

문장제 문제 풀이의 실패 유형 분석과 그 지도 방안

주 익 한 (온양고)
김 영 국 (서원대)

I. 서론

1. 연구의 필요성과 목적

오늘의 수학 교육은 학생으로 하여금 급변하는 정보화 시대에 적응할 수 있는 사람으로 성장할 수 있도록 도와주는 것이 되어야 한다. 이는 수학 교육이 단순한 지식의 전달에서 탈피하여 문제에 직면하였을 때 합리적으로 대처할 수 있는 능력을 갖도록 문제 해결력을 길러 주는 것이어야 한다는 것이다. 이것은 수학적으로 사고하고 창의적으로 도전하는 적극적인 태도를 통해서만 가능한 것이다. 그러나 지금까지 우리의 수학 교육은 입시 대비 위주로 교육되어 사고력을 신장하는데 관심을 두기보다는 판에 박힌 문제를 주고 단시간에 많은 문제를 풀기 위한 요령의 습득에 치중해서 학생들은 수동적으로 교사가 풀어 주는 풀이를 암기하는 형태의 공부가 주류를 이루고 있다. 이로 인해서 학생들은 문제를 대하면 풀이 방법이나 공식을 떠올려 대입하는 방법으로부터만 해결하려는 태도를 갖게 되어 해법이나 공식이 없으면 쉽게 포기해 버린다.

학생들에게 수학의 기본적인 지식을 가지게 하고, 수학적으로 사고하는 능력을 기르게 하여, 창의적으로 문제를 해결할 수 있게 하는 것¹⁾이 수학 교과목의 목표이다. 이러한 문제 해결 능력은 문장제 문제의 풀이를 통해서 길러질 수 있으며, 또한 이 과정에서 학습의 결손도 분명하게 드러난다. 따라서 문제 해결을 지도하기 위해서는 문제 풀이 과정에서 나타나는 실패를 과학적으로 파악하고 이에 적절하게 대응하기 위한 방안을 고안하여 지도하는 것이 필수적인 사항이다. 이러한 관점에서 보면 학생들이 범하는 실패가 학생들의 집단적인 특성이나 문제 해결의 단계적 측면 등에서 유사한 형태의 실패를 범하는 경향을 띠고 있다.

1) 교육부, 고등학교 교육과정(I), 1992, p.86.

따라서 실패의 형태에 따른 적절한 대응 전략을 수립하여 학생들이 가급적 실패를 범하지 않도록 예측된 지도를 함으로서 자신감과 흥미를 가지도록 할 필요가 있다.

본 연구는 학생들이 문장제 문제의 풀이 과정에서 발생하게 되는 실패 요인을 체계적으로 분석하여 유형에 따라 분류하고, 학생들의 특성에 따른 실패의 경향을 파악함으로써 적절한 학습 지도 방법을 모색하는 데 목적이 있다.

2. 연구 문제

본 연구를 위한 문제는 다음과 같다.

가. 학생들이 문장제 문제의 풀이 과정에서 범하는 실패를 Polya의 문제 해결 단계와 B. S. Bloom의 교육목표 분류에 의해서 유형화할 수 있을 것이다.

나. 문제 풀이 과정에서 나타난 실패 유형에 따른 분석을 통하여 풀이 단계별로 적절한 지도 방안을 모색할 수 있을 것이다.

3. 용어의 정의

가. 실패 : 문제의 풀이 과정 중에서 발생하게 되는 오류, 계산의 잘못, 인지의 오류 등으로 인하여 목표에 도달하지 못하는 모든 상태를 말한다.

4. 연구의 범위와 한계

교과의 학습 수준과 진행에 따라 지속적인 평가를 통하여 문제 해결 과정에서 범하게 되는 실패를 조사하여야 하나 본 연구가 고등학교 3학년 학생들을 대상으로 제한된 기간에 실시하여 본 연구를 일반화하는 데는 다음과 같은 제한점이 있다.

가. 본 연구의 대상을 천안시 소재의 C고등학교 3학년 2학급을 대상으로 하였기 때문에 표본의 크기가 제한적이므로 고등학생 전체 상황으로 일반화하는 데는 제한이 있을 수 있다.

나. 실패 유형 분석을 위한 평가 문제는 고등학교 수학 I의 교육과정의 내용으로 작성하였다.

다. 문제 풀이에서 나타난 실패에 대한 분류가 연구자에 따라 약간의 차이는 있을 수도 있다.

II. 선행 이론과 연구 동향

1. 문장제 문제

문장제란 문제의 상황이 일상적인 문장으로 서술되어 있어서 이의 해결을 위해서는 수식이나 기호 등을 써서 수학적 형식으로 바꿔서 수학적으로 처리해야 해답을 얻을 수 있는 문제를 의미한다. 그래서 문장제 문제의 해결 과정에서 가장 중요한 것은 주어진 장면을 수학적 기호로써 표현하는 과정이다.

수학 문제를 해결하는 데는 식을 세우고 계산하는 능력만 있으면 쉽게 해결될 것으로 생각하지만 문장제 문제를 해결하는 데 필요한 능력은 다음의 다섯 가지를 생각할 수 있다.

첫째, 문장으로 주어진 문제를 수학적 언어로 나타내는 능력이다. 둘째, 분석 능력이다. 셋째, 주어진 문제를 식으로 나타내는 능력이다. 넷째, 계산 능력이다. 다섯째, 문제를 만들어 볼 줄 알아야 한다.

문장제 학습이 의도하는 것은 해결해 본 적이 없는 일상생활에서의 새로운 문제에 당면했을 때 이것을 분석하고 통합하여 그 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 것이다. 즉 문장제 지도는 문제 해결이라고 하는 교육의 목표 달성을 위한 지도 활동의 하나이다.

