韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 프로시딩>
1997. 7. 제6집, 293-305.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Proceedings of Mathematical Education
Series E: July 1997, Vol. 6, 293-305.

학생의 질문과 수학적 사고의 확장에 대한 소고

추 종 석 (경성대 대학원)

1. 머리말

학생의 질문은 수학적 사고를 확장하고 흥미를 유발 할 수 있는 좋은 기회이다. 학생들은 시험에 나오지 않는 즉 교육과정에서 벗어난 영역의 문제에 대해서는 대부분 관심을 두려고 하지 않는다. 그러나 참고서 풀이나 교사가 가르쳐 주는 방법 이외의 해법을 찾아 보거나 나름대로의 풀이 방법이 원하는 결과가 나올 때 학생들은 강한 수학적 동기유발을 한다.

평소 학생들은 교사가 수업을 할 때 좀처럼 흥미를 나타내거나 따라 오지 않는다. 항상 가능한 것은 아니지만 앞서 배운 내용과 현재 배우는 내용에 어떤 연계성이 있음을 느끼거나 "이렇게 하면 될 것 같은데…"하는 막연하지만 어떤 생각이 떠오를 때 학생들은 예리한 흥미를 보여준다. 즉, 질문을 하거나 교사의 수업에 열중하게 된다. 이 경우 교사는 이들의 관심을 소홀히 해서는 안된다. 학생들과의 대화를 위해 적절한 발문을 사용하여 흥미를 유발 시키고 그들 스스로 문제를 해결할 수 있도록 도와 주어야 한다. 또 학습은 학생들 스스로가 주도해 가도록 분위기를 조성하여야 한다. 이러한 태도는 요즘 많이 논의 되고 있는 구성주의의 주장을 잘 반영한다고 볼 수 있다. Kieren(1990)에 의하면 수학지식은 학습자가 직접 관계와 패턴을 구성해 나가는 활동으로 얻어 진다고 하였다. Erenst Von Glaserfeld는 "A way of knowing and learning" 1995에서 "개념은 학생 개개인이 개별적으로 구성되어져야 한다."고 하였다. 하지만 교사들은 학생들의 개념 구성과정을 방향지어 주어야 할 의무가 있다"라고 하였다. 본 논문에서는 교사의 안내에 의하여 학생 스스로 특이적분에 대한 개념을 파악해 가면서 수학적 사고를 확장해 가는 과정을 실제수업중에 일어난 내용을 바탕으로 살펴보고자 한다.

2. 문제상황

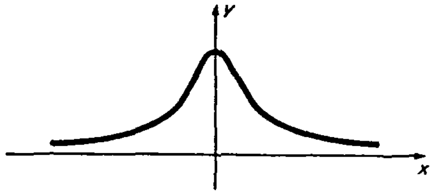
고등학교 2학년 겨울방학 중 보충수업은 2학년 동안 주어진 교과서를 모두 마치기 위해 교과서 통계부분을 공부하였다.

정규분포에 관한 내용을 수업하던 중에 있었던 학생의 질문은 다음과 같은 것이었다.

연속확률 변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음과 같이 주어진다.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty) \qquad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \qquad (2)$$



$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

(2)의 정적분 값이 1이 됨을 직접 증명하여 보자는 학생의 질문이 있었다. 그래서 나는 (2)의 정적분값을 계산하는 것은 크게 두가지 문제를 해결해야 한다고 말하고 그 두가지는 무한구간에 대한 적분의 정의와 계산과정상에서 중적분(double integral)과 극좌표(polar coordinates)를 더 배워야 한다는 것을 이야기하였다. 그리고 평균과 분산은 계산할 수 있음을 말해주었다. 질문한 학생과 다른 학생들은 대체로 수긍하는 듯이 별말이 없었다.

(1), (2)식과 그래프의 활용 방법을 설명하고 표준 정규분포와 표준 측도에 의한 표준화를 설명하고 표준 정규분포의 확률밀도함수

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (-\infty < z < \infty) \qquad (3)$$

(1), (3)의 그래프의 관계 및 관련사항을 더붙여 설명하고 X가 N(m, σ^2)을 따를 때 $Z = \frac{x-m}{\sigma}$은 N(0, 1)을 따른다. 이에 대한 E(Z)=0, V(Z)=1이 되는 것은 다음 시간에 증명하기로 약속하였다.

$$E(z) = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\right) dz = 0 \qquad (4)$$

(4)의 증명을 하기위해 다음의 질문과 학생과의 대화를 기술한다.

