한국초등수학교육학회지 1, 123-140. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 1, 123-140.

수학적 사고의 교수 방법으로서의 수학화

유 현 주[1)]

수학은 결과가 아니라 과정으로서 학습되어져야 한다고 주장되어 오고 있다. 그러나, 학교 수학의 내용은 top-down 방식으로 선정되며, 학생들에게 수학적 개념을 결과로서 주입시키고 있다. 결과적으로 학생들은 탐구 과정이나 수학적 사고를 외면하고 학교 수학을 배운다. 프로이덴탈에 의하면, 그것이야말로 수학 교육에 있어서 모든 문제의 근원인 것이다. 그는 "수학적으로 사고하는 것을 가르치는" 방법으로서 수학화를 제안한다. 수학화, 즉 활동으로서의 수학을 해석하고 분석하는 과정을 통하여 "수학적으로 사고하는 것을 가르치는" 것은 수학 교육의 목적을 구현하는 한 방법이다.

과거에나 지금에나 수학 교육의 관심, 초점은 "어떻게 하면 잘 이해시킬 것인가?"에 있다고 말해도 과언이 아니다. 단지 학습된 수학적 지식을 암기하여 될 수 있으면 오랫동안 잊어버리지 않도록 할 때 이 목표가 달성되는 것은 아니다. 학습된 수학의 내용은 사실상 모두가 암기될 수 없으며, 아마도 수학자들도 자신이 학습한 수학의 90% 이상은 잊어버리며, 그것이 당연할 것이다. 왜냐하면 앞에서 학습된 수학은 보다 나은 수학으로 올라가는 사다리의 역할을 하는 것이며 그것으로 족하기 때문이다. 중요한 것은 학습된 지식이 얼마나 우리의 사고방식이 되며 진정한 수학 내적, 외적인 문제의 해결에 의미 있게 이용될 수 있느냐 하는 것이다. 이러한 방식으로 수학을 교수-학습시켜 '참다운 이해'를 추구하는 것은 오랫동안 수학자, 수학교육학자들에 의해 강조되어 왔으나, 특히 그 정신과 함께 구체적인 지도 방법론은 프로이덴탈(Freudenthal)에 의해 제시되어 왔는 바, 그는 그것을 '수학화(mathematising)'이라고 하였는데 본 연구에서는 수학화가 등장하게 된 배경과 함께 그 기본 취지, 수학화의 과정, 지도 방법론을 살펴보기로 하겠다.

I. 수학화라는 용어의 등장 배경과 그 의미

'교과란 무엇인가?' 이것은 1959년 우즈호올즈 회의에서 제기되었던 것으로 지금까지의 교육이 안고 있는 근본적인 문제점을 찾으려 했던 논제이다. 그 결과, '교과를 가르치는 것'이 어떤 것인가에 대한 공통된 가정을 도출시켰다. 그들은 이 핵심 아이디어를 '지식의 구조'라는 용어로 부르너(Bruner)의 「교육의 과정」을 통하여 제시하였다. 교육 내용을 '지식의 구조'라고 말했을 때, 그 회의에 참석했던 사람들은 교과를 가르치는 것에 관한 가장 근본적인 문제를 무엇으로 보았는가? 그리고 '교과를 잘 가르치는 것'이 어떤 것인가 등에 대한 답은 「교육의 과정」 전체 속에 소개되고 있으나 '한가지 핵심적 확신'이라고 말한 것에서 명확하게 제시되고 있다. (이홍우, 1990, p. 68)

---

1) 전주 교육 대학교 ([560-757] 전북 전주시 완산구 동서학동 128)

그 한가지 핵심적 확신이란 곧, <지식의 최전선에서 새로운 지식을 만들어 내는 학자들이 하는 것이나 국민학교 3학년 학생이 하는 것이거나를 막론하고 모든 지적 활동은 근본적으로 동일하다>는 것이다.

> 과학자가 자기 책상이나 실험실에서 하는 일, 문학 평론가가 시를 읽으면서 하는 일은 누구든지 이와 비슷한 활동, 다시 말하면 모종의 이해에 도달하려는 활동을 할 때 그 사람이 하는 일과 본질상 다름이 없다. 이런 활동들의 차이는 하는 일의 '종류'에 있는 것이 아니라 지적 활동의 '수준'에 있는 것이다. 물리학을 배우는 학생은 다름 아니라 바로 물리학자이며 물리학을 배우는 데는 다른 무엇보다도 물리학자들이 하는 일과 똑같은 일을 하는 것이 훨씬 쉬운 방법일 것이다. 물리학자들이 하는 일과 똑같은 일을 한다는 것은 물리학자들이 하듯이 물리 현상을 탐구한다는 뜻이다.