문장제 문제의 지도 핵심은 문제를 분석하고, 수량 관계를 잡아서 문제 해결을 주도하여 바라는 추리를 연상시키는데 있고 문장제 지도의 중심 목표는 단순히 수학적 지식과 기능을 높이는 것만이 아니고, 문제 해결에 필요한 사고의 질을 높이는 것이라 할 수 있다.²⁾ 그러므로 문장제 문제는 사고의 내용을 분명히 하고 발달 단계에 맞는 사고 유형을 찾도록 지도하여야 한다.

문장제를 사고한다는 것은 문장제 장면 속에 있는 조건간의 관계를 발견하는 것이다. 그러므로 사고하는 방법을 가르쳐 주면 문장제 지도에 일관성을 갖게 되고 문장제 문제 지도가 수학 지도의 중심 역할을 하게 된다.

김완식(1994)은 문장제 지도를 통하여 수학적인 사고력을 기를 수 있다고 하였다.³⁾

문장제 문제의 지도는 종합적인 능력을 신장시킬 수 있을 뿐만 아니라 구체적인 문

2) 현종의, 제6차 교육과정에 따른 수학과 학습 지도 연구, 1995, p.239.

3) 김완식, 문장제의 지도에 대한 연구, 단국대학교 석사학위논문, 1994, pp.21-22.

제를 수학적인 문제로 바꾸어 놓음으로써 추상화, 일반화, 형식화 등의 다양한 사고를 할 수 있게 한다. 또 수학적인 표현이나 수학적인 조작 등의 기능을 정확하게 사용할 수 있도록 한다. 따라서 적절한 착안점을 택해서 해결 방법을 짐작하거나 조리있게 사고를 진행하거나 할 수 있는 능력을 신장시키는 것이 기대되어 큰 의의를 지닌다.

2. 문제 해결에서의 실패 요인의 연구 동향

실패에 대한 연구는 학생들의 인지 능력을 파악할 수 있고 교수 학습시 보다 효율적인 교육을 할 수 있기 때문에 오랜 역사를 가지고 있다. 학생들이 문제 해결에서 부딪힐 수 있는 실패의 요인들은 대개 몇 개의 유형으로 분류될 수 있기 때문에 교사는 그러한 유형에 적합한 기술을 지도해야 한다.⁴⁾

문제 해결을 위한 접근 방식, 기질 내지 태도에서 유의해야 할 장애와 함정인 실패 요인을 분류하는 방법이 다양한데 김영채는 오류 요인을 문제를 철저히 분석하지 않는 것, 생각하고 싶은 대로 생각해 버린다, 해결 방법을 한 가지 방법에 얽매이는 기능 고착, 쉽게 떠오르는 정보에 의지하는 것 등 4가지로 구분하여 파악했다.⁵⁾

田村三郎, 船越俊介는 오답은 부주의한 실수를 저지른 때와 완전히 자신의 역부족으로 인한 경우로 구분하였다.⁶⁾

수학 교육에서 실패에 대한 연구를 살펴보면, 김옥경(1990)은 고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류 모델에 대한 연구에서 인문계 고등학교 학생을 대상으로 수학 문제 풀이 과정에서 발생하는 오류를 8가지로 분류하였다⁷⁾

오세경(1995)은 수학 학습 지도에 있어서의 오류 유형의 분류 및 그 지도 방안에 대한 연구에서 수학 학습 지도 현장에서의 문제 해결 과정을 관찰하고 진단 분석을 통해 종합적으로 오류의 요인을 수학에 대한 두려움, 용어와 정의에 익숙하지 못함, 기호에 익숙하지 못함, 응용력 부족, 논리적 사고 기피, 계산 능력 부족의 6가지로 분류하였다.⁸⁾

4) 이옥경·이종희, 한국수학교육학회, 문제 제기의 과정을 통한 문제해결력 지도가 수학학습에 미치는 영향에 관한 연구, 1995년 전국수학교육발표회 프로시딩, p.278.

5) 김영채, 사고와 문제 해결 심리학, 1995, pp.402-408.

6) 田村三郎, 船越俊介저, 김관영 이승수 역, 오답으로부터 배운다, 1992, pp.145-159.

7) 김옥경, 고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류 모델에 대한 연구, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문, 1990, pp.20-30.

8) 오세경, 수학 학습 지도 있어서의 오류 유형의 분류 및 그 지도 방안, 충북대학교 석사학위논문

실패에 관한 연구가 실패 요인을 분석하고 분류하는 방법이나 수학 교과와 문제 풀이 과정에서 발생한 실패를 유형화하거나 학습 지도에 있어서 실패 요인에 의한 유형 분류에 관한 것들이 대부분이다. 본 연구에서는 선행 연구를 참고로 하여 문장제 문제 풀이에서 Ploya의 문제 풀이 단계와 Bloom의 교육목표 분류에 따라 문제 풀이 과정에서 발생하는 실패를 유형화하여 학습 수준에 따라 문제 풀이 단계에서 발생하게 되는 실패의 경향을 분석하고 학습 능력을 고려한 문장제 문제 지도의 효율적인 지도 방안을 제시하고자 한다.

Ⅲ. 연구의 방법 및 절차

1. 기초 조사

전국 단위 대입 수학능력 시험과 모의고사에서 나타난 인문계열의 영역간 점수 분포와 수리 탐구 I의 주·객관식 문항의 정답 통과율을 분석하면 다음의 <표 1>, <표 2>와 같다.

<표 1> 1996학년도 대학수학능력시험 영역별 점수와 표준편차⁹⁾

구 분	언어영역	수리탐구 I	수리탐구 II	외국어영역
배 점	60	40	60	40
평균 점수	32.20	13.96	25.56	20.39
100점 환산점	53.67	34.90	42.60	50.98
표 준 편 차	8.86	5.72	8.32	8.90

<표 2> 대입 수학능력 모의고사 수리탐구 I의 주·객관식 통과율¹⁰⁾

구 분	학교통과율	전체통과율
객 관 식 문 항	40.23	37.17
주 관 식 문 항	19.73	17.83
평 균 통 과 율	36.13	33.30

전국 규모 수학능력 모의고사에서 문항의 통과율이 낮고 주관식 문항의 통과율이 매우 낮은 것은 일반적인 견해보다 학생들의 수학 교과와 학력 수준이 매우 저조하다

문, 1995, p.36.