교사 : 적분구간의 위끝, 아래끝이 무한대로 된 것을 어떻게 처리하면 좋은가요?

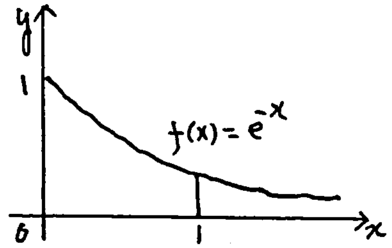
학생 : ……(대답이 없음)

교사 : 지금까지 우리는 유계인 구간에 대해서만 적분하였습니다.

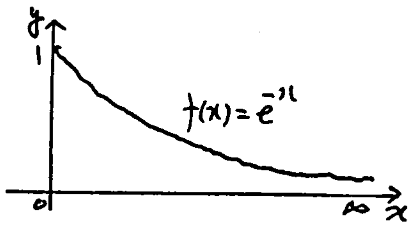
즉, $\int_a^b f(x)dx$에서 구간은 [a, b]임을 기억할 것입니다.

학생 : …… ($\int_a^b f(x)dx$의 적분구간이 유계였다는 사실이 새삼스런 것이라는 표정들이었다.)

교사 : 예를들면 $f(x)=e^{-x}$에서



$\int_0^1 e^{-x}dx$ ……… $[0, 1]$ 유계



$\int_0^\infty e^{-x}dx$ ……… $[0, \infty)$ 한쪽이무한구간

학생 : 다른 문자로 바꾸어 극한을 취하면 될 것 같습니다.

(이질문을 한 학생의 대답이었다. 아마도 나름대로 생각을 해왔던 것 같았다.)

교사 : 다른학생은?

학생 : (2~3명의 학생이) 그렇게 하면 될 것 같습니다.

(확신하는 것은 아니지만 동의하는 것 같았다.)

교사 : 그러면 극한 취하여 봅시다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\right)dz = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{z}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0$$

많은 학생들이 그제서야 아 그렇게 하면 되겠구나 하는 소리가 여기저기서 들렸다. 그리고 학생들의 수업태도가 많이 달라졌다.

교사 : 이식을 계산을 하지 않고 어떻게 0이라 했을까요.

학생 : $ze^{-\frac{z^2}{2}}$은 기함수 이니까요.

교사 : 그렇습니다.

$$V(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} Z^2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\right)dz = 2\lim_{a\to\infty}\int_0^a Z^2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\right)dz \cdots \text{ 우함수의 적분}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\lim_{a\to\infty}\left[-Ze^{-\frac{z^2}{2}}\right]_0^a + \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right\} \cdots \text{ 부분적분법}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz}_{(2')} = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 1$$

(3)의 식에서

교사 : V(Z)=1 임을 E(X)=0구하는 방법으로 무한구간의 적분을하여 구했습니다. 계산과정에서는 우함수의 적분법과 부분적분법을 사용하였습니다.

V(Z)=1 임 증명하는데 마지막 부분 식(2′)는 증명 않고 결과를 이용하였습니다.

학생들은 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}dx = 1$ …………(2′)의 증명을 하지 않았으나 대체로 만족했다.

그후 보충수업도 끝나고 교과서 진도를 끝낸후 무한구간의 적분에 관하여 학생들과 다시 공부할 기회를 마련하였다. 나의 흥미는 $\int_{-\infty}^{\infty} \rightarrow 2\lim_{a\to\infty}\int_0^a$ 에 관한 학생의 이해정도에 관한 것이었다.

식의 변화를 보고 직관적으로 이해한 것인지 아니면 막연히 그렇겠구나 하는 생각인지를 알고싶었다. 그리고 적분의 구간을 무한구간으로 바꾸어줌으로써 지금까지 생각하지 못했던 면적을 구할 수 있게하고 교사의 안내에 의해 수학적 사고를 확장해 볼수 있는 기회를 마련해 주고 싶었다.