앞에서 언급된 "학자가 하는 일과 동일한 일을 한다"는 생각과 관련지어 보면 '지식의 구조'라는 것은 학자들이 해당 학문 분야를 연구할 때 쓰는 '기본 개념과 원리',또는 '핵심적 아이디어'를 가리킨다고 말할 수 있다. 부르너 자신은 그것을 학문의 기저를 이루는 일반적 아이디어, 원리, 기본 개념으로 표현하고 있다. 즉 표면상에 나타나서 눈으로 관찰될 수는 없지만 대상의 저변에 숨겨져서 그 이면에서 그 사건과 현상을 조정하는 규칙이나 원리인 것이다. 이러한 구조의 아이디어에 의하면 교과서에 나와 있는 지식은 '지식의 현상' 또는 '지식의 표층'에 해당된다고 볼 수 있고 그 지식의 표층 '이면'에 지식의 구조에 해당하는 것이 내재해 있다는 것이다. 부르너는 이것으로 종래 교육의 문제점을 지식의 표층에 해당하는 '사실의 더미'나 해당 학자들의 '탐구 결과'만을 학습하게 했으며 그 지식의 표층 이면에 내재해 있는 '지식의 구조'를 가르치지 않은 것으로 지적하였다. 그는 이와 같은 현상을 일러 교과의 '중간 언어(middle- language)'를 가르치는 것이라 하였다.[2)]

지식의 구조란 지식의 표층 이면에 기저해 있는 일반 원리, 핵심적 아이디어이기 때문에 그것은 학습-지도하는 방법과도 긴밀하게 관련된다. 이 점에 대하여 부르너는 예를 들어서 물리학에서의 지도 방법의 문제를 논하면서, 물리라는 교과를 가르칠 때 학생이 배워야 하는 것은 중간 언어인 결과로서의 법칙 그 자체가 아니라, 그 법칙을 다루는 데 쓰이는 사고 방법, 탐구 방법으로서의 일반적 아이디어, 원리 즉 지식의 구조임을 강조했다.

그는 "지식의 최전선에서 학자들이 하는 것이나 국민학교 3학년 학생이 하는 것이나를 막론하고 모든 지적 활동은 근본적으로 동일하다"고 하면서 이들 활동의 차이는 하는 일의 '종류'에 있는 것이 아니라 그 '수준'에 있기 때문에 '수준'을 배려하기 위해 모종의 조치를 취한다면 하는 활동의 종류가 같게 되도록 할 수 있다고 주장하였다. 그것은 그의 '대담한 가설', 즉 <어떤 교과든, 어떤 발달 단계에 있는 어느 아동에게도, 얼마간 지적으로 정직한 형태로 효과적으로 가르칠 수 있다.>에 명확히 드러나며, 그는 이들 활동의 연속성을 유지하는 데 필요한 조건을 아울러 제시하고 있다. (이홍우, 1990, p. 33.) 서로 다른 지적 활동의 수준을 고려하여 그 활동이 같은 종류의 것이 되게 하기 위해 부르너는 학자 수준의 물리학을 국민학교 3학년 수준에 맞게 '번역'하여 발달 수준에 따라 세 가지 표현 방식 - 활동적(Enactive), 영상적(Iconic), 상징적(Symbolic) 표현 - 으로 제시할 것을 권고하였다. 물론 그는 이 번역의 과정이 그 학문의 지적 성격을 손상시키지 않도록 해야 한다고 하였으나 실제로는 그 지적 성격이 심각하게 손상되는 결과를 낳고 말았다. (이홍우, 1992, pp. 54-55.)

이러한 결과는 교과의 구조 가운데 파악하기 힘든 면을 배제하고 줄이기 위해 어떤 조정을 행해야 했

---

2) 교과의 언어(language)라는 것은 학자들이 현상을 탐구할 때 하는 생각 그 자체를 가리키며, 이에 비하여 중간 언어(middle language)는 학자들의 연구 결과를 학생들에게 전달해 주는 언어를 가리킨다고 볼 수 있다. (이홍우, 1990, p. 50.)

