解法 發生의 連推的 模型
-기존의 폴리아(Polya) 틀에 대한 재해석-

趙 東 浩
(明知女子高等學校敎師)

차 례 :

초 록 :

Cho, Dong Hoh : The Generation Model of Problem Solving as a Reinterpretation on Polya Thesis.

폴리아가 그의 저서 'How to Solve It.'에서 주창한 문제 해결의 모형은 이렇게 해석될 수 있다. 곧, 절대 다수의 수학 문제는 조건문 ($p \to q$)의 명제 형식으로 분해된다는 것이다. 그리하여 순조롭게 발생되는 문제 해법의 전과정은 아래와 같이 마치 징검다리를 놓듯 추이율(transitivity)을 연거퍼 적용하는(이른바 연추적이라 함) 절차이다.

$$(p\text{: 주어진 정보}) \to \cdots \to \cdots \to (\text{구하는 정보: } q)$$

이것은, 일반적으로, 추이율이 성립하는 모든 관계(relation)의 연추적 확인 과정으로 확장될 수 있다. 요컨대 항진식 $(p \to r) \wedge (r \to q) \to (p \to q)$의 보장 아래 관계의 추이율

$$xRz \wedge zRy \to xRy$$

로 연결되는 온갖 경로를 포괄한다. 이상과 같이 정식화되는 이 도식의 한계와 효용은

① 모든 문제가 조건문의 형태를 갖추고 있는 것은 아니며,
② 조건문 형식의 문제라도 해법이 반드시 연추적으로 발생되는 법도 아니고,
③ 더구나 이것이 해법 발생의 만능 열쇠는 아닐 뿐더러,
④ 발상을 촉진하는 데는 교육공학적으로 더 정교한 배려가 필요하므로,
⑤ 초보 단계에서 행동 수정을 위한 치유 목적으로 사용됨이 바람직하다.

1. 문제해결로서의 수학교육과 폴리아의 영향

오늘날 수학교육이 문제해결(problem solving)을 중대한 과제로 인식하기에 이르른 것은 그리 오랜 일이 아니다. 물론, 문제해결의 사고과정을 부분적으로나마 각별하게 인지한 흔적은 아주 오랜 옛날로 거슬러 올라간다. 그러나 이 분야가 하나의 계기를 맞이한 것은 폴리아(George Pólya)가[1] How to

Solve It 이라는 그의 저서 [01]를 출간한 1945년으로 보아서 무리가 없을 것이다. 그것은 불과 50년 전의 일로서 수학교육사에 있어서 하나의 이정표를 세운 사건이었다. 그의 주저 [01~04]들은 압권일 뿐만 아니라 그 영향력은 여전히 압도적이다.

더욱이 폴리아는 첫번째 저술 [01]을 낸 이후 거의 10년이 가까워오던 1954년에 2권의 역저 [02, 03]를 상재(上梓)하였다. 이것들은 전게서 [01]에서 주창된 그의 사상을 더욱더 발전시켜 심화한 것이었다. 그밖에도 그는 몇 권의 다른 저술 [04, 05, 06 등등]을 계속 추가하였다. 폴리아는 적어도 1920년대 이전부터 연구를 거듭하여 이 분야의 업적에 있어서 독보적인 존재로 외로운 길을 개척해 왔다. 그의 연구 논문은 참고문헌에서 그 일부 [07~17]를 보는 바와 같이 모두 30여편 [06, vol.Ⅱ, pp. 184-186 참조]에 달한다. 그리하여 폴리아는 문제해결의 교수·학습 이론에 있어서 가히 대가의 위치에 경도(傾倒)하였다.

폴리아 이전에도 문제해결을 강조하는 수학교육의 목소리가 있었다. 그가 이 분야에 논문을 내기 시작할 무렵 1920년대에도 미국을 중심으로 그러한 운동이 있었다. 뿐만 아니라 이보다 더 멀리 소급되는 사례도 찾아볼 수 있다. 구미 몇 나라의 수학교육은 간헐적으로 또는 줄기차게 문제해결을 강조하여 왔다. 그때마다 폴리아의 노작은 그 한가운데 자리하고 있었다.

지난 50여년 동안 폴리아의 사상은 도처에서 커다란 호응을 불러일으켰다. 그와 그의 저서가 국내에 알려진 것은 1950년대 후반이었다. 그것도 매우 소수의 사람들에게 알려져 있었는데, 초기의 감격과는 달리 겨우 기억에나 오르내리다가 그나마 묻히고 말았다. 이는 그간 한국이 겪어온 수학교육의 실태로 보아 충분히 수긍이 갈만한 일이다. 입시 과열 속에서 해법의 발생은 귀찮은 일이었다.

그런데 문제해결로서의 수학교육 운동이 1980년에 들어서면서 특히 미국을

1) George Pólya (1887~1985): Hungary의 Budapest에서 태어나 독일의 Göttingen 대학에서 수학하였다. 당시 그곳에는 David Hilbert (1862~1943)가 그의 학파(이른바 형식주의 formalism라 후칭)를 주도하고 있었다. 그의 직접 제자는 아니었지만 아주 가까이서 지냈고, 그의 고제 Hermann Weyl(1885~1955)과는 각별한 교유가 있었다. 이차세계대전이 일어나기 수년전에 미국으로 가서 귀화하였다. 미국의 유수한 대학들 곧, Princeton, Brown, Smith College, 그리고 Stanford 대학에서 오랫동안 교수로 재직하였다. 수학의 여러 영역에 걸쳐서 훌륭한 업적을 남겼다. 그의 관심 분야는 함수론, 확률론, 통계학, 그리고 조화론(combinatorics)이었다. 한편, 그는 응용수학의 발전에도 힘썼고 수학적 사고의 양식론에 깊이 천착하여 수학교육의 발전에 크게 공헌하였다. 그는 1963년에 <미국수학협회>의 「수월봉사상」(Distinguished Service Awards for Mathematics)을 받았다. 또한, 1976년에는 미국의 <국립과학원>에 회원으로 선출되기도 했다. 미국의 <공업수학 및 응용수학협회>는 그를 기념하여, combinatoric theory를 탁월하게 응용한 사람에게 주는 상을 제정하고, 이를 매 4년마다 수여해 오고 있다.

중심으로 또다시 부상하였다. 이로써 폴리아는 다시 각광을 받기 시작하였다. 문제해결을 강조하는 분위기는 1980년대 내내 고양되었다.2) 그리고 1990년대에 들어와서는 이전부터 논의되어 오던 전자계산기(computer)와 제휴하게 된다. 근자에 국내에서도 수능시험이라는 입시 전환이 있었고 문제해결은 주목을 받게 되었다.

수학을 가르치고 배우는 기쁨은 없어진지 오래다. 어떻게 해서든지 답만 구하면 된다는 지난 학력고사시대의 분위기는 그야말로 개탄스러웠던 우리의 현실이었다.3) 이 운동은 문제해결의 과정과 발생을 강조한다. 한국과 같이 수학교육이 타락하여 침체의 늪을 헤어나지 못하는 현실을 볼 때, 문제해결을 강조하는 수학교육은 신선한 충격임과 동시에 또한 매우 희망적인 돌파구라 하겠다.