현행 고등학교의 적분에서는 유한의 양만을 다루어 왔다.

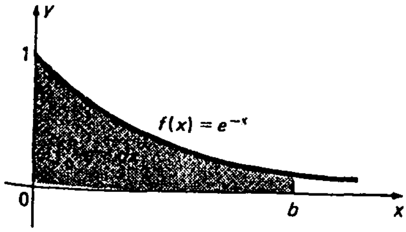
즉, [a, b] 유계인 구간에서만 $\int_a^b f(x)dx$를 정의 하였다.

그런데 물리학, 경제학 확률론 등의 응용분야에서는 a 또는 b가 무한인 경우의 적분이 필요하다. 이러한 적분을 특이적분이라한다.

현행 교과서에서 정적분에 관한 문제는 모두가 유계였다.

$f(x)=e^{-x}$, $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ $f(x)=xe^{-x^2}$ … 등의 함수에 대하여 적분구간을 무한히 했을 때 예를들어 살펴보기로 한다.

$$\int_0^b e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^b=1-e^{-b} \qquad (5)$$



교사 : (5)의 식에서 b→∞하면 오른편의 면적을 구할 수 있을까요?
학생 : ……
학생 : 될 것 같습니다. (자신이 없는 듯한 몇몇 학생들의 대답이었다)

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^b=\lim_{b\to\infty}(1-e^{-b})=1 \qquad (6)$$

교사 : (6)의 식은 쉽게 구할 수 있겠지요?
학생 : 예
교사 (6)의 경우처럼 극한값이 존재하는 경우는

$\int_0^\infty e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx$라 해도 좋은가요?

학생 : 예
교사 : 만약 극한 값이 존재 하지 않는 경우로 어떻게 되나요.
학생 : 적분을 못합니다. 발산합니다.
교사 : 그렇습니다. 그래서 극한이 존재하고 유한이면 특이적분은 수렴하고 이 극한값을 가진다고 말하고 그렇지 않으면 적분은 발산한다고 합니다.

(정의1) 함수 f(x)가 무한구간 (-∞, b]에서 연속이고 b≧a이면

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

(정의2) 함수 f(x)가 무한구간 [a, ∞)에서 연속이고 b≧a이면

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

위에서 우변의 극한이 존재하여 유한이면 특이적분은 수렴하고 이들 극한 값을 가진다.

교사 : 자 다음에 [-∞, ∞]에서는 어떻게 정의하면 좋은까요

학생 : 극한을 취하면 됩니다.

교사 : 어떻게 a, b 둘다?

학생 : ……

교사 : (정의1), (정의2)와 같이 하면?

학생 : 반으로 나누면 됩니다.

교사 : 좋은 생각입니다.

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx \ + \ \int_0^\infty f(x)dx$$

교사 : 이와 같이 되려면 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$와 $\int_0^\infty f(x)dx$가 어떤 조건이 되어야 하나요.

학생 : 수렴해야 됩니다. 극한값이 존재해야 합니다.

교사 : 여기서 0대신 다른 점으로 이등분 한다면 어떻게 될까요?

학생 : 0대신 다른문자를 쓰면 됩니다.

교사 : 좋습니다.

$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx \ + \ \int_c^\infty f(x)dx$라 정의한다.

학생 : 극한값이 없는 경우, 발산인 경우는 어떤경우입니까?

교사 : 좋은 질문입니다. 예를들어 봅시다.

$$\int_0^\infty \sin x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin x dx = \lim_{b\to\infty}[-\cos x]_0^b$$
$$= \lim_{b\to 0}(1-\cos b) =$$

교사 : 지금까지 우리는 적분구간이 유계가 아닌경우에 대해 살펴보았습니다. 다음에는 적분구간은 유계이지만 피적분 함수가 유계가 아닌 경우를 살펴봅시다.

교사 : 우리가 알고 있거나 식이나 그래프를 통해 알수 있는 유계가 아닌 피적분함수를 말해 볼까요?

