韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 프로시딩>
1997. 7. 제6집, 307-316.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
*Proceedings of Mathematical Education*
Series E: July 1997, Vol. 6, 307-316.

# 퍼지(fuzzy)개념과 수학 교육

이병수 (경성대학교)
강미광 (동의대학교)

## 0. 배경

산행길에서 만난 89세의 한 노인은 44세인 젊은이를 초노인(初老人)이라고 부르면서 건강에 유의하라고 당부하였다.

노인에 대한 개념인식이 전혀 생소한 그 젊은이는 젊음과 늙음의 개념 차이에서 크게 방황하게 되었다.

## 1. 서론

논리는 수학에서 언어역활을 하며 현대 수학은 이치논리(二値論理)를 바탕으로 한 이치 수학이라고 할 수 있다. 한편, 우리의 마음과 언어를 포함한 우리의 모든 생활은 이치적이 아니고 다치적(多値的)이다. 그래서 이치논리를 바탕으로 한 현존의 수학으로는 우리의 생활을 적절히, 그리고 충분히 나타내지 못하며, 우리의 마음을 만족스럽게 효과적으로 표현할 수 없다. 더군다나 심리학, 교육학, 사회학, 인식론, 인식과학, 기호학 그리고 경제학 등과 같이 잘 정립된 분야들은 수학의 학습과 지도의 기본적인 도구로 형식적 언어로 표현되기 보다는 자연 언어로 표현된다. 따라서 우리의 생활과 마음을 좀 더 완벽히 혹은 정확히 나타내기 위해서는 이치 수학보다는 좀 더 다양하고 일반적인 수학을 다루는 것이 바람직하다. 사실, 논리는 하나의 언어로써 수학적 체계에서 중심적 역할을 하므로 이치논리 대신에 다치 논리가 좀 더 바람직한 수학을 만드는데 큰 도움이 될 것이다. 더군다나 교육은 학생들로 하여금 그들 자신이 변화하는 세계에 스스로 적응할 수 있도록 도와주어야 한다. 그러기 위해서는 현존의 수학이 다치 논리를 바탕으로 이론을 전개해야하며 현존의 수학 교육이 학생들의 직관(直觀, intuition)을 발전시키는데 더 이상 소홀해서는 안된다.

이 논문에서는 먼저, 소위 이치 수학과 이치 수학교육의 약점을 살피고 둘째, 자연

언어의 의미를 논하며 셋째, 퍼지집합의 개념을 소개하고 그 다음으로, 퍼지집합과 상응(相應)하는 다치논리인 퍼지논리(fuzzy logic)를 소개하며 마지막으로, 왜 수학 교육이 개선되어야 하는가에 대한 문제점으로 몇가지 수학 교육 철학의 뒷 배경을 제공하고자 한다. 이러한 문제점의 논의에 앞서 수학 교육 상황에서 퍼지 논리의 인정이 요구된다.

다음의 내용이 우리가 다루고자 하는 주 관심사이다.

(1) 퍼지 수학(fuzzy mathematics)과 퍼지 수학적 지식(fuzzy mathematical knowledge)을 가르치는데 어떤 종류의 교육방법이 알맞는가?

(2) 이치 논리 대신에 퍼지 논리를 가르친다면 어떤 문제점이 생길까?

(3) 이치 수학(mathematics)과 이치 수학적 지식(mathematical knowledge)을 가르치는데 효율적인 퍼지적 방법은 무엇인가?

이 논문을 쓰는데 있어서 G. 칸토르(Cantor)의 격언 "자유는 수학의 본질이다"를 기억하지 않을 수 없다.