폴리아의 착상은 참으로 고무적인 것이었다. 많은 사람들이 그가 불을 붙인 이른바 "수학하는 정신"에 크게 감동되었다. 그는 문제의 해결 방법을 구하려는 동기에서 출발하였지만, "수학하는 심상"이라는 수학교육과 수리철학에 걸친 중대한 주제를 건드리게 된다. 수학자들이 보통 "수학의 방법"이라고 말할 때 그것은 공리계를 세우고 수학의 이론을 연역적으로 축조해 나아가는 방식을 뜻했었다. 그러나 폴리아는 반대로, 만들어지고 있는 도정의 수학, 곧 그의 표현을 빌리면 "발생 상대 그대로의(in statu nascendi)" 수학을 들추어 내었던 것이다. [01의 초판 서문을 참조]

그간 이 분야에 관심을 가진 후진들의 연구는, 그러나, 대단한 노력과 방대한 문헌의 적집에도 불구하고 폴리아의 울타리를 벗어나지 못하는 것들이었다. 이를테면 Leone Burton [30], K. J. Travers [28], R. J. Jensen [32], M. Zweng [23], Alan H. Schoenfeld [33] 등등의 주장들은 모두 폴리아의 아류에 지나지 않는다. 이 분야에 가장 열심인 학자는 Schoenfeld 일 것이다. 그의 왕성한 저작 [33~39를 포함하여 30 여편의 저서, 논문, 기고문] 활동으로 보아 이 점을 인정해 줄만 하지만, 역시 폴리아의 그늘 아래를 벗어나지 못하고

---

2) 참고문헌 [24, 25, 26]을 보라. 먼저 [25, p. xiv]에서 Krulik(1980)은 80년대 미국 수학교육의 주제는 문제해결이 될 것임을 예견했다. 또한 NCTM 1980년 연감 [24, p. 1]에서도 문제해결이 규범수학(school mathematics)의 초점이 되어야 한다고 주장한다. 마침내 1989년 [26]에서 문제해결로서의 수학교육에 걸맞도록 측정과 평가의 기준을 일신하여야 한다는 소위 평가기준(evaluation standards)이 나오게 된다. 이와 같이 1980년대 이래 성행하여 오고 있는 문제해결로서의 수학교육 운동은, 지난 1970년대 말까지 좌절에 빠져있던 수학교육의 현대화운동에 대한 반동으로 일어났다고 볼 수 있다.

3) 요사이라고 해서 크게 달라진 바는 없지만, 당시에는 정의를 음미한다든가 정리를 증명하는 일은 거의 없고, "이러한 문제는 이렇게 푼다"는 식의 수업과, 유형별 문제풀이의 반복 연습이 광적으로 성행하였다. 그래서 "수학은 몰라도 문제만 풀면 된다"는 말과 "풀이는 이해하지 못해도 답만 구하면 된다"는 말이 유행하였다.

있으며, 혼란만 가중시키고 있는 느낌마저 준다.

Schoenfeld는 주로 제반 개념을 확립하는 데 주력하고 있는 것 같다. 그는 초기에 대학 수학의 문제해결 모형을 손질한 일[33, 34]이 있다. 문제해결이 3단계 전략(?)을 통하여 이루어지는지 또는 5단계 책략(?)을 통해서 이루어지는지는 중요한 관건이 아니다. 이들이 개량한 문제해결의 모형은 모두가 폴리아처럼 내포적 원리와 연계된 것이 아니라는 데에 문제가 있다. 뿐만 아니라 이들의 장광설은 폴리아의 논지 그 자체를 잘못 이해하고 있다는 사실에 문제의 심각성이 있다. 문제해결의 소위 "4단계 방략" 운운하는 방식으로 이해하는 한, 이론과 실제에 걸쳐서 중요한 요소는 다 빠져 나가고 만다.

폴리아를 제외하고 이 분야에 한 고전을 더해준 수학자는 Jacques S. Hadamard(1865~1963)이다. 그는 그의 유명한 저서 [19]에서 수학자의 창조적 사고의 양모(mechanism)를 규명해 보려고 했다. 수학의 탐구 또는 창조의 과정에 작동되는 심상이란 연역적 추론의 전(前)단계를 통합적으로 파악하게 하여 주는 직관적 기능을 의미한다. 그것은, 이미 화석화된 수학 개념에 의지하는 표상적 언어를 통하여 이루어진다기 보다는, 다분히 상징적 언어를 통하여 이루어진다. 논리나 체계의 구성은 직관적 심상이 발견 또는 발명한 것을 객관성의 확보를 위하여 재구성하는 후속 작업에 불과하다고 그는 말한다.

이상과 같이 주장한 아다마의 입장은 폴리아가 말하는 "증명이란 직관이 얻어낸 발명을 추인하는 작업"이라는 그것과 일맥 상통한다. 이 점은 수학자들의 한결같은 고백이기도 하다. 아다마 이외의 학자를 하나 더 꼽는다면 Imre Lakatos(1922~1974)를 들어야 할 것이다. 그는 그의 박사학위 논문이기도 했던 저서 [42]에서,4) 수학적 창조가 어떠한 발생의 경로를 따라서 이루어지는지, 오일러(Euler)의 다면체 정리를 주제로 택하여 대화 형식으로 논의하고 있다. 그래서 이상의 3사람을 빼고 이 분야를 연구한 지금까지의 연구 성과는 모두 유명한 수학자들 가령 Henri Poincaré(1854~1912)의 간단한 경구보다도 못하다.

일련의 논저를 통하여 폴리아가 진정으로 의도한 바는 무엇이었는가? 그것은 때때로 왜 오해를 낳는가? 그것은 어느 정도의 타당성을 가지는가? 자신의 이론을 자신이 심도있게 이해하고 있었겠지만, 그가 살리려고 한 사상을 자신이 충분히 발전시켰다고 볼 수 있는가? 폴리아의 문제해결 모형 또는 해법 발생 장치는 어떠한 적용 범위를 가지는가? 또한 그것의 한계는 무엇인가? 그리고 폴리아의 문제해결 모형은 어떠한 효용이 있는 것인가? 이상과 같은 의문을 해소하는 길은 폴리아의 사상과 그의 발명품을 제대로 이해하는 일이다.

---

4) 아다마는 불란서 태생인데 일차대전에 두 아들을 잃고 이차대전 때에는 미국으로 망명하여 바로 이 책 <수학 분야에서의 발명의 심리학>을 출간하였다. 불어판은 *Essai sur la Psychologie de L'invention dans le Domaine Mathématique*, Paris: Gauthier Villars, 1975. 이다. 한편, 라카토스는 헝가리 태생의 유대인으로서 1956년 영국으로 망명하여 Cambridge 대학에서 수리철학을 전공, K. Popper와 G. Polya로부터 강한 영향을 받았다.

이렇게 하면, 폴리아의 도구가 매우 좋으면서도 실제로 거의 활용하지 못하는 이유도 알 수 있게 될 것이다.

2. Polya 의 How to Solve It 과 문제해결 모형의 발단

폴리아의 저서 [01] 곧, "문제해결방법"5)은 어떻게 구성되어 있는가? 이 책은 묘하게 편집되어 있어서 전체적으로는 균형이 맞지 않는다는 느낌을 준다. 모두 4개의 부분(part)으로 짜여져 있지만 제3부가 이 책의 전부라고 해도 좋을 만큼 기형적으로 분량이 많다.

이 책은, 목차 바로 다음으로 본문에 들어가기 앞서서 문제해결의 방침을 제시하고 있다. 단 2쪽의 이것은 이 책의 결론으로서 세칭 문제해결의 "4단계 전략"이라 불리우는 바로 그것이다. 그 요목은 다음과 같은데 세부적으로는 여러 가지 권고사항이 제시되어 있다. 그는 이 부분을 줄곧 "목록(list)"이라고 부른다.