기 때문에 발생한 것이라 할 수 있다. 그러한 조정의 과정에서 수학적 개념, 아이디어로의 탐구에 대단히 중요하고 실질적인 부분들이 사라지기 쉬운 것이다. 부르너의 아이디어를 반영한 구조 중심 교육과정인 '새 수학'은 실제 그 반성에서도 찾아 볼 수 있듯이 그 번역이 미비한 곳에서는 내용이 너무 어려워서 아동이 접근하기 어려운 것이 되었고, 아동에게 접근 가능한 것이 되게 하기 위하여 번역하면서 구체화를 시도하였지만 그 구체화된 것의 수준은 목표가 되는 개념의 수준에 비해 턱없이 낮게 되는 결과를 가져오게 되었다. (Freudenthal, 1983, pp. 31-32.)

학습-지도의 내용이 되어야 하는 교과는 지식의 표층에 해당하는 결과로서의 지식이 아니라 그 표층에 기저해 있는 핵심 원리 즉 '지식의 구조'이며 그것을 탐구의 과정으로 학습시켜야 한다는 부르너의 관점은 그 당시 가치 있는 것으로 공감되었다. 그러나 그 중심을 전문 학자의 관점에서 파악된 구조에 두고 그것을 아동에게 접근 가능하게 하기 위해 '번역'이라는 하향식 방법을 택함으로 그가 의도했던 지식의 구조가 형성되게 한 탐구 방법 내지 사고의 본질은 그 생명력을 잃은 채 종래의 교육과 거의 다름이 없이 결과로서의 지식을 전달하는 것에 그치게 하는 결과를 초래하였다. 수학하는 활동 없이 체계화된 지식을 강조했던 '새 수학' 운동에 대한 비판과 경고는 다음에서도 찾아 볼 수 있다. (Treffers, 1987, p. 240.)

> 수학을 안다는 것은 수학을 할 수 있다는 것을 의미한다. 어느 정도 능숙하게 수학적 어휘를 구사하여 문제를 풀 수 있고, 논증을 비판할 수 있으며 증명을 찾을 수 있고, 가장 중요한 수학적 활동으로 주어진 구체적 상황에서 혹은 그로부터 추출된 것으로 수학적 개념을 인식하는 것이다. 따라서 수학적 개념을 충분한 구체적 사실에 대한 배경 없이 도입하고, 통합하는 경험 없이 통합하는 개념을 도입하는 것, 학생에게 구체적인 적용 없이 도입된 개념을 계속해서 언급하는 등은 유용하지 않다기 보다는 나쁜 것이다.

이러한 수학 교육 현대화 운동의 좌절은 물론 전통적인 수학 교육에로의 복귀를 초래한 것은 아니지만 이를 계기로 세계적인 학자들 사이에 '무엇 때문에 수학을 가르치는가?'라는 수학의 교육적 가치에 대한 근원적 의문이 심각하게 논의되게 되었다는 사실은 매우 주목할 사실이 아닐 수 없다.

II. 수학화란 무엇인가?

1. 수학화의 의미

수학의 교육적 가치에 대한 반성 가운데 프로이덴탈은 '수학을 학습한다는 것은 무엇을 뜻하는가?'라는 질문을 통해 그 답을 모색하고 있다. 프로이덴탈은 결과적 지식 체계 곧 기성 수학(ready-made mathematics)과 활동 중의 수학 곧 실행되는 수학(acted-out mathematics)을 구분하였다. 이러한 그의 생각은 지식과 지식의 기록을 구분한 듀이(Dewey, 1916)에게서 찾아볼 수 있다. 그에 의하면 인간은 어떤 목적을 가지고 생활하는 과정에서 지식을 모으고 발견하고 창안한다. 이러한 능동적인 과정은 지식의 기록 곧 과거의 지적 활동의 산물을 수용하는 것과 구별되어야 한다는 것이다. 그는 결과로서의 산물 곧 수학에서의 형식은 교육의 출발점이 아니라 도달해야 할 목표임에도 불구하고 종래의 교육에서는 결과적 산물로서의 내용을 가진 교과가 도입되면서 아동들은 일상에게서 자료를 '수학적으로 다루는 방법' 즉 '지식'을 배우는 것이 아니라, 그 결과인 '지식의 기록'을 배운다고 비판하였다.