## 2. 수학의 약점

수학이 무엇인가에 대한 질문에 유일한 답안은 없다. 일반적으로 수학의 본성에 대한 진술은 채택된 견해에 다라 다르다. 수학을 지식의 실체, 기술과 방법의 총체, 인간활동의 생산물 그리고 심지어 인간활동 그 자체 즉 문제 풀이로 간주하는 등 여러가지로 보고 있다[7]. 한가지 견해로써, 수학을 일곱가지 지식중의 하나로 간주하는 히스트(Hirst)와 피터스(Peters) 견해[10]를 들 수 있다. 그들은 수학을 비인간적인 지식체로 간주한다. 수학은 주로 특수한 개념, 명제 그리고 명제를 증명하는 방법 즉 논리적 증명으로 구성된다. 그리고 수학적 체계(mathematical system)는 무정의 개념, 보통집합, 집합대수, 관계, 연산, 추론규칙, 논리적 공리, 비 논리적 공리, 정의 그리고 정리로 구성되어 있다고 할 수 있다.

그러나 수학은 정리, 정의 그리고 기술등의 집합 이상의 무엇이다. 그것은 사고의 방법이다[18].한편, 직관, 경험적 증거가 있는 동의, 취미, 희망적 사고(wishful thinking), 개인적 야망등 수학자들의 사고와 활동에 영향을 준 많은 고려할만한 사항등이 이치적이 아니다. 비트게스타인 (Wittgenstein)[22]은 소위 우리가 수학이라고 부르는 것은 목적들의 집합을 가진 활동들의 집합이라고 했다. 그는 수학을 인간의 목표, 의사 그리고 목적의 영역에 주어진 잡다한 인간활동으로 구성된 것으로 간주했다.

수학은 활동적 의지, 관조적 근거 그리고 미학적 완벽성에 대한 욕망을 나타내는 인간 마음의 표현이다[6]. 더군다나, 논리적으로 옳다고 간주된 수리적 추론의 중심적 핵심은 항상 존재한다. 따라서 다치논리나 퍼지논리를 다루는 것은 상당한 근거를 가지고 있으며 그리고 직관적이다.

만일 우리의 대화가 퍼지적이 아니고 이치적이라면 우리의 일상생활은 더욱 어려울 것이다. 예를 들면, 엷은 푸른 색깔을 띤 녹색 천조각을 녹색이라고 해야할지 푸른-녹색이라고 해야할지를 결정할 수 없으며, 우리가 명명하고 싶은 색깔에 동의하지 않을 수도 있다. 마찬가지로 "키가 크다."라는 것의 인위적인 정의를 내린다면 측정치가 절대적인 것이 아니므로 우리는 곤경에 처하게 된다. 비록 기존의 수학이 이치논리-특히 중간을 배제한 공존-의 법칙에 따라 개념을 다루지만, 모든 진술이 이치논리로 나타내는 개념을 포함하는 것은 아니다. 마구너스(Magnus)[11]에 의하면 니이체(Nietsche)가 퍼지 개념을 지적한 최초의 사람이다. 니이체는 단지 사람이 만든 개념만이 논리값을 매길 수 있다고 주장했다. 그러나 고전 수리 논리는 예와 아니오, 하얀 것과 검은 것, 참과 거짓의 두 세계를 다룬다. 실제로 모든 문장이 이치 논리로 다룰 수 있는 개념을 포함하고 있는 것이 아니고 또한 우리는 우리의 생활과 사고(思考)로 부터 얻어지는 많은 종류의 문장을 다루어야 하므로 기존의 수리논리로써는 모든 문장을 철저히 다룰 수 없다. 기존의 논리 개념은 실제 상황을 좀 더 적절히 반영하고 나타내기 위해 변해야 한다. 실제상황은 다소 부정확하고, 모호하면 애매하다는 것이 수학에서 현실화되어야 한다.