첫째(1) 문제의 이해(understanding the problem)
둘째(2) 풀이의 고안(devising a plan)
셋째(3) 계획의 수행(carrying out the plan)
넷째(4) 풀이의 반성(looking back)

먼저 제1부는 교실에서 문제해결을 지도하는 데 교사가 유의해야 할 일이다. 학생을 도와 스스로 알아내도록 발상을 유도하고 촉진하는 발문, 권고, 예시 등등을 언급하였다. 제2부에서도 문답식 대화를 제시하고 있다. 처음부터 여기까지는 모두 36 쪽의 분량으로서 이 책 전체의 총면수 253 쪽에 비하여 겨우 14.23% 에 불과하다. 이것들은 이를테면 곧, 4단계 방략의 개괄이라 볼 수도 있다.

이어서 제3부는 "발견술(heuristic dictionary) 소사전"이라는 제목 아래 이 책의 본론을 이룬다. 이 부분은 196 쪽의 분량으로서 전체의 77.47% 를 차지한다. 모두 67 개의 표제어 항목을 수록하고 사전의 형식을 갖추어 자모순(alphabetical order)으로 배열했다. 각 표제항목에는 때로 소항목을 몇 개 주고 많은 세부 권고사항을 적절한 실례와 함께 제시하기도 했다. 제4부는 21쪽 분량으로 전체의 8.3%로서 20문항의 연습문제와 그 힌트, 풀이 및 해답이다.

그러면 폴리아가 이 책을 통하여 펴고자 한 논지는 무엇인가? 오랜 경험에 의하면, 많은 수학문제의 해결은 대체로 이러이러한 수순을 밟아서 해결된다는 것이 그 요지가 아닐까? 문제를 이해하지도 못하고서는 한걸음도 나아갈 수 없으며, 이해한 다음에는 문제의 해법을 만들어 내어야 하고, 그 계획대로 수행함으로써 마침내 답을 얻고, 과정과 결과를 전체적으로 되짚어 본다는 것이다. 폴리아는 그의 책 [01]의 제1부 4절에서 이렇게 말한다.

5) 한국어로 번역되어 이미 3판을 거듭했다. 우정호(역), 어떻게 문제를 풀 것인가. 서울: 천재교육사(주), 1986(초판), 1989(재판), 1990(삼판).

"목록의 발문과 권고는 일반적인 것이기는 하지만, 그것들은 자연스럽고, 단순하고, 명백하며 평이한 상식으로부터 나온 것이다." 6)

그는 겸손하게도 자신의 주창이 결코 대단한 압출이 아님을 명백히 하고 있다. 또 같은 곳에서 그는 거듭 말한다. "목록은, 평이한 상식에 지나지 않는 것을 일반적인 술어로 진술한 것이다. 그것은 자신에게 주어진 문제를 신중하게 생각하고 있는 어느 정도 상식을 가진 사람이라면, 누구에게나 자연스럽게 일어나는 어떤 사고행위를 암시하고 있다."7) 바로 이 점이 그가 많은 사람들에게 호소력있게 공감을 불러 일으키는 소이라 하겠다.

첫째로 문제를 이해하여야 한다는 지침은 너무나 상식적이다. 그러면 어떻게 하는 일이 문제를 이해한다는 말인가? 읽고 또 읽어서 숙지하는 법이라고 한다면 막연한 이야기가 된다. 그가 문제를 외우라고 말하지 않는 것은 참으로 다행한 일이다. 그는 이렇게 말한다. "미지의 사항은 무엇인가? 자료는 무엇인가? 그리고 조건은 무엇인가?" 이어서, 조건과 자료는 답을 구하기에 충분한가, 모자라는가, 아니면 넘치는가를 보라고 권한다.

목록은 또 그림을 그리라고 말한다. 기하문제가 아니더라도 그림을 그리는 일은 문제의 이해를 도울 뿐 아니라 해법의 실마리를 얻어내는 데 적지 않은 도움을 준다. 도해나 표를 만드는 일도 마찬가지로 바람직하다. 이러한 경구들은 그의 탁월한 일면이다. 해결자가 문제의 내용에 얼마큼 눈을 익혔는가는 매우 개인적인 사정으로서 이를 지침이라고까지 말할 수는 없다. 이해의 중요한 관건은 주어진 정보와 구하는 정보를 갈라 놓는 일이다. 이것은 대부분의 문제가 그와 같이 구성되어 있음을 전제로 한다.

"이들 질문은 일반적으로 적용될 수 있는 것으로 어떠한 종류의 문제를 다룰 때에도 매우 효과적으로 제기될 수 있다. 이들의 활용은 어떤 특정한 주제에 한정되지 않는다. 그것이 대수적 문제이건, 기하학적 문제이건, 수학적 문제이건, 비수학적 문제이건, 이론적인 문제이건, 실제적인 문제이건, 중대한 문제이건, 단순한 수수께끼이건 관계없이 이들 발문은 의미가 있으며, 문제를 푸는 데 도움이 될 것이다."8)

이상은 폴리아의 말인데, 거의 모든 문제가 주어진 정보와 구하는 정보로

---

6) [01]의 p. 3, ll. 4-7: The questions and suggestions of our list are general, but, except for their generality, they are natural, simple, obvious, and proceed from plain common sense.

7) 전게서 [01]의 같은 곳: ll. 23-31을 참조.

8) [01]의 제1부 3절(일반성: Generality) p. 2의 본문 문단 ll. 4-11. (우정호 교수 번역으로 옮김)

짜여져 있음을 강력하게 시사하고 있다. 이어서 그는 목록의 발문이나 권고 중 어떤 것은 "답을 구하는 문제"에만 적합하고 증명문제에는 적합하지 않을 수도 있음을 덧붙이고 있다.[9] 답을 구하는 문제를 가리켜 **구**답문제라 하고 이와 다른 유형인 증명문제와 비교하여 보자. 물론 폴리아의 말은 옳지만, 구답문제는 모두 증명문제로 변형될 수 있다는 사실을 그는 놓치고 있다.

(문제1) $a+b=3$ 이고 $ab=4$ 일 때 a^2+b^2 은 얼마인가?

(풀이) $a+b=3 \wedge ab=4 \rightarrow a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab$
$$= 3^2-2\cdot 4$$
$$= 9-8 = 1$$

$\rightarrow a^2+b^2 = 1$ ········· (답)

(문제2) $a+b=3$ 이고 $ab=4$ 일 때 $a^2+b^2=1$ 임을 밝혀라.

위의 두 문제는 동치이다. 아무런 전제도 없이 답을 구하라는 문제는 없는 법이므로, 모든 구답문제는 주어진 정보와 구하는 정보로 양분되어 있다. 그래서 구답문제는 모두 조건문($p\rightarrow q$) 형식의 증명문제로 변형된다. 가령 "이러이러한 조건을 만족하도록 상수 a, b, c를 결정하라"는 문제도 적절한 동치문장($p\leftrightarrow q$)으로 고칠 수 있으므로 역시 증명문제이기는 마찬가지이다.

폴리아가 "조건(condition)은 무엇인가?"라고 말할 때, 조건은 넓은 의미로 정보의 일부분이다. 그가 말하는 조건은 미지의 정보에만 제한을 가하는 것이 아니고 때로는 주어진 정보를 제한하기도 한다. 또는 문제 전체를 수식하기도 하므로 정보의 범주에 넣어 이해함이 좋다.