학생 : $y = \dfrac{1}{x}$

교사 : 그렇지요 $y=\frac{1}{\sqrt{x^2}}$도 $y=\frac{1}{x}$등과 같은 함수는 0근방에서 유계가 아닙니다.

교사 : $\int_{-2}^{1}\frac{1}{x^2}dx$를 계산하여 보세요.

학생들은 서로 의논 하며 열심히 계산하였다. 결과를 확인하지 않고 다음 내용을 계속하였다.

(예1) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$는 (0, 1]에서 연속이고 0근방에서 유계가 아닙니다.

임의 0<C<1에 대하여

$\int_c^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=[2\sqrt{x}]_c^1=2(1-\sqrt{c})$이다.

따라서 $\lim_{c\to 0^+}2(1-\sqrt{c})=2 \quad \therefore \int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2$

(예2) $\int_0^1\frac{1}{x}dx=\lim_{t\to 0^+}\int_t^1\frac{1}{x}dx=\lim_{t\to 0^+}[\ln^x]_t^1$

$=\lim_{t\to 0^+}(0-\ln^t)=\infty$ … 발산

(예3) $\int_0^1\frac{1}{x^p}dx \quad \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x^{-p}dx=\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_t^1$ 단 $P\neq 1$

$=\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{1-P}-\frac{1}{1-P}\cdot\frac{1}{t^{P-1}}\right]=\frac{1}{1-P}\ (P<1),$

$\infty \quad (P>1)$

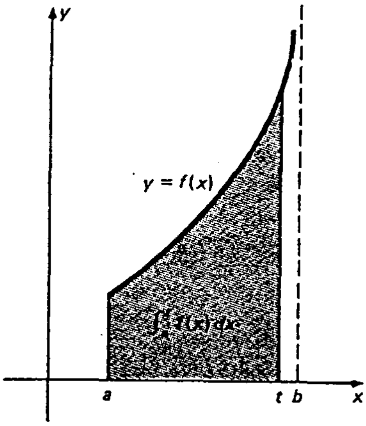
(예2)와 (예3)에서 우리는 P≧1 경우는 발산 P<1 때 수렴함을 알수 있다.

교사 : (예3)에서 P=2 때 즉, $\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$는 어떻게 될까요.

학생 : 발산입니다.

교사 : 다른 값을 구한 학생?

(제법 많은 학생이 손을 들었다)



지금까지 적분구간의 경계에서 무한이 되는 경우를 공부했습니다.

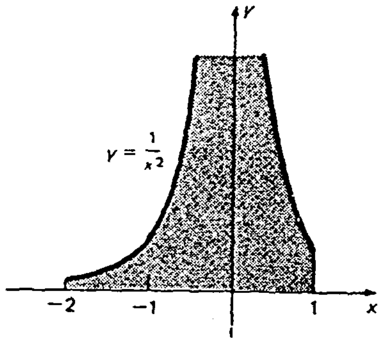
(정의 3) f를 [a, b)에서 연속 $\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$가 존재하여 유한이면 수렴한다고 한다.

그렇지 않으면 발산

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

교사 : 자 그러면 적분구간의 내점에서 무한이 되는 경우가 있습니다.

(예4) $\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$



교사 : 이런 경우는 어떻게 하면 될까요?

학생 : x=0에서 함수는 정의 되지 않습니다.

학생 : x=0을 중심으로 둘로 나누어 생각하면 됩니다.

교사 : 맞습니다.

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \quad : \text{발산}$$

교사 : 여기서 $\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx$는 (예3)의 결과에서 발산임을 알수 있습니다.

교사 : 이런 경우를 정의해 봅시다.

(정의4) f를 a<c<b인 점 c를 제외한 [a, b]에서 연속이라 하고 $\lim_{x \to c} |f(x)| = \infty$라 가정하자.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{이 경우에}$$

$\int_a^c f(x)dx$와 $\int_c^b f(x)dx$가 수렴해야만 위의 적분이 수렴하고 그렇지 않으면 발산합니다.