## 3. 수학교육의 약점

이치논리와 형식화된 언어를 바탕으로 한 수학은 다치논리와 자연언어를 바탕으로 한 사회학, 교육학, 심리학, 경제학등의 진부분 집합(眞部分 集合)이라고 말할 수 있다. 그리고 수학 교육은 그러한 수학과 사회학, 교육학, 심리학, 인식론, 인지과학, 경제학 그리고 기호학 등과 같은 많은 잘 정립된 과학적 분야의 십자로에 위치해 있다. 수학교육은 그러한 분야에서 얻어진 문제들과 관련을 맺고 있다. 따라서 수학 교육은 무한치(無限値) 분야에서 이치 수학을 다루는 단점을 가지고 있다고 할 수 있다. 마치 해변가의 한 구석에서 넓은 바다의 극히 제한된 한 부분을 보고 있는 형상이다.

한편, 수학에 대해 일반적으로 알려져 있는 인식은 그것이 어렵고, 냉정하고. 비인간적이고, 추상적이고 이론적이고, 극히 이성적이며 그리고 수학은 절대적이라는 철학과

관련되어 있다는 것이다.

이러한 인상은 이치수학이 분리된 가치(separated value)와 상응한다는 주장이다. 대조적으로, 반대되는 것으로 수학에 대한 인간적인 인상은 수학이 연결된 가치(conneted value)와 대응한다는 것이며, 그것은 수학에 대한 오류를 인정하는 최초의 철학에서 학문적 지원을 얻는다. 비록 이 두 철학적 입장이 수학교실에서의 분위기에 주된 영향을 끼치지만. 직접적인 논리적 연관은 없다고 주장되고 있다. 수학 교실에서 실현되는' 가치는 아마도 수학에 대한 학습자의 상상과 이해를 결정하는데 주된 요인이 될 것이라는 결론을 얻을 수 있다[8].

어니스트(Ernest)의 이러한 결론은 이치논리를 바탕으로 한 현존의 수학을 근거로 얻어진 것이지, 이치적이 아닌 연결된 가치 (connected value)와 일치하는 수학에 대한 인간적 상상을 근거를 한 것은 아니다.

수학 교육에 관련된 연구는 오랜 기관에 걸쳐서 피아제(Piaget)의 발생적 인식론과 발달 심리학에 의해 깊이 영향을 받았다. 수학 교육의 연구 주제는, 예를 들면, 수학 지도; 수학 학습; 학습과 지도의 상황; 지도와 학습 그리고 수학적 지식의 관계성; 수학 수업의 실제; 수학과 수학의 지도에 관한 사회적 견해; 혹은 교육적 체계등이 될 수 있다[16]. 학습-지도 과정은 사회적 상호 작용으로 간주될 수 있다. 학습-지도 과정은 인간들의 상호적 관계를 유도하며, 인간들의 상호적 관계는 사회학에서 전형적으로 개념화되고 연구되므로 수학적 의미는 사회적 과정 특히 사회적 상호작용의 산물로써 간주된다[20].

이러한 관점에서 볼 때, 수학적 의미는 근본적으로 안으로 만들어지거나 혹은 자체적으로 독립하여 존재하는 것이 아니고 자체들 사이에서 관련되어 나타나는 것으로 연구되고 있다. 학습은 지식 구성의 과정이지 기록하거나 흡수하는 것이 아니며 학습자는 인지과정을 알고 있으며 그것을 통제하고 조절할 수 있다[1]. 이러한 스스로의 인식이나 초인지는 학습과정에 중요하게 영향을 끼친다[9].

학습은 주어진 지식을 수동적으로 받는 작업이 아니고 학생들 자신이 주연 배우가 되어 지식을 축적해가는 과정이다[21]. 따라서 수학교육은 학습자들이 직관을 통해 적극적으로 학습에 임하도록 도와주어야 한다. 직관과 논리적 사고는 서로 상보적이며 인간의 수학적 사고에서 서로 밀접히 관련되어 있다. 달리 표현하면 인간적 사고는 단지 직관과 논리적 사고가 조화를 이루고, 서로 협동적인 관계가 될 때 생산적이고 심오하게 발전할 수 있다[14]. 직관이란 개념은 퍼지적이지만 위에서 언급한 논리적 사고