뿐만 아니라 작도문제를 상기해 보자. 이것은 구답문제이면서 동시에 증명문제가 아니던가?! 이들은 형태적으로 구별이 되는 것이지만, 구답문제나 증명문제 또는 작도문제를 가릴 것 없이 폴리아의 발문과 권고사항이 두루 적용되기는 마찬가지이다. 그는 이 점을 다른 곳에서 언급했다. 곧, "증명문제의 주요 부분은 가정과 결론이며 대응되는 발문은 다음과 같다. '가정은 무엇인가?' 그리고 '결론은 무엇인가?'"[10]

그런데 여기에서, 증명문제가 모두 가정(hypothesis)과 결론(conclusion)으로 양분되어 있지는 않다는 사실에 유념해야만 하겠다. 그 자신이 다른 곳에서 밝히고 있지만 이 사실을 폴리아가 모를 리가 없다. 그의 말을 직접 들어보

9) 전게서 위와 같은 곳 아래서 3행 및 p. 3의 3행. 또한 제3부의 표제항목(Modern heuristic): p. 131의 마지막 문단을 참조.

10) [01]의 p. 156 제3부 소항목 6의 처음 1행에서 7행까지 참조. 또는 제3부 p. 215의 3행에서 7행까지 참조.

자. "모든 증명문제가 자연스럽게 가정과 결론으로 분리되지는 않는다. 이를테면 '소수는 무한히 많다'는 정리는 그와 같이 나뉘어질 수 없다."[11] 여기에서 '자연스럽게'라는 말은 다음과 같은 억지가 아니라는 뜻이다.

$$p \leftrightarrow p \vee p \leftrightarrow \sim(\sim p) \vee p \leftrightarrow (\sim p \rightarrow p)$$

요컨대 증명문제라 할지라도 그것이 조건문($p \rightarrow q$)의 형태라야지만 폴리아의 모형은 효력을 가지게 된다. 이것은 지극히 당연한 이야기이다. 이 점은 폴리아의 문제해결 모형이 가지는 한계라 하겠다. 덧붙여서, 폴리아는 그의 문제해결 모형을 전개함에 있어서 주로 구답문제를 염두에 두고 엮어 나갔지 않았나 추측된다. 그러나 그는 제3부에서 증명에 관한 언급을 빠트리지 않음으로써 이를 보완하려고 애썼다.

3. 폴리아의 문제해결 모형과 해법 발생의 원리

이제 둘째로 '풀이의 계획을 세우기(devising a plan)'에 관하여 살펴보자. 폴리아는 주어진 정보와 구하는 정보(미지의 사항) 사이에 어떤 연관을 찾아내라고 말한다. 그는 아이디어의 발생을 촉진하도록 해주는 수많은 발문과 권고사항을 제시한다. 이 작업은 무슨 일을 어떻게 하는 것인가? 폴리아 자신의 설명은 이렇다.

> "해결되지 않은(풀어야 할) 문제는 주어진 정보와 구하는 정보 사이에 놓여 있는 빈 공간으로 비유될 수 있다. 그래서 풀이의 방법을 찾아내는 일은 마치 이 빈 공백을 가로지르는 다리를 놓는 일과 같다. 다리를 건설하는 일은 미지의 것이나 자료(주어진 정보) 중 어느 쪽으로부터 시작해도 좋다."[12]

이상은 문제의 이해라는 과정에서 밝힌 사실과 잘 어울리는 말이다. 우리는 앞에서 폴리아가 말하는 자료와 미지 사항 곧, 문제를 '주어진 정보'와 '구하는 정보'로 나누었다. 그 다음 과정은 이들 두 정보를 연결시키는 고리를

---

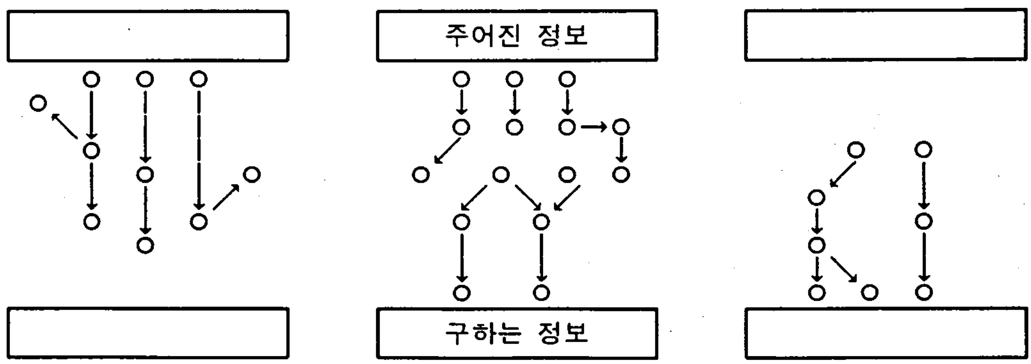
11) [01]의 제3부 표제항목(Problems to find, problems to prove) p. 155의 소항목 4의 괄호 부분을 참조. [Not all mathematical theorems can be split naturally into hypothesis and conclusion. Thus, it is scarcely possible to split so the theorem: "There are an infinity of prime numbers."]

12) [01]의 p. 73 제3부 표제항목(Could you drive something useful from the data?)에서 3행부터: "We may represent our unsolved problem as open space between the data and the unknown, as a gap across which we have to construct a bridge. We can start constructing our bridge from either side, from the unknown or from the data."

찾아내는 일이다. 이것이 바로 폴리아가 주창한 모형의 핵심 부분이다.
이어서 그는 말한다. 주어진 정보로부터 새로운 정보를 이끌어내라. 물론 유용한 것으로 말이다. 그리고 거꾸로 미지 사항(구하는 정보)이 결정되려면 무엇이 필요한가를 살펴서 거슬러 올라가라. 이것이야말로 다리를 놓는 일이다. 폴리아는 그의 방략 목록에서 다음과 같이 말한다.

> "조건 가운데 일부만 남기고 다른 것은 잠시 잊으라. 그랬을 때 미지인 것이 결정되기에는 얼마나 멀리 떨어져 있는가?
> ……………
> 미지 사항이나 주어진 자료를 변형할 수 있는가? 필요하면 양자 모두 변형하라. 그랬을 때 새로운 미지 사항과 새로운(유도된) 정보는 서로 얼마나 가까워졌는가?"
>
> (목록 p. xvii에서 필자 의역)

폴리아는 위와 같이 사고를 진전시킴에 있어서 유효 적절한 권고사항과 발문을 충분히 제시하였다. 이 가운데서 특히 "거꾸로 챙겨 오르기"(working backwards)를 강조한 점은 폴리아의 공적으로 돌림직하다. 그는 이 방법의 유래를 고대 희랍의 수학자 Pappus(A.D. 300 경)에게서 찾아내었다. 이 점은 인간에게 깊이 도사린 심리적 편향성과 관련하여 설명될 수 있다.
누구나 주어진 자료에만 매달려 새로운 정보를 얻어내려고 하는 강한 경향이 있다. 다리 놓는 비유를 상기해 보아라. 다리는 강의 양안 중 어디서든지 먼저 시공함으로써 마지막에 제일 어려운 곳에서 마친다. 실제로 공사하기에 쉬운 곳에서부터 교각을 세우는 법이다. 수심이 깊은 곳은 피하고 모래언덕(사주) 같은 곳을 찾아서 공사를 시작한다. 그런데 사람들은 이와 같이 평범한 진리를 종종 망각한다.



수학문제는, 폴리아의 모형이 적용될 수 있는 형태의 경우, 위와 같이 극단적인 좌우의 해법 발생 형태와 가운데처럼 양쪽에서 연결시킬 수 있는 형태를 생각해 볼 수 있다. 이에 대한 적절한 실례는 폴리아가 충분히 제시하였다. 그 가운데 유명한 것으로는, 원통용기에 소정량의 물을 담아내라는 문제가 있다.