9) '97학년도 대학수학능력시험해설, 국립교육평가원, 1996, pp.330-331.

10) 1996년 3월 27일, 대성학력평가연구소 시행, 3학년 대상 전국 수학능력 모의고사 인문계열 분석 결과

고 볼 수 있다.

영역별 점수에서는 수리 탐구 I 영역이 가장 낮고 표준편차가 최소이므로 다른 교과목에 비하여 학생들의 성적 분포가 하위에 밀집하여 분포되어 있어 수학 교과의 학력이 저조한 것이 전국적인 상황이므로 수학 교과의 교육 목표인 문제 해결력의 신장을 위한 대책이 요구된다.

2. 연구 대상자

수학과 교육과정을 거의 이수해서 중등학교 수학의 전반에 대한 일반적인 학력 정도를 갖추고 있는 고등학교 3학년 학생 중 지역간의 학력차를 고려하여 평준화 지역의 중소도시 고등학교인 충청남도 천안시 C고등학교 3학년 2개 학급의 94명을 대상으로 선정했다.

실험 집단은 전국 단위의 모의고사에서 중간 그룹에 속해 있어 수학 교과에서 고등학생이 습득하고 있어야 할 수학 능력을 평균적으로 갖추고 있으므로 고3 학생을 대표할 수 있는 집단으로 볼 수 있다. 단, 두 집단의 분포 상태를 파악하기 위해서는 표준편차까지 고려하여야 하지만 모의고사 결과에 대한 전체집단의 표준편차의 자료가 없기 때문에 평균만 가지고 비교해서 전체 집단과 실험 집단의 성적 분포 상태는 비슷하다고 보기로 한다.

1996년 3월, 4월, 5월에 전국적인 단위로 실시한 수학능력 모의고사의 수리 탐구 I의 합계 점수를 가지고 총인원을 3등분해서 상위 32명, 중위 32명, 하위 30명의 3집단으로 분류하였다.

3. 연구 기간

본 연구의 실험 기간을 1996년 5월부터 1997년 6월까지로 정하였다.

4. 평가의 시행

연구의 수행에 있어서 필요한 문항의 객관성을 확보를 위하여 고등학교 수학 I의 교과 내용으로 문제 풀이의 실패 요인을 파악할 수 있도록 난이도와 이원 목적을 검토하여 40문항을 제작하여 4회의 평가를 실시하였다. 40문항은 지식 11문항, 이해 17문항, 적용 12문항의 주관식으로 구성되어 있으며 평가시 풀이 과정을 자세히 기록하도록 하였다. 1회의 평가지는 10문항이며 시간은 50분을 제공하였다.

IV. 실패의 분류

실험 문항의 평가 결과를 채점하면서 발견하게 되는 실패 요인을 분석하여 Polya의 문제 해결 과정과 Bloom의 교육 목표 분류를 이용하여 실패를 유형화하고 경향을 조사하였다.

1. Polya의 문제 해결 과정에 따른 실패의 분류

문장제 문제의 풀이 과정에서의 실패 요인을 Polya의 문제 해결 과정에 따라 이해, 계획 수립, 실행, 검토 단계별로 다음과 같이 실패의 분류 기준을 설정하였다.

첫째, 문제 이해의 단계 ; 주어진 문제를 읽고 문제를 이해하며 문제의 조건을 이해한다.

둘째, 문제 해결 계획 수립의 단계 ; 문제 풀이를 할 계획을 수립하고 문제를 분석하고 필요한 정리나 법칙을 생각해 낸다. 그리고 풀어 본 적이 있는 유사한 문제를 상기해서 풀이를 전개할 방향을 설정한다.

셋째, 문제 해결 실행의 단계 ; 파악한 조건과 계획한 풀이 전개의 계획에 따라 올바른 풀이를 실행한다. 이때, 주어진 조건이나 정리를 제대로 활용할 수 있어야 한다.

넷째, 문제 해결 검토의 단계 ; 올바른 해결 과정에서 중단하였거나, 문제 해결의 과정을 검토하여 단순한 부호의 착오나 계산 착오의 잘못을 수정할 수 있어야 한다. 요구된 답과 다른 내용의 답을 표기한 경우에는 올바른 답을 제시하여야 한다.

이상의 분류 기준에 따라 문제 풀이 과정에서 나타난 실패의 원인을 조사하여 <표 3>과 같은 실패 유형을 설정하였다. 어떤 풀이 과정이나 답을 제시하지 않은 경우는 무응답으로 처리하였다.