3. 분 석

1) 목적

본 논문에서 논의 하고자하는 것은 특이 적분을 가르쳐야 한다는 것이 아니다. 특이적분을 가르칠수 있다는 것을 보여주는 것도 아니다. 여기서 논의 하고자 하는 것은 특이적분을 소재로하여 학생들이 수학적 개념을 어떤 방식으로 구성하고 구성한 수학적 개념을 어떤 종류로 확장시켜 나가느냐 하는 것을 구성주의적 관점에서 살펴보고자 하는 것이고 교사는 학생들이 개념을 구성하는 방향을 잡아주고 개념을 확장시켜 나갈 때 학생들에게 필요한 능력 즉 학습의 기술을 육성시키는 방안을 모색하고자 하는 것이다.

2) 학생의 질문

확률밀도함수 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 에서

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ 이란 사실이 한 학생의 호기심을 유발하였다.

나름대로 이 식의 정적분 값이 1이 되는 것이 첫째 의문이었을 것이고 지금까지 정적분의 구간에서는 볼수 없는 -∞, ∞라는 것에 의문이 갔을 것이다.

학생의 질문은 다양한 양상을 보여준다.

용어의 뜻이나 수학적 기호표현을 이해할 수 없을 때, 개념을 잘못 이해할 때, 문제해결의 단계에서 사용된 전략을 이해할 수 없을 때, 각 단계에서 어떤 전략을 써야 할지 모를 때, …

이 질문이 나왔을 때 다른 학생들도 이 질문에 관심이 있었고 몇몇 학생들은 상당히 적극적으로 이 문제에 참여했다. 이런 현상을 지금까지 별로 없었던 일이고 이 질문은 수학적 아이디어와 개념을 학생 스스로 구성하고 확장하는데 고무적인 일이었다.

여기서 수학적 개념구성의 형태에 대해 살펴보자

3) 개념구성의 형태

(1) 구별 - 특이적분이라는 새로운 개념은 존재로부터 나온다.
특이적분이란 개념은 정적분의 일반적 개념으로부터 나온다.

(2) 종류확장 - 특이적분과 정적분이 존재하는 개념이 다르다는 것은 일종의 그럴 것이라는 개념의 경우로 보여지는 것이다.

(3) 재구성 - 여기서 속성의 중요한 변화와 개념이 발생하는 것 사이의 관계는 극한 → 정

적분으로부터 극한 → 특이적분으로 표현할 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{b} \rightarrow \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} \quad or \quad \int_{a}^{\infty} \rightarrow \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b}$$

학생들은 위와같은 새로운 추상적 표현형식에 반영하고 교사는 학생들을 도와 주도록 유도하는데 주목할만한 용어 즉, 무한구간을 갖는 적분, 특이적분이라는 용어를 대응시켜야 한다.

능력평가와 진보에 대한 평가는 다르다.

진보는 내적인식의 작은 단계로부터 일어난다. 교사는 학생 개개인의 진보를 눈으로 관찰할수 없다. 시험에 의한 평가는 능력평가이지 진보에 대한 평가가 아니다.

학생들이 개념적 이해를 처리하려 할 때 그것은 추론의 문제가 된다. 교사는 학생의 개념적 변화에 대한 이해를 학생들이 행하고 말하는 것으로 감지한다. 이것은 오랜 경험을 요한다.

특이적분에 관한 내용은 현행 인문계고등학교 교육과정을 넘어서는 것이다. 따라서 학생들은 이 내용에 관해서 공부한 적이 없다. 대학입시에 무관하기 때문에 참고서에도 언급이 없다. 그러므로 어느 학생도 이 특이적분에 대한 사전지식이 없는 상태이다. 특이적분에 관한 사전지식, 개념이 없으므로 이 분야의 수업은 학생들이 어떻게 새로운 지식, 개념을 받아 들이고 이해를 하는가를 알아보는 좋은 소재라 생각된다.

학생들은 정적분의 계산을 기계적으로 한다. 면적을 구할 때 구분구적법에 의한 극한의 개념을 도입하여 정적분을 정의 하였음을 이미 배웠기 때문에

$\int_{a}^{\infty} \rightarrow \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b}$ 꼴의 변화를 쉽게 이해 하는 듯 하였다.