가령 3ℓ들이 그릇과 7ℓ들이 그릇 2개만 가지고 1ℓ에서 10ℓ까지 구하는 수순을 얻어 내라는 문제가 그것이다. 물론 원통모양의 그릇엔 눈금도 없고 자를 써서도 안된다. 구하기 쉬운 것도 있고 거꾸로 챙겨 거슬러 올라야 구해지는 것도 있다. 여기에서 해결자는 상당한 정보를 시행착오로 얻는 일이 보통이다.

(문제3) 3ℓ들이와 7ℓ들이만으로 0.5ℓ의 물을 얻을 수 있을까?
있다면 그 방법은?

제1부에서 보기로 제시된 직육면체의 대각선의 길이를 구하는 문제도 아주 썩 좋은 예이다. 폴리아는 학생과 교사와의 대화 형식을 빌어 이 보기를 매우 길게 이끌고 나아간다. 실제로 일어날 수 있는 사고의 주요 진행 과정을 보여 주려고 의도한 것이다. 이것을 폴리아의 관점과는 다르게 다음과 같이 변형하여 보기로 한다.

(문제4) 종이 한 장과 눈금이 있는 자 한 개, 그리고 연필 한 자루가 책상 위에 놓여 있다. 여기에 직육면체 모양의 통나무 목침이 있다. 그 대각선의 길이를 구하여라.

(풀이1) $D = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (60점/100점)

(풀이2) $D = \sqrt{c^2+d^2}$ (70점/100점)

(풀이3) 평행이동을 써서 직접재기 (100점)

위 문제에 임하여 해결자는 종이 위에 계산하고 싶다는 유혹에 이끌리기 쉽다. 실제로 풀이(1)과 풀이(2)처럼 a, b, c 또는 d를 자로 잰 다음 수치 계산을 하여 얻을 수도 있다. 그러나, 종이나 책상은 모두 평면을 상징한다고 생각해 보자. 자는 직선을 그을 수 있는 도구이고 이 경우는 길이를 잴 수도 있다. 그래서 직선을 길게 긋고 이를 따라 목침의 한 모서리를 평행이동할 수 있다. 이제 대각선의 길이를 직접 잴 수 있겠는가? 오른쪽의 점수는 필자의 채점이다.

(문제5) 집합 $S=\{x \in R: -1 < x < 1\}$는 다음과 같은 조작에 관하여 닫혀있음을 보여라.

$$a \circ b = \frac{a+b}{1+ab}$$

요컨대 위의 조작(∘)이 S에서 연산이 됨을 밝혀라. 곧,

$$a,\ b \in S \rightarrow a \circ b \in S$$

위 문제는, 가정으로부터 결론쪽으로 연결고리를 찾아가기 보다는 반대로, 결론에서부터 거슬러 올라와야 용이하게 해결되는 한 보기이다. 그리하여 거의 가정의 바로 코 밑에까지 이르렀을 때가 되어야지만 가정을 변형할 수 있다. 이것은 아주 극단적인 본보기가 될 것이다. 위 증명이 해결되어야만 S가 주어진 연산에 관하여 군(group)을 이룸을 보일 수가 있다.

폴리아의 문제해결 모형은 어떠한 타당성을 가지는가? 이를 논리적으로 해명해 보기로 한다. 그는 [01]은 물론 [02]나 [03] 또는 [04]에서도, 그밖의 어떤 다른 저서에서도 이 점을 분명히 밝히지는 않았다. 그러나 그가 암시적으로 제시한 여러 비유를 살펴보면 충분한 타당성의 근거를 찾아볼 수 있다. 그것은 이미 앞에서 노출되었다. 요컨대, 핵심은 추이율(transitivity)을 연거퍼 적용하여 나아가는 절차이다. 이와 같은 증명의 방법 또는 해법 발생의 방법을 연추법(連推法)이라 부르기로 한다.

(p: 주어진 정보) $\rightarrow r_1$ $\rightarrow r_2$ $\rightarrow r_3$ $\vdots$ $\rightarrow r_n \rightarrow$ (구하는 정보: q)

다시 말하자면 폴리아의 틀은 '연추적 모형'이라는 명칭으로 특징지워질 수 있다. 더욱더 중요한 비밀은 연추법이 여기에서 멈추지 않는다는 사실이다. 명제 논리의 추이율 $[(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)]$ 뿐만이 아니라 이것을 포괄하여, 일반적으로, 추이율을 만족하는 모든 관계(relation)의 연추적 절차로 확장될 수 있다. 연추법은 관계이기만 하면 반드시 추이율이 성립하지 않더라도 관련 정리 또는 정의, 그리고 반사율(xRx) 또는 대칭률(xRy→yRx)을 쓰는 변형 절차까지도 포괄한다. 부분적으로 사용하든 전체적으로 사용하든 상관이 없다. 여러 관계의 추이율이 혼용되더라도 마찬가지이다. 곧, 임의의 관계 R에 관하여

$$xRz \wedge zRy \rightarrow xRy$$

(문제6) 덧셈에 관한 복소수의 상쇄율을 증명하라.

$$a+c = b+c \rightarrow a = b$$

(증명) $a+c = b+c \rightarrow a = a + o = a + \{c+(-c)\}$
$= (a+c) + (-c)$
$= (b+c) + (-c)$
$= b + \{c+(-c)\} = b + o = b$
$\rightarrow a = b$

조건문이 아니더라도 관계의 법칙들을 연거퍼 적용하여 두 변항 사이의 관계를 입증하는 절차도 역시 연추법이다. 그리고 이것도 역시 폴리아 모형이 말하는 해법 발생의 원리를 따르는 예이다. 가령 등식이 성립함을 증명하는데 좌변에서 우변을 이끌어냄으로써 완결한다. 또는 우변에서 좌변을 유도하여도 좋으며, 좌우 각각을 제3의 수식으로 이끌고 가는 방법도 또한 이에 해당된다.

(문제7) 임의의 실수 x, y에 대하여 다음이 성립함을 증명하라.

$$\sin(x+y)\ \sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$$

(증명)(좌변) $= (\sin x\cos y+\cos x\sin y)(\sin x\cos y-\cos x\sin y)$
$= \sin^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\sin^2 y$
$= (1-\cos^2 x)\cos^2 y - \cos^2 x\sin^2 y$
$= \cos^2 y-\cos^2 x(\cos^2 y+\sin^2 y) =$ (우변)

이상은 등호의 추이율이 계속 적용되고 있는 것으로 이해되어야 한다. 부등식도 마찬가지이며, 그밖에 어떤 관계라도 이러한 증명 절차는 모두 연추법이다. 관계는 반드시 동치관계(equivalence relation)라야 하는 것은 아니다. 물론 이러한 증명이 사용되기로는 동치관계의 실례가 가장 많다. 쌍조건문(biconditional)도 하나의 동치관계이다. 다음 문제를 살펴보자.

(문제8) 임의의 실수 c와 임의의 행렬 A 및 같은 크기의 영행렬 0에 대하여 다음이 성립함을 증명하라.

$$cA=0 \leftrightarrow c=o \vee A=0$$

(증명) $cA=0 \leftrightarrow (cA)_{ij} = 0_{ij}$
$\leftrightarrow c \cdot A_{ij} = o$

$$\leftrightarrow c=o \vee A_{ij} = o$$
$$\leftrightarrow c=o \vee A_{ij} = 0_{ij} \leftrightarrow c=o \vee A=0$$

4. 연추적 문제해결 모형의 범위와 그 한계 및 효용

앞에서 논의된 바와 같이 정식화되는 폴리아의 틀은 타당성이 논리적으로 보장되어 있는 매우 도식적인 문제해결 모형이다. 그의 업적을 과찬하는 일도 좋지 않지만 그의 사상을 바르게 알지 못하는 처사는 참으로 애석한 일이다. 폴리아의 목록을 "문제해결의 4단계 전략" 운운하면서, 혹자는 3단계 또는 5단계의 전략을 들고 나온다. 이렇게 하게 되면 서 그가 주창한 내포적 연계성은 묻혀버리고 만다. 이제 폴리아 모형의 범위와 한계가 윤곽을 들어냈으므로, 그 효용 가치와 함께 비평을 모아 종합적으로 논평하여 보기로 한다.