프로이덴탈에게 있어서 수학 교육의 근본 문제는 학습자의 마음과는 별도로 존재하는 외적인 '기성 형식'으로서의 수학을 그 자체의 논리적인 전개 순서에 따라 가르치는 것이다. 그보다는 수학의 활동적 본

성에 대한 인식을 바탕으로 그에 적합하도록 학생들의 활동과 그에 대한 반성을 통해 수학을 거듭 재구성해 가도록 해야 한다는 것이다. (우정호, 1994, p. 120) 이러한 입장에서 그는 '새 수학'이 비록 그 목표는 지식의 구조를 탐구 과정으로 경험시키는 것에 두었지만 실제 교재의 구성은 전문 학자의 관점에서 파악된 수학적 구조를 구체화하여 제시함으로 그 본래 의도는 사라진 채 형식적인 교재로 제시되는데 그치고 말았다고 비판하였다.

프로이덴탈은 실행되는 수학, 수학적 활동의 핵심을 수학화(mathematising) 활동으로 보고 있다. 그는 수학이 실재의 부분을 구조화하고, 수학적으로 정리하는 하나의 인지적 도구이기 때문에, 이러한 구조화, 조직화, 체계화되었던 과정을 재발명해 봄으로써 학습자들은 수학을 자신의 자산으로 만들 수 있다고 하였다. 즉 수학적 구조, 아이디어, 개념 등은 수학화하는 활동을 통하여 학생의 심리에 통합되어 바르게 이해되고 적용될 수 있음을 다음과 같이 언급하고 있다. (Freudenthal, 1968, p. 6.)

> 문제는 '어떤 수학을'에 있는 것이 아니고, '수학을 어떻게 가르쳐야 하는가'에 있다. 그 제1 원칙은 수학은 실재를 수학화한 것이라는 점이다. 그래서 수학을 이용하고 있는 대부분의 사람에게 있어서도 이것이 수학의 궁극적인 모습이리라. 소수의 사람들만이 수학을 수학화하는 활동으로, 수학 자체를 수학화하는 것을 보리라… 체계화는 수학의 크나 큰 아름다움이다. 그래서 나는 지금 체계화하는 활동에 대해 말하는 것이지 그 결과에 대한 것을 말하고 있는 것이 아니다. 그 활동의 결과란 아름답게 닫힌 체계인 것이다. 그것이 최고도로 완성되면 기계로 처리할 수도 있다. 그러나 기계로 할 수 있는 것에는 인간이 필요 없다. 인간이 배워야 할 것은 닫힌 체계로서의 수학이 아니고 활동으로서의 수학 즉, 실재를 수학화하는 과정이나 수학을 수학화하는 과정이다.

결국 프로이덴탈에 따르면, 수학의 발달이라는 측면에서 볼 때 '실재(reality)'가 수학자의 필요와 선호하는 정도에 따라 정돈되어 가는 과정을 설명하는 용어가 수학화이다 (Freudenthal, 1991, p. 30). 여기에서 중요한 것은 '실재'의 의미이다. 프로이덴탈에 앞서서 수학화는 구체적인 현실 상황을 수학적인 용어, 기호를 써서 개작하는 것을 의미해 왔다.[3] 그러나 프로이덴탈이 수학 교육의 목적으로 삼는 수학화는 그보다 넓은 의미이며 '실재'를 보는 관점에서 그 차이가 있다. 프로이덴탈에 따르면 수학적 지식의 발달은 상식에 바탕을 두면서 그것이 형식으로 만들어지고, 확실성을 추구하면서 더 높은 차원의 상식으로 재구성되어 가는 과정이다. 이러한 과정에서 상식이란 고정되어 있는 것이 아니며 개인의 지적인 수준이 향상되어 감에 따라 그에게 있어서의 상식 또한 변한다고 할 수 있다. 그리고 각 개인의 수준에 있어서 그가 자신의 상식에 입각하여 자명한 것으로 현실적인 것으로 받아들이는 그것이 '실재'이다. 그러므로 상식이 다른 사람들에게 실재 역시 다를 수 밖에 없는 것이다. 한 개인에게 있어서도 상식의 수준이 높아지면 실재 역시 달라지게 된다. 즉 이 실재는 여러 가지 영향을 받아 변화하고 확장되고 심층적인 것으로 되는 상대적인 것으로, 이 실재가 변화하는 한 그것을 출발점으로 삼는 수학화 역시 계속되는 과정이다. (Freudenthal, 1991, p. 30.)