<표 3> 문제 풀이 과정에 따른 실패 분류 기준

단계	분류 기호	실패 유형	세 부 항 목
문제 이해 단계	E1	잘못 해석된 언어로 문제 파악을 제대로 못함	<ul style="list-style-type: none"> 문제 해결 과정에서 문제 내용을 잘못 적용한 경우 문제에서 제시되지 않은 것을 조건으로 사용 수학적 기호로 표현된 내용을 이해하지 못하는 경우 문제에 사용된 수학적 용어를 모르는 경우 문장을 정확하게 이해하지 못한 경우
	E2	주어진 조건과 자료를 이해하지 못함	<ul style="list-style-type: none"> 주어진 조건의 일부만 사용한 경우 풀이 과정에 필요한 조건을 무시한 경우 주어진 조건이나 정의를 다른 개념으로 사용한 경우 변수의 수치적 값 대신에 다른 변수의 값을 사용한 경우 그림으로 제대로 나타내지 못한 경우 오용된 자료나 조건과 정보를 사용한 경우
문제 해결 계획 수립 단계	E3	기호의 사용과 용어의 정의에 익숙하지 못함	<ul style="list-style-type: none"> 정의나 정리의 잘못된 이해에서 발생한 경우 주어진 조건에 적절한 기호를 붙이지 못하는 경우 정리의 전제조건 이외의 곳에 그 정리를 적용하는 경우 문제 풀이에 사용될 공식이나 정리를 모르는 경우 기본적인 정의, 정리, 공식을 부정확하게 인용한 경우 다른 개념을 나타내던 기호를 습관적으로 표현함으로써 기호의 혼돈에서 생기는 경우
	E4	사고 방법이 단순하여 융통성이 없음	<ul style="list-style-type: none"> 어떻게 풀어야 할지 풀이 방법을 모르는 경우 자료, 조건을 모두 사용하지 않는 경우 이전에 풀어 본 문제와 연관짓기를 잘못된 경우 다른 풀이 방법이 있는지 점검하지 않는 경우 유사한 문제의 풀이를 적용하여 풀이가 틀린 경우 단순히 문제로부터 주어진 조건만 제시하고 그만 둔 경우
문제 해결 실행 단계	E5	계산 능력 부족으로 인한 풀이 과정에서의 적 오류	<ul style="list-style-type: none"> 조건을 수식화하지 못하는 경우 문제 풀이 과정에 옳은 해법을 적용했으나 정의나 정리의 전제조건 일부가 누락된 경우 결과나 방법을 다음 단계에 활용하지 못하고 중단하는 경우 조건 판정에 의한 논리적인 오류를 범하는 경우
	E6	논리적으로 부적절한 직관에 의한 추론	<ul style="list-style-type: none"> 문제 풀이 단계 설정이 잘못된 경우 자료 조건에 의한 식이 잘못된 경우 풀이 과정 없이 수치적 값만을 제시했으나 틀린 경우 주어진 조건, 앞의 조건으로부터 부적절한 추론을 하는 경우
문제 해결 검토 단계	E7	풀이 과정에서 단순한 계산 착오	<ul style="list-style-type: none"> 연산 과정에서 단순한 부호의 오류를 범한 경우 풀이 과정의 전 단계로부터 다음 단계에 잘못 옮겨 적는 경우 부등식 기호를 잘못 사용하여 해를 구하는 경우 문제로부터 답지에 일부 세부 항목을 잘못 옮겨 적는 경우
	E8	풀이 과정의 생략으로 인한 산상의 오류	<ul style="list-style-type: none"> 옳은 풀이 과정의 마지막에서 답을 잘못 기재하는 경우 결과를 점검하지 않아 요구된 형태와 다른 해답을 기재한 경우 옳은 풀이 과정 중 다음 단계를 생략하는 경우 풀이 과정이 정리되지 않아 확인하기가 곤란함 대입하여야 할 식에 값을 대입하지 않음

<표 4> 교육목표 분류에 의한 실패 분류 기준

영역	실패 유형	세 부 함 목
지식	기본적인 공식이나 정의를 모르는 경우	<ul style="list-style-type: none"> 문제 풀이에 필요한 기초적인 공식이나 정리를 모르는 경우 문제에 사용된 수학적 용어를 모르는 경우 기본적인 정의, 정리, 공식을 부정확하게 인용한 경우 기본적인 정의나 정리의 잘못된 이해에서 발생한 경우 주어진 조건이나 정의를 다른 개념으로 사용한 경우 문제에서 제시되지 않은 것을 조건으로 사용 풀이 과정의 전 단계로부터 다음 단계에 잘못 옮겨 적는 경우
	문제의 내용을 파악하지 못한 잘못	<ul style="list-style-type: none"> 문제로부터 답지에 세부 항목을 잘못 옮겨 적는 경우 연산 과정에서 단순한 부호의 오류를 범한 경우 다른 개념을 나타내던 기호를 습관적으로 표현함으로써 기호의 혼돈에서 생기는 경우 풀이 과정없이 수치적 값만을 제시했으나 틀린 경우 풀이 과정이 정리되지 않아 확인하기가 곤란함 단순한 계산상의 잘못 조건 판정에서 오류를 범하는 경우
이해	변안 과정상의 잘못	<ul style="list-style-type: none"> 주어진 조건에 적절한 기호를 붙이지 못하는 경우 그림으로 제대로 나타내지 못한 경우 단순히 문제로부터 주어진 조건만 제시하고 그만 둔 경우 문장을 정확하게 이해하지 못한 경우 오용된 자료나 조건과 정보를 잘못 사용한 경우 조건을 수식화하지 못하는 경우
	문제나 조건에 대한 이해의 잘못	<ul style="list-style-type: none"> 결과를 점검하지 않아 요구된 형태와 다른 해답을 기재한 경우 변수의 수치적 값 대신에 다른 변수의 값을 사용한 경우 옳은 풀이 과정의 마지막에서 답을 잘못 기재하는 경우 유사한 문제의 풀이를 적용하여 풀이가 틀린 경우 이전에 풀어 본 문제와 연관짓기를 잘못된 경우 수학적 기호로 표현된 내용을 이해하지 못하는 경우 자료 조건에 의한 식이 잘못된 경우 문제 해결 과정에서 문제 내용을 잘못 적용한 경우 대입하여야 할 식에 값을 대입하지 않음 수학적인 개념이나 정의의 내용을 잘못 이해한 경우
적용	자료나 조건의 활용이 문제 풀이에 부적절한 잘못	<ul style="list-style-type: none"> 주어진 조건을 일부만 사용한 경우 문제 풀이에 옳은 해법을 적용했지만 정의나 정리의 전제조건 일부가 누락된 경우 주어진 조건, 앞의 조건으로부터 부적절한 추론을 하는 경우 풀이 과정에 필요한 조건을 무시한 경우 자료, 조건을 모두 사용하지 않는 경우
	풀이 과정의 기술적인 잘못	<ul style="list-style-type: none"> 결과나 방법을 다음 단계에 활용하지 못하고 중단하는 경우 다른 풀이 방법이 있는지 점검하지 않는 경우 어떻게 풀어야 할지 풀이 방법을 모르는 경우 옳은 풀이 과정 중 다음 단계를 생략하는 경우 문제 풀이 계획 설정이 잘못된 경우

2. Bloom의 교육목표 분류를 적용한 실패의 분류

B. S. Bloom이 분류한 교육목표 중 인지적인 영역을 수학 교과에 적용하여 수학 학습 인지적 영역을 지식, 이해, 적용으로 구분하여 다음과 같은 준거를 설정하였다.

첫째, 지식의 영역은 기득 사실을 통하여 수학적 용어와 정의, 규칙에 관한 방법, 기호, 원리, 관계와 관련된 분야이다.