(1) 절대 다수의 빈도로 다루어지는 수학문제는 조건문의 명제형식을 갖추고 있으나 모든 문제가 다 그러한 것은 아니다. 이 점은 폴리아가 명백히 인지하고 있었고 앞에서 일부 논의되었다. 모든 구답문제와 조건문 형식의 증명문제에 한하여 연추적 해법이 가능하다. 구답문제와 조건문 형식의 증명문제를 제외하고는 수학문제가 없는가 하는 것인데 그 대답은 '그렇지 않다'이다.

우선 증명문제에는 조건문 형식이 아닌 것들이 너무나 많다. 구답문제, 증명문제, 그리고 작도문제와 같은 유형을 제외하면 어떤 형태의 문제가 있는가?! 물론 있다. 이를테면 "인수분해의 앨거리듬은?" 이라든가 "모든 미분방정식의 해법 수순은?" 과 같은 문제를 들 수 있다. 이들은 앞서의 문제들과는 규모와 성질이 다를 뿐만 아니라 위계도 다른 문제들이다.

게다가 각종의 수수께끼 문제라든가 재치문답과 같은 류의 문제들을 살펴보라. 문제의 차원은 방대하고 폴리아의 해법 모형이 적용되지 않는 문제들이 의외로 많다는 사실을 알 수 있다. 일반의 인식과는 달리 수수께끼는 교육적으로 매우 고무적인 문제들이다. 그것이 재치문답(nonsense quiz)이라 해도, 기지와 해학을 즐기게 함으로써 긴장을 풀어준다. 뿐만 아니라 상상력을 풍요하게 하고, 창의력을 촉발시키는 효험이 있다.

(문제9) 성냥개비 4개를 써서 정삼각형을 2개 만들어 보아라.
단, 성냥개비를 자르거나 일부만을 사용해서는 안된다.

그렇다면 수학문제란 무엇인가? 그것을 정의할 수 있는가? 가령 십자말잇기(crossword puzzle), 장기나 바둑에서 제기됨직한 문제들, 그밖에도 그 특징을 규명하기도 조잡한 문제들을 상기하여 보아라. 그것은 어려운 일이지만, 필요한 일이 아닐지도 모른다. 폴리아 자신이 언급한 "문제를 푼다는 것은

알려지지 않은 방법을 숨겨진 결과에서 찾는 일이다"라고 한 말은 그가 주로 구답문제만을 가리키는 것 같고, 따라서 이것을 문제에 대한 정의로 보기에는 마땅하지 않을 뿐만 아니라, 그렇다고 문제해결의 정의로 보기도 어렵다.

(2) 구답문제 또는 조건문 형식의 증명문제라 할지라도 해법이 반드시 연추적 경로를 따라서 발생되는 법도 아니다. 이점은 사소하고 뻔한(trivial) 이야기이다. 가령 조건문($p \to q$) 형식의 증명문제가 추이율을 계속적으로 적용하는 절차만으로는 여의치 않기 때문에 때로 이른바 대우($\sim q \to \sim p$)를 증명하는 것이다. 물론 이 경우 또다시 연추법을 쓰기도 하겠지만, 가령 조건문 형식의 전칭명제가 거짓임을 증명하는 데는 반례만 하나 들어 보이면 충분할 것이다.

연추법이란 예시법, 분증법 등등 여러 갈래의 직접증명법 가운데 하나에 지나지 않는다. 뿐만 아니라 대단히 많은 간접증명법이 있다. 자주 쓰이면서 아주 요긴하기도 한 이른바 귀류법(모순법, 배리법)을 상기해 보자. 다음과 같이 조건문을 부정하여 얻은 ($p \wedge \sim q$)로부터 하나의 모순($r \wedge \sim r$)을 이끌어 내면 증명이 완결된다. 조건문을 귀류법으로 증명하는 절차를 보이면 다음과 같다.

$$\sim(p \to q) \to (p \wedge \sim q) \to (r \wedge \sim r)$$

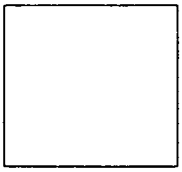
귀류법 말고도 간접증명으로서는 전환법, 동일법 등등이 있다. 필자는 오래전에, 증명의 방법들을 조사하여 정식화하고 분류한 결과 다음에서 보는 바와 같이 모두 18가지가 있음을 확인한 바 있다(문헌 [41] 참조). 아래에서 연추법의 위치를 알아볼 수 있을 것이다. 조건문이라도 연추법으로 증명되는 것들은 비교적 까다롭지 않은 문제들이다.

01) 예시법(例示法)	07) 귀납법(歸納法)	13) 인우법(引偶法)
02) 분증법(分證法)	08) 삼단법(三段法)	14) 치환법(置換法)
03) 격출법(格出法)	09) 한추법(限推法)	15) 전환법(轉換法)
04) 첨삭법(添削法)	10) 제위법(除僞法)	16) 동일법(同一法)
05) 연추법(連推法)	11) 반언법(反言法)	17) 환위법(換位法)
06) 양도법(兩刀法)	12) 귀류법(歸謬法)	18) 환질법(換質法)

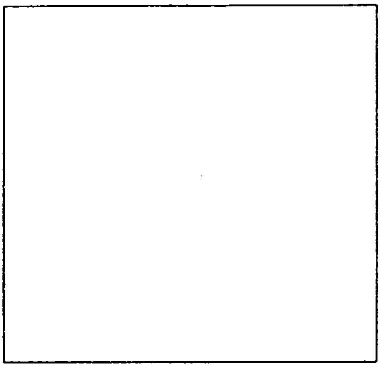
(3) 폴리아의 문제해결 모형은 그것이 적용 가능한 문제에 대해서일지라도 반드시 그 해결을 보장하는 이른바 만능의 주문이 아니다. 그가 제시한 발문과 수많은 권고 사항이 보여주듯이 어디까지나 발상을 촉진하는 효능이 있을 뿐이다. 그의 설명대로 heuristic이라는 말은 serving to discover라는 뜻이다. 수학교실에서는 아주 어려운 학생과 조우하는 일이 많은데, 폴리아의 처방이 당장 치료 효과를 드러낼 것이라 기대하는 것은 무리이다.

연추적으로 발생되는 해법 가운데 어떤 것들은 그 짜임새가 번거롭고 아주

매마르다는 느낌을 주는 때가 있다. 이런 때는 종종 더 우아한 해법이 따로 있는 법이다. 윤택한 해법이 얻어지는 일은 매우 돌발적이고 독창적인 산물일 경우가 많다. 가령 앞에서 제시된 문제 3과 문제 4의 해법을 보면 그 특징을 엿볼 수 있을 것이다. 이러한 사실도 바로 연추적 발상의 한계라고 하겠다.