실재를 수학자의 필요에 맞게 적절히 손질하여 어떤 새로운 것을 조직해 내는 그 조직화 활동이 수학화이며, 이 조직화는 프로이덴탈의 교수학적 현상학에서는 수준 상승(level raising)으로 설명되고 있다. 프로이덴탈은 수학적 개념, 구조, 아이디어가 물리적, 사회적 그리고 정신적 세계의 여러 '현상'을 조직하는 수단으로 '발명'되어진 것이라는 사실로부터, 수학적 개념 구조라는 '본질'을 그 본질이 조직의 수단으로 작용하는 어떤 '현상'과 관련하여 기술하고 교수학적으로 적용하는 것을 교수학적 현상학이라고 설명하고 있다. 여기에서 핵심적인 생각은 상대적 관계에 있는 본질과 현상이다. 교수학적 현상학에 따르면,

3) W. Servais는 수학적 활동 가운데 현실적인 상황을 수학적 용어, 기호로 바꾸는 최초의 활동에 수학화라는 용어를 사용하고 있다.

'현상(실재)'가 '본질(실재를 손질하여 조직해 낸 것)'으로 조직되고 나면, 다시 그 본질은 현상이 되어 새로운 본질로 조직되게 된다. 예를 들면 수는 양이란 현상을 조직하는 본질이지만, 수라는 현상은 다시 십진 기수법에 의해 조직된다. 그리고 삼각형, 평행사변형, 마름모, 정사각형과 같은 도형은 형이란 현상의 세계를 조직하는 본질이지만, 도형이란 현상은 명제나 그 증명에 의해서 조직된다. 이와 같이 하여 수학의 가장 높은 수준에까지 추상화가 거듭되면서 수학적인 현상이 새로운 수학적 개념으로 조직되어 간다.

현상(실재)가 본질로 조직되고, 그 본질이 다시 현상이 되어 다시 새로운 본질로 조직된다는 것은 몇 개의 수준이 있어, 수학이 형성되어 온 과정에는 어느 한 수준에서 다른 한 수준으로의 도약(jump)이 있어 왔다는 것을 의미한다. 이 계속적인 도약의 과정이 바로 수학화이며, 학생들은 수학의 학습 지도 과정에서 이러한 수학화를 안내된 재발명의 방법으로 경험해야 한다는 것이 프로이덴탈의 주장이다.

2. 수학화의 과정과 그 여러 가지 측면

수학화란 실재가 수학자의 필요에 어울리도록 손질되는 과정을 묘사하는 용어인 만큼 수학화에는 여러 가지 측면이 포함되어 있다. 앞서서 수학적 아이디어, 개념의 발달 과정은 현상(실재)가 본질로 조직되고 나면, 다시 그 본질이 현상이 되어 그것이 또 다른 상위의 본질로 조직되는, 거듭되는 조직화의 과정이며 이를 수학화 과정이라고 하였다. 프로이덴탈은 현상이 본질로 조직되는 과정을 본질의 내용(content)이 파악되며, 그 후에 인간의 자연스러운 습성에 따라 파악된 그 내용이 수학의 용어나 기호로 정돈되어 형식(form)으로 자리잡게 되는 두 부분으로 보고 있다. 그는 수학화하는 활동 가운데 내용과 형식 중 어느 쪽이 더 강조되느냐에 따라 수학화의 여러 가지 측면을 설명하고 있다.

그 가운데 내용 쪽이 강조된 수학화 활동에는 스키마화(schematizing)가 있고, 형식이 강조되는 것에는 공리화(axiomatizing), 형식화(formalizing), 알고리듬화(algorithmizing), 기호화(symbolizing)가 있다.