둘째, 이해 영역에서는 간단한 사실 확인을 통하여 문제의 수학적 구조를 이해하고 수학적 언어로 번안하기 및 원리와 법칙을 통하여 일반화하는 것을 포함한다.

셋째, 적용력은 특수한 사태, 구체적 사태에 추상개념을 사용하여 개념, 원리, 이론의 이해를 바탕으로 문제의 비교, 자료의 분석 패턴, 동형, 대칭을 인식하여 문제를 해결하는 것과 관련된 분야이다. 이와 같은 분류를 간단히 교육 목표 분류라고 하기로 한다.

위의 영역별 기준에 따라 학생들이 문장제 문제 풀이 과정에서 범하게 되는 실패를 분석하여 <표 4>과 같은 유형을 설정하였다.

각 문제의 해결 과정에서 발생한 실패를 <표 3>과 <표 4>을 기준으로 Polya 문제 해결 과정에 의한 실패 유형과 Bloom의 교육목표 분류에 의한 실패로 분류하고 통계를 얻었다.

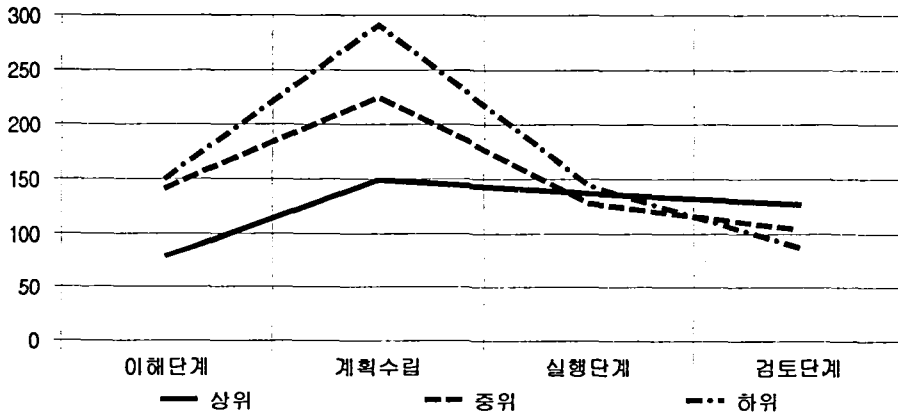
3. 실패의 경향

Polya의 문제 풀이 단계에 따라 집단별 실패 경향과 교육목표 분류에 의한 인지 영역별 실패 경향을 분석해 보았다.

가. 상·중·하 집단의 실패 경향과 분석

<표 5> 전체 집단의 실패수

집단 \ 단계	이해단계		계획수립		실행단계		검토단계		계	통과수	무응답
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8			
상위집단	31	48	71	68	68	44	58	69	457	698	125
중위집단	52	90	113	130	112	66	42	62	667	398	215
하위집단	71	80	130	161	84	67	28	60	681	225	294
전체집단	154	218	314	359	264	177	128	191	1805	1321	634



<그림 1> 전체 집단의 실패 경향

문항의 통과율은 35%이고 무응답의 수는 전체의 17%이다. 상·중·하 집단의 통과비는 1.75 : 1 : 0.57이고 무응답수는 0.58 : 1 : 2.95이다. 전체 집단은 문제의 이해와 계획 수립의 단계에서 높은 실패를 보였다. 중위 집단이 전체 집단과 유사한 실패 경향을 띠고 있다.

상위 집단은 이해 단계에서는 실패가 낮으나 그 외의 모든 단계에서 차이가 없는 낮은 실패수를 나타냈다.

중위 집단은 문제 해결의 계획과 실행 단계의 E5의 유형에서 높은 실패를 나타냈다. 이는 문장제 문제는 이해를 하였으나 문제가 가지고 있는 조건과 내용, 문제에 필요한 학습 요소를 완전히 이해하지 못했기 때문이다. 따라서 문장제 문제를 식이나 기호 및 그림을 이용하여 수학적 언어로 나타내지 못하고 있음에 유의하여야 한다.

하위 집단은 이해 단계와 계획의 단계에서 높은 실패수를 나타냈다. 이는 문장제 문제의 내용과 조건을 제대로 이해하지 못하고, 수학적 기호의 사용에 익숙하지 못한 결과이다. 하위 집단으로 갈수록 문제 해결의 초기 단계인 이해의 단계에서 많은 실패를 보이는 경향이 있다. 이는 학생들이 기본 개념의 학습에 충실하지 못해 주어진 조건과 자료를 이해하는 능력과 문제를 수학적으로 번안하는 능력이 부진함을 의미한다.

나. 교육목표 분류에 의한 상·중·하 집단별 실패 경향과 분석

평가 문항을 지식, 이해, 적용 영역 문항으로 분류하여 실패 경향을 알아보았다. 다음의 각 표에 나타난 숫자는 문항 실패수를 나타낸 것이다.

(1) 지식 문항의 경향

<표 6> 지식 문항의 집단별 실패수 (11문항)

집단 \ 단계	이해단계		계획수립		실행단계		검토단계		계	통과수	무응답
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8			
상위집단	4	8	8	9	12	5	19	12	77	249	26
중위집단	10	22	20	17	26	6	21	16	138	163	51
하위집단	4	22	33	16	21	12	21	23	152	117	61
전체집단	18	52	61	42	59	23	61	51	367	529	138

지식 문항의 통과율이 57%이고 무응답은 13%로 높은 통과율을 나타냈다. 상위 집단이 이해와 계획의 단계에서 낮은 실패율을 보였다. 중·하위 집단의 실패수는 비슷한 경향이고 기호의 사용과 정의의 적용, 사고 방법에서의 경직화로 인한 실패의 경우가 많으므로 계획 수립의 단계에서 실패가 많았다. 검토 단계에서 단순한 실수로 인한 실패가 많았다.