(고대 희랍)



(고대 중국)

예컨대 피타고라스(Pythagoras)의 정리를 증명하는 전형적인 두 방법을 살펴보자. 유우크릿(Eukleides, Eudid)의 <기하학 원론>으로부터 전래된 방법은 연추적 발생에 의존한 결과이다. 위의 두 그림을 보라. 이것보다 옛날 중국인들의 증명은 얼마나 우아한가! 이것은 고대 중국의 한 전설적인 고전인 <주비산경>에 나와 있는 증명법이다. 이상의 둘은 아주 좋은 비교감이다. 물론 후자는 연추적 발상을 뛰어넘는 기발한 안출이다. 이 극적인 실례는 동양과 서양 사람들이 드러내는 발상법의 차이를 느끼게 해준다.

(4) 해법의 발상을 촉진하는 데에는 교육공학적으로 더욱 더 정교하게 가다듬어진 배려가 필요하다. 이를 위하여 수학교육이 계발 또는 개발하여야 할 과제는 무궁무진하다. 폴리아 자신이 그의 저서 [01]의 서문에서 언급했듯이 수학에 접목하여 교육심리학의 연구결과를 원용하는 일이 요청된다. 때로는 교육 전문가와 제휴하여야 될 상황이 있을지도 모른다. 이러한 관점에서 아다마(Hadamard)는 선구자라 할 수 있고, 한편 폴리아(Polya)는 선각자라 하겠다.[13]

13) 폴리아는 그의 저서 [01]의 p. 134 (제3부 표제항목 Modern heuristic의 소항목 7)에서 발견술의 심리학적 소지에 눈을 뜨게 해준 W. James, W. Köhler, K. Duncker 및 J. Hadamard에게 감사를 표하고 있다.

인간의 창의력이란 어떠한 재능인가? 그것을 발양하는 일은 어느 정도까지나 가능한가? 이를 위하여 소위 조기교육(early childhood education)이 하여야 할 일은 무엇인가? 수학교육이 문제해결이라는 중대한 과제에 관심을 쏟고 있는 동안, 교육학의 일각에서는 이른바 창의성의 계발이라는 과제가 매우 심도있게 논의되어 왔다. 수학교육은 이러한 연구 결과를 수용할 수도 있을 것이다.

창의성의 계발은 오늘날 국가 경쟁력의 제고라는 관점에서 수월성을 지향하는 영재교육으로 강력하게 반영되어 있다. 이에 관련하여 과학교육은 장인정신의 함양과 함께 발견과 발명을 강조하는 쪽으로 맞물려 있다. 창의성이 필요한 곳은 오로지 과학적 발명의 영역에만 국한된 것은 아니다. 이것은 이미 주지의 사실이다. 수학이라는 학문도 그 예외일 수 없다. 그러나 수학은 그렇지 않은 공부로 잘 못 알려져 있다.

그런데 유감스럽게도 직관력과 창의력을 직접 길러주는 그러한 교육 매체는 없다고 봄이 옳을 것이다. 문제해결의 발상을 촉진하고 고무시키는 분위기를 조성할 수는 있다. 그러나 그것이 곧 문제해결의 능력을, 특히 뛰어난 직관력이나 창의력을 얼마든지 신장시켜 주지는 않는다. 없었던 능력을 새로 만들어 주는 것은 아니다. 이점은 다시 후론하기로 하겠지만, 앞에서 언급한 것은 폴리아가 제안한 탐구와 발견 학습의 분위기가 나쁜 습관을 고쳐준다는 데에서 일차적인 의의를 가진다.

(5) <u>폴리아의 틀은 문제해결의 능력을 계발하고자 하는 해결자의 초보 단계에서 행동 수정을 위한 치유 목적으로 사용됨이 바람직하다</u>. 모든 사람에게는 성장 과정에서 저절로 형성된 나쁜 사고의 습관이 있기 마련이다. 특히 시행착오(trial and error)는 누구에게나 있는 아주 원시적인 문제해결의 행동양식이다. 그밖에도 개인적으로 특별하게 습득된 즉자적인 각종 상식과 그 지배를 받는 사고방식도 위에 언급한 것과 같은 범주에 속한다.

이러한 병리적 사고방식을 치료하는 데 있어서 폴리아의 처방은 매우 효험이 뛰어난 약이다. 개인마다 도사리고 있는 편향적 사고 작태는 좋은 방법을 써서 교정될 수 있다. 바로 앞에서 논의한 바는 이러한 용도를 위하여 훌륭한 교육 매체를 개발하여야 한다는 것이다. 행동을 적극적으로 강화시켜주는 가령 송환(feedback) 장치를 활용할 수 있을 것이다. 폴리아는 이를 위하여 아주 좋은 틀을 제공한 것이다.

수학교육자 중에는 수학적 사고 양상 자체가 가르쳐 질 수 있는지에 대하여 매우 회의적인 사람들이 있다. 직관력, 창의력, 이러한 고등 능력을 필요로 하는 문제해결의 능력이 교육에 의하여 길러질 수 있는가? 이 점에 관해서는 이렇게 설명할 수 있을 것이다. 비유컨대 병을 고치고 방법에는 대증요법이 있듯이, 아주 한심한 사고의 아집은 잘 준비된 방법으로 우선 현상적 증후를 가라앉게 할 수 있다.

한편 적극적으로는 몸의 기본 기능을 회복함으로써 강화된 주요 장기 기능

이 몸의 다른 질병을 스스로 고치도록 하는 것이다. 몸에는 이러한 재생 능력 또는 활원능력이 있다. 마찬가지로 인간의 정신기능에도 이러한 능력이 잠재되어 있다. 예컨대 조작적 조건 형성을 통하여 문제해결의 해법 발생을 촉진하고 고무시킬 수 있을 것이다. 여기까지는 능히 수학교육이 할 수 있는 일이다. 요컨대 대증요법과 활원요법을 적절히 병용할 수 있을 것이다.

그러나 그 이상은 개인의 고유 재능이라는 영역에 속한다. 고도의 직관력, 창의력, 통찰력, 순발력 같은 것들은 천품(gifted talent)이라고 보아야 한다. 이러한 능력 모두가 교육에 의하여 얼마든지 길러질 수 있는 것은 아니다. 더구나 수학적 재능이라 할지라도 누구에게나 동질의 것이 아니다. 그것은 사람의 얼굴 모양 만큼이나 다양한 빛깔(color)을 가지고 있다. 수학교사는 되도록 일찍 전망있는 두뇌를 발견하여 이를 선별 교육할 수 있도록 함이 바람직하다고 보겠다.

5. 후언 (後言)

수학교사는 인내심과 애정을 가지고 해결자(학습자)를 구속하고 있는 사고의 장애 내지 악습관을 재거해 주어야 한다. 이렇게 함으로써 마치 구름이 걷히면 해가 저절로 빛을 발하듯이 해결자는 자신감을 회복하게 될 것이다. 그래서 자신의 숨은 재능 또는 소질과 연결될 수 있겠는데 수학교사는 여기까지만 도와줄 수 있을 뿐이다. 폴리아는 유능한 교사의 자질에 대하여 여러모로 중요한 충고를 아끼지 않았다.

"문제해결이란, 말하자면 수영과 같은 실제적인 기능이다. 이러한 실제적 기능도 모방과 연습에 의하여 얻어진다"[01, p.4.맨 아래 문단]고 폴리아는 말한다. 수학을 배우고 가르치는 일은 "수학적으로 생각하기" 인데 그것은 실제로 문제해결을 통하여 이루어진다. 이렇게 하는 데는 지침이 있어야 하고 무엇인가 틀이 있어야 한다. 바로 그것을 폴리아가 제공해 주었다. 얼마큼 도식이 필요한 것은 어쩔 수 없다. 이러한 국면은 기예를 가르치고 배우는데 겪는 고충과 마찬가지이다.

