여 판단하고 분류하는 것이다.

그 다음에 이른바 연추적 해법이 가능한가를 판정하는 일이 해법발생의 문턱이요 관문이다. 그것은 우선 조건문 ($p \rightarrow q$) 형식이거나 명제가 모종의 관계(relation)의 진술($_aR_b$)로 되어 있고 그 관계가 추이율(transitivity)을 만족하는가를 보아 알 수 있다. 이를테면 항등식이나 부등식 같은 것들이다. 연추적 해법이 가능한 문제는 추이율에 따라 연결 고리를 만들어 이어가는 작업이 개발되어 있다.

물론 여건이 갖추어졌더라도 모두 연추적 발생이 가능한 것은 아니다. 문제를 동치변형하여 연추적 해법이 가능하게 될 수도 있다. 또는 연추적 발생이 안되거나 불가한 문제도 있음을 유념하여야 한다. 그래서 나머지 작업은 연추적 해법이 가능하지 않은 명제(문제)를 가려내는 일이다.

이른바 비연추적 발생 절차를 요하는 문제는 어떻게 처리해야 하는가? 먼저 이미 계발된 아류모형 또는 셈틀(algorithm)을 찾아 이를 적용할 수 있도록 동원해야 한다. 이상은 대체로, 문제를 변형하거나, 장면을 전환하거나, 또는 보조적 요소를 도입함으로써 이미 개발되어 있는 해법을 이용할 수 있는 꼴로 이끌어가는 절차를 통하여 가능하다.

이를테면 귀류법(모순법, 배리법)을 적용하는 것이다. 이 아류모형을 동원할 경우 모순을 이끌어내는 절차는 역시 연추적 발생이다. 또는 수학적 귀납법을 적용할 수도 있다. 이 아류모형을 동원할 경우 두번째 단계는 통상 연추적 절차를 따라가게 된다. 그밖에 전환법이나 동일법을 쓰더라도 부분적으로는 똑같이 연추적 절차에 따라 해법을 발생시킨다. (졸고 [05] 참조)

주어진 문제를 분석하여 그 특징으로부터 이들 아류모형의 어느 해법을 적용할 수

있는지 알아낸다. 그래서 그것을 판정하여 적절한 기존의 해법을 배정하는 일이 관건이다. 아류모형은 그리 많지 않은데 해결자의 정보관리 노력으로 습득해두어야 할 방법적 지식(knowhow) 또는 실질적 지식이다.

그런데 이상과 같이 기존의 아류모형을 적절히 구사하는 일조차 통하지 않는 문제의 해법은 그야말로 해결자의 창의력에 의존되어 있을 뿐이다. 완전히 창조해내야만 할 상황에서 줄 수 있는 도움이란 빈약하다. 그렇기 때문에 촉구모형의 어떤 곳에서는 다소 막연한 발문이나 권고사항을 제시할 수 밖에 없다는 이야기이다.

가령 '상상력의 한계를 극복' 하라든가, '기지적 타개를 원하는가?' 따위의 발문이 특히 그렇다. 마치 물에 빠진 사람에게 건네는 실효성 없는 충고라는 비난을 면할 수 없다.

해법 발생의 틀 안에서 안주하는 일은 결코 바람직하지 않다. 그렇지만 많은 학생들의 입장에서는 이 정도로도 충분하리라고 본다. 이것은 문제해결을 위한 수학교육의 최저 목표이다. 물론 전망있는 두뇌는 이를 출발점으로 하여 마침내는 이를 초월하지 않으면 안된다.

① 주어진 문제를 명제의 형식으로 나타낸다.

② 연추적 해법이 가능한 것을 가려낸다.

③ 비연추적 발생이 필요한 문제는 적절한 아류모형에 호소한다.

④ 되도록 경험에 의지하여 발생한다.

⑤ 그밖에는 해결자의 창의력에 달려있다.