(2) 이해 문항의 경향

<표 7> 이해 문항의 실패수 (17문항)

집단 \ 단계	이해단계		계획수립		실행단계		검토단계		계	통과수	무응답
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8			
상위집단	21	21	34	43	31	17	16	32	215	281	48
중위집단	26	42	63	54	41	36	8	28	298	166	80
하위집단	38	32	69	85	28	34	2	25	313	82	115
전체집단	85	95	166	182	100	87	26	85	826	529	243

이해 문항의 통과율은 33%이고 실패 경향은 전체 문항에 대하여 전체 집단이 보인 실패 경향과 유사하다.

세 집단 모두 계획 수립 단계에서 높은 실패를 보이고 있다. 상위 집단은 사고 방법이 단순하여 해법을 찾지 못한 실패가 많고 중·하위 집단은 기호의 사용과 용어의 정의에 익숙하지 못해서이다. 상위 집단은 다른 단계에서보다 계획 수립 단계에서 많은 실패를 보이고 있다.

검토 단계에서 상위 집단이 다른 집단보다 단순한 실수로 인한 실패가 많다.

(3) 적용 문항의 경향

<표 8> 적용 문항의 실패수 (12문항)

집단	이해단계		계획수립		실행단계		검토단계		계	통과수	무응답
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8			
상위집단	6	19	29	16	25	22	23	25	165	168	51
중위집단	16	26	30	59	45	24	13	18	231	69	84
하위집단	29	26	28	60	35	21	5	12	216	26	118
전체집단	51	71	87	135	105	67	41	55	612	263	253

적용 문항의 전체의 통과율은 23%로 낮고 무응답수와 비슷하다. 전체 집단은 문제의 풀이 방법을 찾지 못하거나 조건만 제시하고 그만둔 경우인 E4와 조건을 수식화하지 못하는 계획 수립 단계에서 실패율이 높고 계산 능력의 부족으로 풀이가 중단된 경우인 E5의 실패가 많다.

또, 지식, 이해, 적용의 상관 관계와 위계 관계에서 통과수가 지식, 이해, 적용 문항의 순으로 큰 차이를 보인다. 이는 학습 내용의 단순한 암기 위주의 주입식 교육에 의하여 수학 교과 학습 요소에 대한 충분한 이해와 적용 능력이 부족함대 기인하는 것으로 보여진다.

상위 집단은 문제 풀이의 계획 수립, 실행, 검토 단계에서의 실패수가 비슷하나 이해 단계보다 많다. 중·하위 집단도 계획 수립과 실행 단계에서 실패가 많다.

하위 집단은 문제 풀이의 이해와 계획 수립 단계에서 높은 실패를 보이고 검토 단계에서 실패수가 적다. 검토 단계에서 상, 중, 하위 집단 순으로 실패수를 보이는 것은 이해에서 보인 경향과 유사하다.

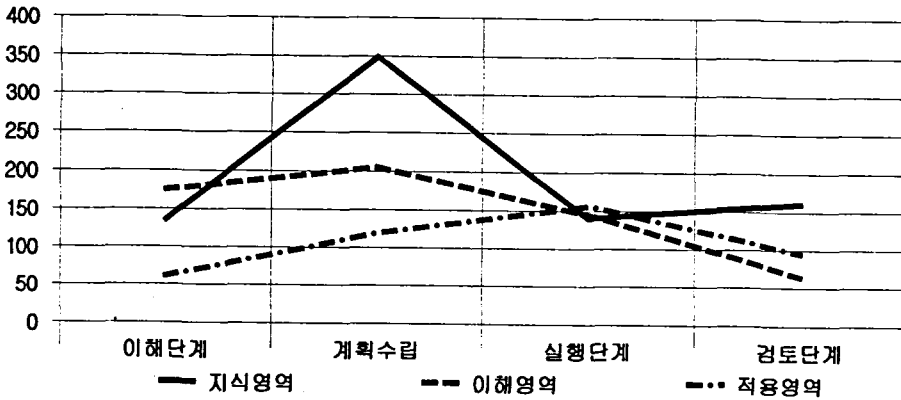
다. 교육 목표 분류 영역별 실패 경향

전체 집단과 상·중·하의 세 집단에 대하여 교육 목표 분류에 의한 지식, 이해, 적용 영역별 실패 경향을 분석하면 다음과 같다.

(1) 전체 집단의 경향

<표 9> 전체 집단의 영역별 실패수 (94명)

구 분		Polya의 문제 풀이 단계				
		이해단계	계획수립	실행단계	검토단계	계
Bloom 교육	지식영역	136	349	140	160	785
	이해영역	175	205	145	64	589
목표 분류	적용영역	61	119	156	95	431
	계	372	673	441	319	1805



<그림 2> 전체 집단의 영역별 실패 경향

계획 수립의 단계에서는 지식 영역 실패가 가장 많으며 지식, 이해, 적용 영역 순으로 큰 차이의 실패를 보인다. 실행의 단계에서는 세 영역 모두 비슷한 실패를 나타내고 있다. 검토 단계에서 지식의 실패가 많아지는 것은 단순 실수의 경우도 지식으로 분류하였기 때문이다. 이해 영역은 문제 풀이가 진행될수록 실패가 적어진다.

결론적으로 학생들이 교과와 기본 학습 요소의 학습에서 이해보다 주입식 위주 교육으로 인하여 이를 활용할 수 있는 사고력과 창의력이 낮다.

(2) 상위 집단의 경향

<표 10> 상위 집단의 영역별 실패수 (32명)

구분	영역	Polya의 문제 풀이 단계				계
		이해단계	계획수립	실행단계	검토단계	
Bloom 교육 목표 분류	지식영역	21	63	31	62	177
	이해영역	42	51	32	27	152
	적용영역	16	25	49	38	128
	계	79	139	112	127	457

상위 집단은 낮은 실패와 지식, 이해, 적용 영역에서 비슷한 실패를 나타내고 있다.