예컨대 피아노를 가르치고 배우는 데는 교본이 있어야 하고 그에 따른 연습이 있어야 한다. 그것은 마치 무술(검도나 태권도 등등)을 익히려면 기본 품세에서 출발하는 것과 마찬가지이다. 그러한 기초 과정을 통하여 수련을 쌓는 동안 학습자 자신의 내부에 잠재되어 있는 소질 또는 재능과 연결이 이루어지기를 기대하는 것이다. 이렇게 되면 매체로서의 도구에 더이상 구애받지 않고 스스로 나아가게 된다. 품세 자체가 곧 무술은 아니기 때문이다.

문제해결의 모형은 잘 가다듬어지고, 아주 일반적이면서도 실제적으로 도움을 줄 수 있도록 배려된 것이라야 할 것이다. 폴리아가 매우 겸손하게 "발견" 이라고 말했지만, 보다 적극적으로는 해법을 발생시켜야만 한다. 너무나 도식적이라고 비난을 받을지 모르나, 폴리아의 문제해결 모형을 해법의 발생 모형이 될 수 있도록 일부 수정하고 보완할 수 있을 것이다. 이것은 별개의

연구 주제가 됨직하다.
이 도식을 통하여 문제해결이 발견이요, 탐구이면서, 또한 발명이라는 결실로 나아갈 수 있도록, 무한한 상상력과 창의력이 발휘되는 경지로 안내하는 길잡이가 될 수 있도록 하는 것은 역시 수학교사의 운영의 묘이다. 그리하여 도식이 탐구와 상상력을 발휘하는 데 압력 요인이 되지 않도록 마지막 단계에서는 도식 그 자체로부터 자유로와져야 할 것이다.

(1995년 4월 15일)

참 고 문 헌(BIBLIOGRAPHY)

[01] Polya, G., *How to Solve It.* Princeton. N.J: Princeton University Press, 1945 (1st ed), 1957 (2nd ed), 1973 (copyright renewed). cf: The 5th printing of 1948 is slightly enlarged, complementarily revised in 1957.

[02] _______, *Induction and Ainalogy in Mathematics.* (Mathematics and Plausible Reasoning, vol. I) Princeton, N.J: Princeton University Press, 1954 (1st ed), 1990 (12th printing).

[03] ____________, *Patterns of Plausible Inference.* (Mathematics and Plausible Reasoning vol. II) Princeton, N.J: Princeton University Press, 1954 (1st ed), 1968 (2nd ed).

[04] ___________, *Mathematical Discovery.* New York: John Wiley and Sons, 1962 (vol. I), 1965 (vol. II), 1981 (combined paperback ed).

[05] ______, *Mathematical Methods in Science.* Washington, D.C: Mathematical Association of America, 1978.

[06] Polya, G., and Szegö, G., *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* (2 vol's.) Berlin, Germany: Springer Verlag, 1925 (1st ed), 1945 (reprinted ed in New York), 1964 (3rd ed), 1972 (English version translated by D. Aeppi)

[07] Polya, G., "Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fehlerausgleichung, Statistik." *Abderhalden's Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden,* Abt. V, Teil 2 (1925): 669-758.

[08] ___________, "Geometrische Darstellung einer Gedankenkette." *Schweizerische Pädagogische Zeitschrift,* 1919: 11

[09] ______, "Wie sucht Mann die Lösung mathematischer Aufgaben?" *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.* 63 (1932): 159-169.

[10] ____________, "Wie sucht Mann die Lösung mathematischer Aufgaben?" *Acta Psychologica,* 4 (1938): 113-170.

[11] ____________, "Heuristic Reasoning and the Theory of Probability." *American Mathematical Monthly,* 48 (1941): 450-465.

[12] ________, "On Patterns of Plausible Inference." *Courant Anniversary Volume,* (1948): 277-288.

[13] ______________, "Generalization, Specialization, Analogy." *American Mathematical Monthly,* 55 (1948): 241-243.

[14] ______________, "Preliminary Remarks on a Logic of Plausible Inference." *Dialectica,* 3 (1949): 28-35.

[15] _______, "With, or without, Motivation?" *American Mathematical Monthly,* 56 (1949): 684-691.

[16] _______, "Let us Teach Guessing." *Etudes de Philosophie des Sciences, en hommage à Ferdinand Gonseth,* (1950): 147-154. Editions du Griffon, Neuchatel, Switzerland.

[17] _______________, "On Plausible Reasoning." *Proceedins of the International Congress of Mathematicians,* 1 (1950): 739-747.

[18] Thorndike, E., "Psychology of Problem Solving." *Mathematics Teacher,* 15 (1922): 212-227, 253-264.

[19] Hadamard, J. S., *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* Princeton, N.J: Princeton University Press, 1945 (1st ed), 1949 (2nd ed).

[20] Wertheimer, M., *Productive Thinking.* New York: Harper and Row, 1945, 1959.

[21] O'Brien, K. E., "Problem Solving." *Mathematics Teacher.* 49 (1956): 79-86.

[22] Halmos, P. R., "The Heart of Mathematics." *American Mathematical Monthly,* 87 (1980): 519-524.

[23] Zweng, M., et al, *Proceedings of Fourth International Congress on Mathematics Education.* Boston Mass: Birkhäuser, 1983.

[24] NCTM, *An Agenda for Action.* (Recommendation for School Mathematics of the 1980's). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

[25] NCTM, *Problem Solving in School Mathematics.* (Yearbook 1980). Washington, D.C: National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

[26] NCTM, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

[27] Higgins, J. L., "A New Look of Heuristic Teaching." *Mathematics Teacher*, 64 (1971): 487-495.

[28] Travers, K, J., et al, *Mathematics Teaching.* New York: Harper and Row Pub. Co., 1977.

[29] Dolan and Williamson, *Teaching Problem-Solving Strategies.* Reading Mass: Addison Wesley Pub. Co., 1983.

[30] Burton, L., *Thinking Things Through.* Cambridge, U.K: Basil Blackwell, Ltd., 1984.

[31] Sowder, L., "The Looking-Back Step in Problem Solving." *Mathematics Teacher*, 79 (1986): 511-513.

[32] Jensen, R. J., "Stuck? Don't Give Up! Subgoal-Generation Strategies in Problem Solving." *Mathematics Teacher*, 80 (1987): 614-621.

[33] Schoenfeld, A. H., *Problem Solving Strategies in College-Level Mathematics.* Berkeley: University of California, Physics Department, 1978.

[34] ____________, *Teaching Mathematical Problem Solving Skills.* Clinton, N.Y: Hamilton College, Mathematics Department, 1979.

[35] ________________, "Teaching Problem-Solving Skills." *American Mathematical Monthly*, 87 (1980): 794-805.

[36] ______, *A Source Book for College Mathematics Teaching.* Washington, D.C: Mathematical Association of America, 1990.

[37] _________, "Polya, Problem Solving, and Education." *Mathematics Magazine*, 60(5) Dec. (1987): 283-291.

[38] ___________, *Mathematical Problem Solving.* New York, N.Y: Academic Press,

1985.

[39] ________, "Learning to Think Mathemitically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics." NCTM Handbook (1992): 334-370 in the following [40].

[40] NCTM, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (ed by D. A. Grouws). New York: Macmillan Pub. Co., 1992.

[41] Cho, Dong Hoh, *Notes on the Methods of Proof and Inference.* Seoul, Korea: University of Yonsei, The Graduate School of Education, Department of Mathematics Education, 1986.

[42] Lakatos, I., *Proofs and Refutations-The Logic of Mathematical Discovery.* (ed by J. Worrall and E. Zahar) London: Cambridge University Press, 1976.