공리화란 전형적인 현상 즉 파라다임(paradigm)에서 조직된 공리-본질이라 할 수 있다-를 일반화하여 공리적으로 재조직하는 것을 의미한다. 형식화는 발견된 내용을 수학적으로 적절하게 표현하기 위해 언어를 손질하고, 조정하고 변형시키는 과정을 의미한다.[4] 알고리듬화와 기호화도 형식화에 포함된다고 할 수 있다. 알고리듬화란, 점진적인 스키마화에 의해서 그 절차의 단축(shortening)을 강조하면서 그것을 간편한 절차로 만드는 과정을 의미한다.[5] 스키마화란, 추상적인 형식과 언어가 정돈되는 형식화나 공리

4) 아주 중요하고 기념비적인 결과를 가지는 형식화로 우리는 수 기호법을 생각해 볼 수 있다. 수 언어를 인도 아라비아 기호법에 의해 형식화하는 것은 그것의 알고리듬적 특성을 부각시킨다. 따라서, 인도 아라비아 산술과 연산에 대한 기호법도 형식화된다. 수 체계의 형식화의 역할을 처음에는 의사 소통을 위한 것이지만 세로 산술의 알고리듬에 의해 이것은 알고리듬의 신뢰성을 보장하는 데 도움이 된다. 이런 형식화를 초등학교에서 다룰 때 아동들은 단지 의사 소통의 특성을 갖는 형식화만이 가능하고, 예를 들면, 수직선 위에서의 산술 연산 그리고 그것의 역을 위한 화살표 언어와 같은 낮은 수준의 형식화에서 출발해서 점진적으로 형식화해 가는 것이 성공적일 것이다. 어떤 발달 단계에서 자율성을 위한 형식화가 용이한가를 결정하는 것은 형식화의 전체적인 상태에 달려 있다. 우리가 초등학교에서 중등학교로 올라갔을 때 학생들의 수학 성적에 심각한 차이가 있는 원인이 변수의 도입이라는 것을 생각할 때 특히 문자에 의한 형식화가 학생들에게 얼마나 큰 어려움인지를 먼저 알아야 할 것이고 직접적인 형식화에 들어가기 전에 비형식적인 형식화의 경험을 주는 것이 필요한 것이다. 함수 기호를 발명해 본다던가, 분수를 나타내는 기호를 발명해 본다든지, 학생들에게는 용어와 기호가 부과되기 전에 자신의 필요에 의해서 이런 것들을 만들어 보는 경험이 필요한 것이다.

5) 나눗셈의 경우, 다수의 대상을 여러 사람에게 나눌 때(즉, 카드놀이에서 여러 사람에게 카드를 나누어주는 것), 우리는 대상을 하나씩 차례로 분배하거나 한 사람에게 같은 양씩 분배하면서(그 대상이 다 없어질 때까지) 시작할

화 동안 그 내용 면에 관련되어 대응되는 과정으로 형식을 실재에 맞는 스키마로 만들어 내는 활동을 말한다.[6)]

그러나 수학화에는 이와 같은 과정 외에 모형화(modeling)와 핵심적 요소 찾기(looking for essentials)등이 포함된다. 모형화란 어떤 복잡한 실재나 이론을 그보다 더 형식적인 수학적 취급에 적합하게 되도록 이상화하고 단순화하는 것을 의미한다. 그 중간적인 매개물이 바로 모형(model)인 것이다. 따라서 모형화는 실재에서, 그리고 수학화가 진행됨에 따라 맞게 될 더욱 더 풍부한 실재 내에서 그 상황의 본질을 이해하고 그것에 초점을 맞추기 위한 과정인 것이다.

핵심적인 요소 찾기란 어떤 문맥[7)]내에서(within a context) 그리고 문맥에 걸쳐(across contexts) 그 공통적인 특성, 닮은 것(유사성), 서로 유추할 수 있는 것, 동형 등을 발견하는 것을 의미하는 바, 이러한 발견으로 일반화에 이르게 된다. 그러나 이 일반성은 여러 예가 아닌 단 하나의 패러다임[8)](전형적 예)로부터 수학적 개념이나 아이디어의 심상(mental image)을 갑작스럽게 깨닫는 아하 경험(Aha Experience)으로 얻어질 수도 있다. 그러한 패러다임은 반드시 많은 경우를 필요로 하지는 않지만, 약간 다른 여러 패러다임에 의해서 강화된다.