이상에서 개괄된 해법발생의 절차와 과정은 이른바 수순모형이다. 이것은 뒤에 가서 논의하고 자세하게 소개될 촉구모형의 내용을 보다 기능적으로 간추려 순서도(flow chart)처럼 나타낸 것이다. 수순모형 안에는 algorithm 또는 아류모형을 동원하는 절차가 들어 있다. 다시 말하면 아류모형들은 수순모형의 일부(subroutine)로서 그것을 보완해 준다. 아류모형에는 구체적으로 이런 것들이 있다. (졸고 [05] 참조)

01) 예시법(例示法)	07) 귀납법(歸納法)	13) 인우법(引偶法)
02) 분증법(分證法)	08) 삼단법(三段法)	14) 치환법(置換法)
03) 격출법(格出法)	09) 한추법(限推法)	15) 전환법(轉換法)
04) 첨삭법(添削法)	10) 제위법(除僞法)	16) 동일법(同一法)
05) 연추법(連推法)	11) 반언법(反言法)	17) 환위법(換位法)
06) 양도법(兩刀法)	12) 귀류법(歸謬法)	18) 환질법(換質法)

이상은 모두 증명법이다. 문제해결이란 증명을 구하는 일이므로, 증명의 방법은 이미 계발된 해법으로서, 수순모형은 이것들을 적절한 상황에 동원할 수 있다. 이상에서 귀납법이란 이른바 수학적 귀납법을 가리키고 삼단법(categorical syllogism)이란 소위 삼단논법의 한 전형이다. 그밖에도 비둘기 집의 원리(pigeon hole principle)도 증명법의 하나이고 따라서 잘 알려진 아류모형이다.

이를테면 '문장제로부터 방정식을 세워서 풀기'라든가 '다항식의 인수분해'를 들 수 있다. 특히 후자는 '대수학의 근본정리'와 이른바 Galois Theory에 근거를 두고 있고 따라서 대수방정식의 해법과 연계되어 있다.

어떤 아류모형은 결집력이 강해서 거의 algorithm에 가깝다. 그밖에도 '상미분방정식의 해법발생모형'을 구상해 볼 수 있다. 이 주제는 매우 산만할 것으로 생각될지도 모르지만 의외로 그렇지 않다. 아류모형은 개발의 여지가 풍부히 열려있다.

기본절차 권고발문

① 주어진 정보는 무엇인가?
② 구하는 정보는 무엇인가?
③ 주어진 정보로부터 이끌어낼 수 있는 것은?
④ 구하는 정보가 얻어지려면 무엇이 필요한가?
⑤ 내려온 정보와 올라온 정보를 이어라.

이상은 촉구모형과 수순모형 중에서 뽑아 간추린 권고 및 발문인데 어떤 문제이든지 처음에 착수해야 할 수속을 말해주는 지침이다. 또한 이것은 연추적 발생의 핵심부분이기도 하다.

많은 초보자들은 문제 앞에서 망설이지 않도록 이와 같은 발문을 노래처럼 읊어 두면 좋다. 마찬가지로 초월인지를 내면화할 수 있도록 다음과 같은 발문을 새겨 두면 매우 유익되는 바가 많을 것이다.

초월인지 권고발문

① 무엇을 하는지 알고 있는가?
② 어째서 그렇게 해야 하는가?
③ 해결의 방법은 무엇인가?
④ 상식과 미신을 타파하라!
⑤ 되도록 수평사고를 피하라!

축구모형 : 권고와 발문의 목록

첫째 (제1/3단계) : 문제를 인식하기

01. 문제의 분해
    §1, 주어진 정보는 무엇인가?
    §2. 구하는 정보는 무엇인가?
    §3. 명제의 형태로 조립하라!
02. 문질의 규명
    §1, 양분이 가능한 문제인가?
    §2. 문제의 유형은 어떠한가?
    §3. 이전에 다루어 보았는가?
03. 해결의 조망
    §1, 해답의 형태를 예상하라!
    §2. 해결의 방향은 어디인가?
    §3. 해결의 전망은 어떠한가?