는 이치적이다. 따라서 그러한 직관과 일치되는 퍼지적 논리를 함께 다루는 것이 훨씬 효과적이다. 퍼지적 논리와 직관을 일치시켜주기 위해서는 수학교육이 전적으로 학생들을 위해서 이루어져야 하며, 교사는 학생들의 수학학습의 어려움을 찾는데 귀를 기울여야 한다. 따라서 학생을 돕기 위한 가장 중요한 일은 학생들로 하여금 구성주의적 학습 환경에서 수학 학습을 하되 자연언어를 사용하며, 사회과학들과 일치하는 퍼지 수학을 배우게 하는 것이다.

## 4. 자연언어의 의미

일상언어는 애매한 개념을 내포하고 있으며 또 이러한 현상은 많은 철학적 문제를 야기시키는 중요한 원인이다. 사실상 그런 문제들은 언어적 오해를 불러 일으킨다. 그러한 혼란을 방지하기 위해서 형식언어를 도입하는 것이 유용하다는 입장도 있다[17].

그러나, 그런 관점과는 대조적으로, 자연 언어에 관련된 철학적 입장에서는 형식언어로써는 실제 상황을 수박 겉 핥기 식으로 부정확히 나타낼 수 있을 뿐이다라고 주장한다.

형식언어로 나타낼 수 없는 경우나 혹은 형식언어의 사용으로 야기된 뉘앙스를 자연언어를 사용하여 묘사할 수 있는 가능성이 있기 때문에 중대한 대화에 필요한 자연언어를 풍부하게 가지고 있는 것은 본질적인 일이다. 형식언어는 단지 자연언어의 일부분으로서 생동감이 없고 매우 부정확하다. 스코프스모제(Skovsmose)[17]에 따르면, 비트겐스타인은 다음의 주장 "형식언어로써 실재(실제 상황)를 가장 잘 묘사할 가능성이 있다. 그렇지만 자연언어로써 실재를 가장 잘 묘사할 수 있을 수도 있다"를 인정하지 않았다. 자연언어는 실재를 상식적으로 해석하는 것을 기본으로 하고 있다. 수학을 구성하는 상황에서 자연언어를 사용하여 묘사할 수 없다면 수학의 구성력에 관한 토의는 진전될 수 없다. 따라서 수학의 구성력의 발전을 위해서 자연언어를 형식화하는 작업은 중요한 인식론적 단계이다. 우리의 사고와 생활이 자연언어를 바탕으로 하기 때문에 우리의 수학적 개념 범주안에서 자연언어를 다룰 필요가 있다. 그리하여 퍼지 개념과 자연언어는 우리의 마음속에서 서로 협동적이며, 이치 수학의 일반화인 퍼지 수학을 확장하며 그리고 퍼지네스(fuzziness)를 갖춘 수학을 다루는 수학 교육을 일반화시킬 것이다.

## 5. 퍼지집합과 퍼지논리

논리는 수학 세계에서 언어로서의 중요한 역할을 하며, and, or, not, implication과 같은 논리에서의 연결사는 집합연산의 intersection, union, complement, inclusion에 각각 대응한다. 이와같이 논리에서의 연산구조를 집합에서의 연산구조로 바꾸는 동형사상(同型寫像)이라 불리는 이러한 1-1대응은 집합론에서 성립하는 결과들이 이치논리에서 대응되는 정리로 나타낼수 있음을 보여준다[2].

보통집합이 가지는 가장 기본적인 중요한 성질은 어떤 원소가 그 집합에 속하느냐, 속하지 않느냐 라는 것이며 이치논리라 불리는 현존의 보통논리는 어떤 명제가 참이냐 거짓이냐 라는 형태로 보통집합과 동형적으로 연결되어 있다. 그리고 보통집합은 보통논리와 함께 수학적체계에서 본질적인 역할을 한다.