여기에서 주목할 것이 '심상'이다. 지금까지 수학 학습에서는 그 출발점을 '개념의 획득'에 두었으나,[9)] 프로이덴탈은 수학의 발달 과정은 그에 앞서서 개념에 대한 통찰적인 이해인 '심상의 구성'으로 이루어져 왔음을 강조하고 있다. 역사적으로 볼 때 군에 대한 심상은 군 개념보다 약 반세기를 앞섰으며, 함수의 개념에 대한 기원은 함수라는 말이 라이프니쯔(Leibniz)와 베르누이(Bernoulli) 일가의 서신에서 등장했던 그 때부터가 아니라, 심지어 B. C. 2000년까지도 거슬러 올라 갈 수 있다. 그들은 $n=1, 2, \cdots, 30$일 때 n^3+n^2의 값을 나타내는 '표'를 사용하였는 바, 그것은 그들이 비록 '함수'라는 개념을 자각하고 있었

수 있다. 이것이 분배 문제의 수평적 수학화이다. 수직적 수학화는 그 절차를 더 짧게 하기 위하여, 궁극적으로 더 편리해 질 때까지- 점차로 더 큰 분배 몫을 찾아가는 데서 발견될 수 있다. 이 절차는 점진적인 스키마화의 확실한 예이며, 지금의 경우에는 결국은 긴 나눗셈의 표준 알고리듬으로 향하는 점진적인 알고리듬화이기도 하다.

6) 스키마화란, 예를 들면 수직선에서 16과 72의 중점을 찾는 경우에서 생각해 볼 수 있다. 보통의 경우, 아동은 그 두 점을 서로 마주 향하여 처음에는 한 칸씩, 그리고 나중에 좀 더 큰 규모로, 특별히 열 칸씩 옮겼다. 그렇게 자른다는 것은 두 점 사이의 거리를 반으로 나누고, 그 반을 두 수 가운데 작은 수에 더하는 것과 같다. 일반적인 용어로 이것을 표현하면 $a+\frac{1}{2}(b-a)$인데, 이것은 대수적으로 보다 보편적인 표현인 $\frac{1}{2}(a+b)$와 같다. 그 두 수에서부터 마주 옮기는 과정이 중점을 그대로 유지시킨다는 암시를 준 후에, 아동은 작은 수를 0에 옮겼고, 큰 수는 a+b에 옮겼으며, 중점에 대한 일반적인 표현을 얻어냈다. 두 수 사이의 중점을 찾는 방법이 무엇이라고 부여하는 대신에, 점진적인 스키마화를 통하여 점차 발전시키도록 허용한 것이다. 이 도식의 일반성을 획득하기 위하여는 단 하나의 패러다임으로 충분하며, 그럼에도 이것은 정수 범위를 넘어선다. 언어화해 보면 그 일반적인 해인 "주어진 두 수를 더한 후에 2로 나눈다"라는 표현이 "주어진 두 수의 합의 반"이라는 대수적 표현 단계를 거쳐 재형성되고, 따라서 대수적 언어를 만들고 사용하도록 한다.

7) 어떤 상황이나 문제, 절차, 조직, 도식, 알고리즘, 구조, 공식, 기호화 여러 공리 체계 등이 핵심적인 요소를 찾기 위해 문맥적으로 사용될 수 있다. (Freudenthal, 1991, p. 35.)

8) 프로이덴탈에 따르면 패러다임은 예를 의미한다. 비록 '예를 들면 (for example)'에서 사용된 것처럼 '사후의 예(after-example) '를 의미하는 것이 아니라 '사전의 예 (fore-example) '를 의미하는 것이다.(H. Freudenthal, 1991, p. 76.)

9) 전통적으로 개념을 이해시키기 위해서 그 개념을 가르치거나 가르치려고 시도해 왔다. 그러나 시도된 연령층에서 그것이 가능하지 않기 때문에 그 구체화를 통해 시도한다. 그러나 이홍우가 지적하였듯이 그것은 추상적인 아이디어의 구체적인 표현물로서의 의미만 가질 뿐인 것이기 때문에 너무 낮은 수준의 개략적인 것으로 개념의 본질을 반영하지 못하는 것이다.(이홍우, 1992, pp. 92-98) 이러한 입장에서 볼 때 부르너의 활동적, 영상적, 상징적 표상에 대한 이론은 큰 의미를 갖지 못하는 것이다.

던 것은 아니었지만, 함수 개념을 사용하고는 있었다는 의미이다. (박교식, 1992, pp. 130-132.)