문제 풀이가 진행될수록 이해 영역은 낮아진다. 이는 기본 학습 요소의 이해 정도가 높음을 의미한다. 지식 영역의 검토 단계에서 풀이 결과를 점검하지 않은 단순한 실수를 지식으로 분류하였기 때문에 실패가 많다.

(3) 중위 집단의 경향

<표 11> 중위 집단의 영역별 실패수 (32명)

구 분		Polya의 문제 풀이 단계				
		이해단계	계획수립	실행단계	검토단계	계
Bloom 교육 목표 분류	지식영역	57	131	54	55	297
	이해영역	58	62	57	19	196
	적용영역	25	50	67	30	172
	계	140	243	178	104	665

지식 영역에서의 실패수가 가장 많다. 문제 이해와 계획 수립 단계에서는 적용 영역의 실패수가 적고, 문제 해결의 계획 수립 단계에서는 지식 영역의 실패수가 가장 많다. 이는 기본 학습 요소의 이해 정도가 부족하여 문제를 이해하고 문장으로 된 문제를 수학적인 기호로 번안하여 해결 방법을 구안하는 데에서 많은 실패를 범하기 때문이다. 중위 집단은 학습 요소를 해결 과정에 활용하는 수학적 사고력과 창의력이 부족하다고 본다.

(4) 하위 집단의 경향

<표 12> 하위 집단의 영역별 실패수 (30명)

구 분		Polya의 문제 풀이 단계				
		이해단계	계획수립	실행단계	검토단계	계
Bloom 교육 목표 분류	지식영역	58	155	55	43	311
	이해영역	75	92	56	18	241
	적용영역	20	44	40	27	131
	계	153	291	151	88	683

중위 집단과 비슷한 실패 경향을 띠고 있으나 계획 수립의 단계에서 실패가 많다. 하위 집단은 지식 영역의 실패는 많으며 문제 해결이 진행될수록 낮은 실패를 보인다. 이는 기본 학습 요소에 대한 인지가 낮은데 원인이 있다. 따라서 하위 집단에게는 기본적인 공식이나 정의를 잘 몰라 문제를 이해하지 못하는 실패와 이미 배운 학습의 내용을 적용하여 문제를 해결하는 능력이 부족하다. 그러므로 하위 집단에게는 기본적인 학습 요소의 인지와 이를 활용할 수 있도록 충분한 지도가 요구된다.

라. 문제 풀이 과정의 실패 치료 및 지도 방안

(1) 이해 단계는 문제를 읽는 단계이다. 이 단계에서 하위 집단은 번안 과정상의 실패가 많다. 하위 집단은 기본적인 학습 요소의 부족으로 문제 이해가 잘 안되거나 중위 집단은 조건의 파악 능력이 부족하다.

새로운 단원의 학습에 들어가기 전에 중·하위 학습 집단에게는 출발점 상태를 점검하여 과제 학습과 준비 학습을 철저히 하여, 본시 학습에 필요한 선수 학습의 결손요소를 치료를 하여 교과외 지도 시에 수학적 기호와 정의, 정리의 충분한 이해가 이루어지도록 지도하여야 한다. 그리고 문제를 접하였을 때 문제의 목적이 무엇인가, 문제의 중요한 내용이 무엇인가를 유의하면서 읽어, 문제를 자신의 언어로 나타내도록 하며 문제를 가시화하도록 지도한다. 또 정보를 체계화하여 그림을 그리거나 모델을 만들거나 도표를 만들어 보도록 지도한다.

문제 풀이 지도 시에 문제의 목적과 내용을 학생들에게 계속적인 질문을 하여 호기심을 자극하고 동기를 유발시키는 것도 좋을 것이다.

(2) 계획 수립 단계는 지식, 이해의 실패가 높다. 또 입시 대비 위주의 수업의 진행으로 수학적 사고력의 부족으로 문제를 해결하기 위한 계획 수립을 하지 못한다. 따라서 수학적 언어나 기호의 역할을 바르게 알게 하고 용이하게 사용하게 함으로써, 학생들이 더욱 쉽게 아이디어에 대한 다양한 표현을 하고 똑같은 개념의 표현을 인식할 수 있도록 한다. 또한 표현 방법에서의 절차를 보다 간단 명료하고 동등한 표현 방법으로 관계를 전환시켜 보도록 하여 같은 문제 상황, 또는 같은 수학적 개념의 서로 다른 표현을 적용해 교사 모방적인 표현 방법을 탈피하여 자기 자신에 알맞는 독특한 사고와 아울러 사고 과정을 단축시킨 문제 해결을 시도하게끔 하여야 한다.

기본 개념이나 원리에 미숙한 중, 하위 학생들은 어려운 문제를 접해서 이해하기와 구도 잡기가 잘 안되기 때문에 해결 방안을 수립하지 못한다. 이럴 때 교사는 바른 발문과 집단별 협력 학습을 통하여 구도 잡기를 도와주거나 학생들로 다양한 전략을 선택하여 구도 잡기에서 힌트를 얻고 협력 학습을 통하여 수학적 사고의 기회를 갖도록 하면 좋을 것이다. 또 동일한 문제에 대한 풀이 방법을 다양하게 제시하여 문제에 대한 다양한 접근을 할 수 있도록 해야 한다.

(3) 실행 단계에서 상위 집단은 풀이 방향의 설정에서, 중위 집단은 정의와 정리의 활용의 부족으로, 하위 집단은 기본적인 공식의 활용 능력이 부족하여 실패하게 된다. 학생이 문제 풀이에서 막혔을 때는 대안적인 방법들을 시도해 보도록 하고, 유용한 조언을 되풀이함에 따라 수학적 생각 및 태도를 학생들에게 형성시켜 줄 수 있도록 한다. 그리고 학생들이 부정확하게 이해하고 있는 점을 발견하면 틀린 부분을 알려줌으로써 오류의 재반복 및 기술적인 잘못이 최소화되도록 노력해야 한다. 교사가 모든 학생에 대하여 실패를 파악하기가 곤란하므로 자리의 배치와 집단 구성에 유의하여 집

단간에 협력 학습이 될 수 있도록 한다.