자데(Zadeh)교수[23]에 의해 1960년대 중반 제창된 퍼지집합과 퍼지논리는 고전집합과 고전논리를 포함하는 더 넓은 개념적 체계로 간주되어질 수 있다. 더욱이 지난 30여년간 퍼지집합과 퍼지논리의 발달에서 중요한 진전이 있었고 응용분야의 많은 영역에서 이들의 유용성이 유감없이 발휘되고 있다.

퍼지집합과 퍼지논리는 산업과 자연 그리고 인간성에서의 불확실체계라든지, 완벽하고 정확한 정보가 없는 상태에서 의사결정을 할 때 상식적 추론을 듣는 촉진자를 모델링하는데 있어서 강력한 수학적 도구가 되고 있다. 그리고 특히 전통적 수학적 방법에 의해서는 쉽게 묘사하기 어려운 복잡한 현상에 적용할 때나 가장 적절한 근사해를 찾는 것이 목적인 경우 이들의 역할은 매우 중요하다. 퍼지논리는 일반 대중들 사이에서 뿐만 아니라 상업과 산업세계에서도 깊은 관심을 끌고 있다[4]. 확률적인 불확실성 유형의 모호함과는 대조적으로, 사건이나 현상 혹은 명제의 의미론적 의미의 묘사에 관한 모호함을 퍼지네스(fuzziness)라 한다. 사실상, 애매모호함(fuzziness)은 역학에서의 마찰처럼 논리세계에서 무시할 수 없는 개념이다.

퍼지집합과 퍼지논리는 과학의 모든 분야와 엔지니어링 그리고 사회, 경제, 과학에서 다양하게 응용되어지고 있다. 모든 고전적논리는 관습적으로 명확한 기호를 사용하고 있다는 것을 가정하므로 현실 세계에서의 삶에 적용되지 않을 뿐 아니라 가상적인 우주시대의 생활에도 적용되지 못한다. 배중률은 엄밀한 기호들이 사용될때는 참이지만 기호가 모호한(vague) 경우-실제로 모든기호는 그렇지만-는 참이 아니다.

모든 언어는 그 나름대로의 가치를 가지고 있다. 분명히 모호함(vagueness)이란 정도(degree)의 문제이다. 모호함을 다루는 쪽으로의 중요한 접근은 모호한 집합(vague set)개념을 처음 도입한 철학자 브랙(Black)[2]에 의해 이루어졌다. 퍼지네스(fuzziness)의 개념은 모호함(vagueness)의 개념을 포함하고 있다[23].

퍼지논리는 무한치 논리체계에서 퍼지집합과 퍼지관계를 통합시킨다는 의미에서 무한치 논리의 확장으로 간주되어 질 수 있다. 퍼지논리는 퍼지집합론을 주요 도구로 사용한다. 그것은 자연언어에서 언어변수에 초점을 맞추고 부정확한 명제를 근사적으로 추론하기위한 바탕을 제공하는 것을 목표로 하고 있다.

고전적 집합과 고전적 이치논리, 퍼지집합, 다치논리, 퍼지논리, 명제와 서술 사이의 관계는 도식적으로 쉽게 나타낼 수 있다.

## 6. 퍼지개념과 수학교육

아이디어(ideas)나 그림 그리고 이미지와 가치체계들은 인간의 사고와 감정안에서 형성되어진다. 그런데 무엇보다도 인간의 사고와 감정은 우리의 일상언어가 가지는 단어보다 확실히 더 많은 개념과 이해의 폭을 지니고 있다.

우리의 사고와 감정에 관한 지배력은 생활언어의 힘보다 훨씬 더 강력하다는 것은 더욱 분명해지고 있다. 만약 자연언어의 힘과 논리적 언어의 힘을 비교한다면 논리적 언어의 힘이 훨씬 더 약하다는 것을 알 수 있을 것이다. 그러므로 수학적 언어나 혹은 논리적 언어를 사용해서 만든 모델과 우리의 상상에서의 문제와 체계사이에 1-1 대응함수를 보장 받는 것은 불가능하게 보일지 모른다. 사실, 실제 상황은 거의가 다 이치적이 아니며, 결정적으로 이것이다 혹은 아니다 하고 다룰 수 있는 것도 아니며, 또한 정확히 묘사할 수 있는 것도 아니다. 그리고 실제의 체계에 대한 완전한 묘사는 인간이 이제까지 동시에 인지하고, 진행하고 이해할 수 있었던 것보다도 훨씬 더 세분화된 자료를 종종 요구하게 될 것이다.