위 기호 표현을 보고 직관적으로 이해하는 학생이 많은 느낌을 받았다. 구체적으로 조사는 안했지만 개념을 이해 한다는 것과 수학적기호나 식의 표현 변화에 모순이 없음을 직관적으로 인정하는 것과는 차이가 있다고 본다. 학생 개개인이 어떤 방식으로든지 ∞를 다른 문자 b로 대치하여 b를→∞ 보내는 방법적 문제를 학생 스스로 찾을 수 있다는 것은 극한에 관한 지식과 정적분에 관한 지식을 종합적으로 응용할 수 있다는 점이다.

물론 많은 학생들이 한꺼번에 이런 개념을 찾은 것이 아니고 대부분 학생은 표현된 식의 결과를 보고 모순이 없음을 직관적으로 인정한 것으로 파악된다.

특이적분에 관한 내용을 크게 3가지로 구별하여 학생들에게 질문을 하였다.

(i) 적분구간에서 a 혹은 b가 무한인 경우

(ii) 유계가 아닌 피적분함수에서 적분구간의 경계점에서 무한인 경우

(iii) 유계가 아닌 피적분함수에서 적분구간의 내점에서 무한인 경우

(ii)의 경우에서 $\int_{-2}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{1}=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

이런 계산은 언 듯 보기에는 틀림이 없다. 그러나 피적분함수가 구간내에서 무한인 경우이다.

(*ii*)와 (*iii*)의 경우에 해당되는 함수의 예를 학생들은 스스로 찾을 수 있었고 교사의 안내에 의해 특이적분의 정의에 대한 개념을 파악할 수 있었다.

이미 배운 수학적 지식, 극한의 개념과 정적분의 개념을 추측으로 특이적분의 표현방법을 연결시켜주는 것은 수학적 구조이다. 수학적 지식은 내면화된 활동에 대한 반영적 추상화(reflective abstruction)의 결과이다. 수학적 개념은 활동을 전제로 한다. 따라서 항상 학습자의 정신속에서 활동하고 있다.

개념구성의 과정에서 학습자는 수학적 대상에 대해 의미를 부여하고 그 대상으로부터 분리된 수학적 개념은 인지구조를 바탕으로 점진적으로 구성되어진다. 활동은 앞선 좀더 원시적 인지구조를 바탕으로 점진적으로 구성되어진다고 한다. 이러한 피아제의 이론은 모든 지적인 활동은 앞선, 좀 더 원시적 인지구조를 바탕으로 점진적으로 구성되어진다고 한다.

수학적 기호표현을 읽어내고 그 뜻을 파악하고 이것을 다시 다른 기호표현하는 것은 개념을 이끌어 내는 능력이다.

다시말해 $\int_{a}^{\infty} \rightarrow \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b}$ 이 개념을 이끌어 내는 능력.

이것은 문제 해결에 있어서는 중요한 역할을 한다.

4) 교수보다 도움을 주자

개념에 대한 이해와 진보는 연습과 교사의 발문에 이해 평가되어진다. 연습에는 모든 학생이 참여할 수있게 유도해야 한다. 교사의 적절한 발문은 학생의 사고 방향을 결정지어주는 중요한 역할을 한다.

- 어떻게?
- 이와같이 하면 어떨까요?
- 좋은 생각입니다.
- 예를들어 봅시다.

• 그러면 이런경우는 어떻게 되나요?
• 그래프로 나타내 봅시다.
• 같이 해봅시다.
• 왜 그럴까요?

개념은 학생 스스로 구성하는 것이지 교사의 일방적 교수는 별로 도움이 되지 않는다. 학생 스스로가 그들 자신의 흥미에 의해 조사하거나 생각하고 고민하는 것이 개념적 상황을 파악하는데 효과적이다.

발문은 개념에 대한 사고의 폭을 증진시킨다.

대화 형식의 적절한 발문은 많은 학생(가급적 전체)을 수업으로 끌어 들일수 있고 수업활동에 참여함으로 써 학습의 내용뿐 아니라 배우는 방법까지도 배우게 된다.

이 특이적분을 학생들과 공부하면서 시간이 부족하여 다양한 예제를 다루지 못했다. 그리고 특이적분의 다양한 경우의 예는 학생들이 이 내용을 차후 공부할 때 그들이 하면 될 것이다.