(4) 검토 단계에서는 오히려 상위 집단의 학생에게서 단순한 실수로 인한 실패가 많이 발생한다. 이러한 실패는 문제 풀이 과정에서 쉽게 정정할 수 있는 것들이 많다. 문제의 풀이가 끝나면 먼저 해와 풀이를 검토하고 다른 해법을 찾아보도록 해야 한다. 풀이를 재검토함으로써 얻는 여러 수학적 생각을 발전시킬 수 있으므로 교사는 학생들에게 문제에 사용된 전략을 설명해 보도록 해야 한다. 학생들이 사용했던 전략들을 발표시킴으로써 다양한 문제 해결 전략들을 동시에 학습할 수 있도록 협력 학습을 도입하여 풀이에 대하여 토론의 기회를 부여하는 것이 좋을 것이다.

또 교사들은 학생들이 실패를 범하기 쉬운 내용들을 충분히 연구하여 미리 학생들에게 반례를 들어 보임으로써 학생들이 실패를 최소화하도록 해야 한다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서 얻어진 결과는 다음과 같다

1. 문제 해결 과정에서 범하는 실패가 학력 수준과 교육목표 분류 영역에 따라 차이가 있다.

2. 문장제 문제 풀이에 대한 실패의 유형을 G. Polya의 문제 풀이 과정인 문제의 이해, 계획 수립, 실행, 검토의 4단계에서 2개씩 설정하여 조사하였다. 전체 집단은 계획 수립의 단계에서 가장 많은 실패를 나타냈으며 상위 집단은 이해 단계에서 낮은 실패율을 보이고, 중위 집단은 계획 수립과 실행 단계에서, 하위 집단은 계획 수립 단계에서 높은 실패율을 보였다. 또 하위 집단으로 갈수록 문제 풀이의 초기 단계에서 많은 실패를 보이는 경향이 있다.

3. 문장제 문제 해결 과정에서 교육 목표 분류에 의한 지식, 이해, 적용 영역에서의 실패 유형을 2개씩 설정하여 조사하였다. 이 결과 전체 집단은 지식, 이해, 적용 영역 순으로 실패를 나타냈다.

상위 집단은 전체적으로 낮은 실패를 나타내며 문제 이해 단계가 특히 낮고 그 외는 비슷한 실패를 나타냈다.

중위 집단은 계획 수립과 실행 단계에서 높은 실패를 나타내며 지식 영역의 계획 수립 단계의 실패가 특히 많다.

하위 집단은 문제 풀이의 초기 단계에서 실패가 많으며 지식 영역의 계획 수립 단

계에서 실패가 많다.

5. 문제 해결의 지도는 문제 해결 단계에서 범하게 되는 실패 요인과 학력 수준에 의한 실패 경향에 따라 발문을 강화하여 수학적 사고력과 창의력을 신장할 수 있도록 학생들의 능력을 고려한 협력 학습을 하는 것이 바람직하다.

본 연구를 통하여 얻어진 결론을 가지고 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

1. 수학과 교수 학습 방법이 암기 위주의 주입식 방법보다는 창의력과 사고력 개발을 위한 학습 방법이 적용되어야 한다.

2. 수학 교과에의 평가 방법에서 객관식보다 주관식 위주의 평가가 이루어져야 하고 다양한 풀이를 접할 수 있는 기회를 부여할 수 있는 교수 학습 방법을 적용하여야 한

참 고 문 헌

1. G. Polya, 우정호 역, 어떻게 풀 것인가, 천재교육, 서울, 1993.
2. 교육부, 고등학교 교육과정(I), 대한교과서주식회사, 서울, 1992.
3. 교학사, 중학교 수학과 교육과정 해설, 교학사, 서울, 1994.
4. 김영국 외, 연구보고 제1집 절대기준 평가 자료의 개발 및 활용에 관한 연구 -수학과 및 과학과를 중심으로-, 서울대학교 사범대학 부속중학교, 1976.
5. 김영채, 사고와 문제 해결 심리학, 박영사, 1995.
6. 김옥경, 고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류 모델에 관한 연구, 이화여자대학교 교육대학원 석사 학위논문, 1990.
7. 김응태·김연식, 수학 교재론, 경문사, 서울, 1992.
8. 김응태·박한식·우정호, 수학 교육학 개론, 서울대학교출판부, 서울, 1995.
9. 박한식·구광조, 수학과 교수법, 과학교재사, 1984.
10. 변창진·송명자, 인지발달론적 접근 교육 심리, 교육과학사, 서울, 1995.
11. 신현성, 수학 교육론, 경문사, 서울, 1995.
12. 오세경, 수학 학습 지도에 있어서의 오류 유형의 분류 및 그 지도 방안, 충북대학교 교육대학원 석사 학위논문, 1995.
13. 유시규, 수학 교육에 있어서 탐구적 어프로치의 실천적 연구, 1995년 전국 수학 교육 연구 발표회 프로시딩, 한국 수학 교육 학회, 1995.

14. 이은주, 개념 분석 표현의 분석을 통한 수학과 교육과정의 내용 연구에 관한 연구, 이화여자대학교 교육대학원 석사 학위논문, 1991.
15. 田村三郎, 船越俊介저, 김관영 이승수 역, 오답으로부터 배운다. 함정에 빠지기 쉬운 수학, 전파과학사, 1992.
16. 임성식, 오류 유형 분석을 통한 명제 지도, 영남대학교 교육대학원 석사 학위논문, 1990.
17. 현종익, 제6차 교육과정에 따른 수학과 학습 지도 연구, 경문사, 서울, 1995.
18. 황정규, 학교 학습과 교육 평가, 교육과학사, 서울, 1985.