퍼지집합은 한 원소가 그 집합에 속하는 정도를 정의한다. 퍼지수(fuzzy number)와 마찬가지로 퍼지집합은 언어변수를 묘사하는데 사용되어진다. 퍼지집합은 여러 유형의 퍼지네스를 내포하고 있으며 응용과 이론 연구에서 중요한 역할을 하고 있다. 그것은 퍼지논리의 발달을 위한 하나의 도구이다. 특히, 그것은 복잡한 수학적 교육체계에 도움을 줄 수 있을 것이다. 자데(Zadeh)[23]가 1965년 퍼지네스의 개념을 내놓았을 때, 그 배경에는 인간과 컴퓨터사이의 관계를 개선시키기 위한 바램이 있었다. 이치 논리적 기기인 컴퓨터와, 감정과 직관을 가진 인간의 무한치 사고사이에는 많은 공통점이 있지만 또한 다른점이 많이 존재한다. 퍼지집합과 퍼지논리는 과학의 논리적 성질과

인간과 사회과학의 복잡성 둘 다에 언급될 수 있는 의사소통 매체이다.

퍼지네스의 개념은 엔지니어링[8]이나 의학[19], 기상학[5], 대량 생산[12]과 같은 일상생활의 많은 영역과 그 밖의 영역에서 찾아볼 수 있다. 그것은 인간의 판단과 평가 그리고 결정이 중요한 역할을 하는 모든 영역에서 특히 빈번히 나타난다. 이런 영역은 바로 의사결정이나 추리, 학습과 그밖의 영역들이다.

부정확성은 한 변수의 값에 대한 지식의 부족이라기 보다는 모호하다는 의미로 받아들여진다. 퍼지논리 이론은 모호한 개념 현상이 명확하고 엄격하게 연구되어질 수 있도록 오히려 기존의 이치논리보다 더 엄격한 수학적 뼈대를 제공해준다.

사람의 본성은 본질적으로 애매모호하며 교육의 목적은 그러한 인간의 본성을 개발하는 것이어야 한다. 그러나 이치논리나 보통집합은 오히려 인간의 본래 마음의 발달을 방해 할 수도 있는 인위적이고 엄격한 것들로 인간 본연의 직관성(intuition)을 오히려 억제시키는 입장에 있게 된다. 그래서 퍼지 수학과 퍼지적 교육방법을 교실, 특히 수학교육 교실에서 받아들일 필요가 있다고 말할 수 있다.

## 7. 끝맺는 말

퍼지집합과 퍼지논리는 각각 보통집합과 이치논리의 일반화이자 확장이다. 퍼지집합과 퍼지논리는 과학의 논리적 본성에도 부합되고 인간성이나 사회과학의 복잡성에도 부합되는 의사 소통 매체이다. 더욱이 그것들은 애매모호함을 표현할 수 있는 새로운 논리적 도구이다. 따라서 그것들은 더욱 자연스럽고 또한 명확하다.

확률론 개념을 포함하는 애매모호한 현상의 폭넓은 다양성에 대한 수학적 측도가 이제는 설정되어져야 한다. 수학적 체계로써, 퍼지집합과 퍼지논리는 현재의 체제를 확장하고 새로운 개념에서 취하는 한 세계를 구성한다. 그래서 일찌기부터 퍼지이론에 관심이 많은 연구자들이 속출하고 있다.