둘째 (제2/3단계) : 해법을 안출하기

04. 풀이의 고안
    §1. 거꾸로 거슬러 올라가라!
    §2. 위에서 이끌어 내려가라!
    §3. 정의나 정리를 알고있나?
05. 발생의 촉진
    §1. 다양한 실례를 들어보라!
    §2. 되도록 그림을 그려내라!
    §3. 보조적 장치를 도입하라!

---

06. 장면의 전환

§ 1. 경우를 적절히 나누어라!

§ 2. 험난한 장애는 우회하라!

§ 3. 문제의 배경을 바꾸어라!

07. 묘안의 발견

§ 1. 번다할 때에는 휴식하라!

§ 2. 상상의 한계를 극복하라!

§ 3. 기지적 타개를 원하는가?

셋째 (제3/3단계) : 풀이를 매듭짓기

---

08. 해법의 확정

§ 1. 기호나 문자를 도입하라!

§ 2. 필요한 연산을 확보하라!

§ 3. 중요한 논점을 확인하라!

09. 풀이의 반성

§ 1. 논리적 하자를 점검하라!

§ 2. 해답이 제의에 알맞은가?

§ 3. 또다른 풀이는 없겠는가?

10. 문해의 정돈

§ 1. 문제를 대소간 변형하라!

§ 2. 문제와 해법을 조정하라!

§ 3. 타인의 성과를 참조하라!

이상 (3단계 10항목 30세목)의 과정을 관장하기

---

11. 과정의 운용

§ 1. 무엇을 하는지 알고있나?

§ 2. 어째서 그렇게 해야하나?

§ 3. 해결의 방법은 무엇인가?

12. 사고의 경영

§ 1. 상식과 미신을 타파하라!

§ 2. 가용적 지식을 구축하라!

§ 3. 사고의 방법을 경영하라!

BIBLIOGRAPHY OF REFERENCES

[00]George Polya, *How to Solve It.* (Subtitle : *A New Aspect of Mathematical Method*) Princeton, N.J : Princeton University Press, 1957.

[01]조동호, “해법발생의 연추적 모형.” 한국수학교육학회 프로써딩, 1994: pp.229~248. 본 미공개 논문집의 첫번째 논문.

[02]______, “Polya 목록의 해설과 비평.” 본 미공개 논문집의 2번째 논문.

[03]______, “문제해결과 해법발생의 외연적 고찰.” 본 미공개 논문집의 3번째 논문.

[04]______, “해법발생과 발생모형의 이론적 고찰.” 본 미공개 논문집의 4번째 논문.

[05]______, “證明과 推論의 方法論.” 서울: 연세대학교 교육대학원, 1986.

[06]Dolan, D. T., and J. Williamson, *Teaching Problem Solving Strategies.* Reading, Mass : Addison Wesley Pub. Co., 1983.

[07]Dunkin, M. J., and B. J. Briddle, *The Study of Teaching.* New York : Holt, Rinehart and Winston, 1974.

[08]Hayes, J. R., *The Complete Problem Solver.* Hillsdale, N.S. : Law- rence Erlbaum Associates, Inc., 1989.

[09]Krulik, S., and J. A. Rudnick, *Problem Solving : A Handbook for Senior High School Teachers.* Boston : Allyn and Bacon, 1989.

[10]Resnick, L., *Education and Learning to Think.* Washington, DC : National Academy Press, 1987.

[11]Schoenfeld, A. H., (ed) *Cognitive Science and Mathematics Education.* Hillsdale, N. J : Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1987.

[12]Silver, E. A., (ed) *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving : Multiple Research Perspectives.* Hillsdale, N. J : Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1985.

[13]Sowder, L., “The Looking-Back Step in Problem Solving.” *Mathematics Teacher,* 79(1986) : pp.511~513.

[14]Travers, K. J., (et al), *Mathematics Teaching.* New York : Harper and Row Pub. Co., 1977.