많은 예제를 가르친다고 해서 개념이 이해되는 것은 아니다. 한가지 주제(특이적분)에 따르는 다양한 표현(위에서 예시한 각 경우)들 속에서 교사는 학생들에게 정확한 개념을 전달하려고 노력하지만 그것을 수용하고 개념을 이해하는 것은 학생의 몫이다. 학생 스스로 그 개념은 구성하고 자기것을 만드는 데는 학생 나름대로 방법과 절차가 있다. 교사는 획일적으로 이것을 통제하거나 막을 수 없다.

따라서 교사는 학생들이 개념을 스스로 구성할 수 있도록 방향을 지어주고 도와주어야한다.

4. 맺음말

수학과 수학의 응용분야에서 생각해 본 많은 관점들은 현행 교육과정이나 일상생활과 거리가 먼 것들이 많다. 배우려는 동기는 다양한 원인으로부터 나올 수 있다.

교사는 학생의 능력평가만 할 것이 아니라 수학적 개념을 이해하는가에 대한 수학적 진보에 대한 평가도 해야한다. 학생에게 관심있는 문제와 흥미있는 주제를 드러내 놓으면 학생들은 순수한 호기심으로 따라온다. 현명한 교사는 새로운 수학적 지식을 가르칠 때 일방적인 교수 방법보다는 대화를 통해 학생들이 그들 스스로 개념을 이해하고 개념을 재구성할 수 있도록 적절한 발문을 준비해야 한다. 이것은 가르치는 기술을 개발하는 것보다 학생들이 학습하는 기술을 육성시키는데 더 중요한 의미가 있다.

본 수업은 지도방법에 있어서 전체 학생들이 참여 했다고 볼 수 없다. 관심이 많은 특정 학생들을 제외한 무관심한 학생들도 많았다.

특이적분이라는 생소한 내용의 지도에 대해 만족할 만한 결과는 기대할 수 없지만 학생들은 자신들이 이미 배운 지식, 개념을 교사와 연계하여 특이적분에 대한 개념을 대화를 통해 스스로 파악해 가는 것을 볼 수 있었다. 이미 익숙해진 개념에 새로운 개념을 연결하는 것은 기호문자로 표현된 식의 변화에 대한 단순한 절차적 이해라기 보다 극한을 도입할 줄 아는 개념적 지식을 갖고 있다고 판단된다.

적절한 예제를 통해 개념의 일반화를 발견하는 것은 정의를 먼저 내리고 예제를 그 개념에 맞추어 풀이하는 것 보다 훨씬 효과가 있다.

수동적으로 교사로부터 개념적 지식을 받아들이는 것보다 그들 스스로 개념을 발견하고 창조 하도록 도와 주어야 한다. 다시말해 교사는 학생들이 수학적 개념구성을 할수 있도록 도와주고 방향을 제시해 주어야 한다.

적절한 발문은 교사와 학생 학생과 학생들이 개념에 대한 수학적 아이디어를 토론할 수 있도록 고무시키는 중요한 수단이다. 아울러 수학적 개념에 대한 강한 직관을 개발하는 것도 우리 교사의 몫이다.

참 고 문 헌

1) 피아제의 발생학적 인식론과 구조론 (박덕규 민성사 1992)
2) Radical Constructirism : A way of Knowing and Learning (Ernst Von Glasersfeld 1995 The Falmer press)
3) 知識의 構造 (Bruner, 이홍우 1994. 교육과학사)
4) 미분적분학 (Edwin J.Purcell, Dale Varberg 김부윤 외 9명 普成閣 1993)
5) 수학교육학 연구 발표대회 논문집 1994 추계 대한수학교육학회)
6) 수학교육연구 주제 1, 2. 1995, 대한수학교육학회
7) 수학교육학연구발표대회 논문집 1994 춘계, 대한수학교육학회
8) 과학고등학교 수학 Ⅲ 한국교원대학교 1996.
9) 수학교육 프로시딩 제 5집 1997. 한국수학교육학회
10) 박영배 박사학위논문 서울대학교 1996