따라서 이치수학과 이치수학적 지식을 각각 일반화시킨 퍼지 수학과 퍼지 수학적 지식을 가르치는 것은 매우 바람직하고 타당하며 추천할 만 하다.

만약, 퍼지수학과 퍼지수학적 지식을 가르치는 것이 받아들여지지 않거나 어려울 경우 보통 수학이나 보통 수학적 지식을 퍼지화된(fuzzified) 교육방법을 사용해서 가르치는 것도 바람직하다 고 할 수 있다.

# 참 고 문 헌


1. G. Anthony, Active learning in a constructivist framework, Educational Studies in Mathematics 31; PP. 349-369 (1996).
2. M. Black, Vagueness; An Exercise in Logical Analysis, Philosophy of Science, 4, PP. 472-455 (1937).
3. D. I. Blockley, The Nature of Structural Design and Safety, Chichester (1980).
4. G. Bojadziev and M. Bojadziev, Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications, Advances in Fuzzy Systems-Applications and Theory Vol. 5, World Scientific, New Jersey (1995).
5. H. Cao and G. Chen, Some applications of fuzzy sets of meteorological forecasting, Fuzzy Sets and Systems 9, PP. 1-12 (1983).
6. R. Courant and H. Robbins, What is Mathematics?, An elementary approach to ideas and methods, Oxford University Press, Oxford (1978).
7. P. Ernest, Philosophy, mathematics and education, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol. 20, No. 4, PP. 555-559 (1989).
8. ____________, Values, gender and images of mathematics : a philosophical perspective, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol. 26, No. 3, PP. 449-462 (1995).
9. J. H. Flavell, Metacognitive aspects of problems solving, in L. B. Resnick(ed.), The Nature of Intelligence, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N. J., PP. 231-235 (1976).
10. P. H. Hirst and R. S. Peters, The Logic of Education, Routledge and Kegan Panl, London (1970).
11. W. Magnus, The Significance of Mathematics; The Mathematicians Share in the General Human Condition, Amer. Math. Mon. Vol. 14, No. 3, PP. 261-269 (1997).
12. E. H. Mamdani, Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers, In Mamdani and Gaines, PP. 325-334 (1981).
13. L. Moreno-Armella and G. Waldegg, Constructivism and mathematical education, Int. J. Math. Educ. Sci. Technolo, Vol. 24, No. 5, PP. 653-661 (1993).

14. T. Nakahara, Study of the constructive approach in mathematical education(Ⅱ); Types of constructive interactions and requirements for the realization of effective interactions, Hiroshima Journal of Mathematics Education 5, PP. 1-10 (1997).
15. B. Russell, Vagueness, Australian Journal of Psychology and Phylosophy, 1, PP. 84-92 (1923).
16. A. Sierpinska, J. Kilpatrick, N. Balacheff, A. G. Howson, A. Sfard and H. Steinbring, What is research in mathematics education, and what are its results?, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 24 No. 3, PP. 274-278 (1993).
17. O. Skovsmose, Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1994).
18. R. S. Strichartz, The Way of Analysis, Jones and Bartlett Publishers, Boston (1995).
19. M. A. Villa and M. Delgado, On medical diagnosis using possibility measures, Fuzzy Sets and Systems, 10, PP. 211-222 (1983).
20. J. Voigt, Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics, Educational Studies in Mathematics 26: PP. 275-298 (1994).
21. E. von Glasersfeld, Learning Mathematics: Constructivist and interactionist theories of mathematical development [Review of the book "Learning Mathematics: Constructivist and Interactionist Theories of Mathematical Development, P. Cobb (ed.)]. in Zantrablatt für Didaktik der Mathematik 4, PP. 120-122 (1995).
22. L. Wittgenstein, Remarks on the Foundation of Mathematics (revised edn) MIT Press, Cambridge, Mass. (1978).
23. L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, 8, PP. 338-353 (1965).
24. H.-J. Zimmermann, Fuzzy set Theory-and Its Applications, Klumer Publishers, Mass. (1991).