그러한 심상은 개념의 직관적 의미에 대한 통찰을 가능하게 했으며, 이를 바탕으로 그 핵심이 분석되었고, 형식화가 이루어져 왔다는 것이다. 그러므로 현상(실재)로부터 조직되어져야 하는 것은 일차적으로는 심상으로서의 본질이며, 이차적으로 개념으로서의 본질이다. 휘시바인(Fischbein)이 지적했듯이 직관적 인식이 결여된 조숙한 형식적 취급은 통찰적 이해가 용이하지 않기 때문에 기억에 의존하는 명목뿐인 지식이 되기 쉽다.

그런 의미에서 볼 때, 현상(실재)으로부터 출발하며 그 현상을 조직하는 수단인 본질로서 수학적 지식을 도입함으로 그에 대한 직관적인 관념(심상)을 개발하여 개념 형성의 근원으로 작용하게 함으로서 수학적 사고의 기초를 놓고, 현상의 조직화 도구로서 수학이 재발명 되도록 하여 현실이 응용으로서 작용할 수 있게 하려는 것이 프로이덴탈의 생각이다.

패러다임 내에서, 그리고 여러 패러다임에 걸쳐서 일반화를 해 가는 것은 먼저 x라는 개념을 가르치고 그 후에 이해를 돕기 위해 그 예시를 보여주는 것과는 정반대이다. 하나의 패러다임 내에서 아직은 잠정적인 불확정적인 일반성을 통찰하고 또 다른 패러다임을 통해 더 나은 일반화를 추구해 가는 것은 교수학적으로 가치 있는 발견 활동이다. 왜냐하면 이를 통해서 개념에 대한 심상이나 절차에 대한 조작이 갑작스럽게 나타나기 때문이다. 그러한 심상과 조작이 명확하게 인식되면서 본래 상황, 맥락 가운데 쓸데없는 나머지 것들이 제거되고 그 경로가 단축되는 간소화(streamlining), 간결화(short-cutting)가 이루어진다. 이러한 과정은 점진적인 조직화, 스키마화, 구조화로 이끌기도 하며, 서투른 언어를 깔끔하고 형식적인 언어로 개념과 표기를 매끄럽게 하는 점진적인 형식화, 알고리듬화, 기호화에 이르게 할 수도 있다.

프로이덴탈에 따르면 수학적 사고 활동이란 현상(실재)가 본질(실재에서 조직해 낸 어떤 것)으로 조직되고, 그 본질이 다시 현상이 되어 또 다른 본질로 조직되는 수준 상승에 의한 거듭되는 구성 활동이다. 그러므로 수학화에서 가장 중요한 측면은 한 수준에서 다른 수준으로의 도약을 가져오게 하는 '자기 스스로의 활동을 반성하기(reflecting)'[10]이다. 이러한 반성은 '관점의 변화'를 야기시킬 수 있으며 이러한 관점의 변화는 또 다른 공리화로 이끌 수도 있다.

한편 트레퀴스(Treffers)는 본질을 조직해 내는 데 기여하는 현상(실재)의 성격에 따라 수학화를 수평적 수학화(horizontal)와 수직적 수학화(vertical)로 구분하였고 프로이덴탈도 이러한 구분을 받아들이고 있다. 트레퀴스는 문제 장면을 수학적인 문제로 변형하는 것과 수학적인 대상을 수학적인 체계 내에서 처리하는 것 (즉, 수학적인 것을 더 높은 수준으로 전환하기) 사이의 차이점을 설명하기 위해 이 용어를 도입했다. 수평적 수학화란 일상의 세계에서 기호의 세계에 이르는 것을 말하며 문제를 수학적으로 해결할 수 있도록 하는 것이다. 수직적 수학화는 기계적으로 이해하며, 반성적으로 기호들이 형성되고 재형성되고 조직된다. (Freudenthal, 1991, pp. 41-42.) 말하자면, 관찰, 실험, 귀납적 추론과 같은 경험적인 접근을 통해서 주어진 문제를 변형시켜서 수학적 수단으로 접근할 수 있게 되는데 이와 같이 문제를 수학적으로 스키마화 하는 시도를 수평적 수학화라 한다. 수평적 성분은 물리적 모델 그리고 나서 수학적 모델을 찾는 것으로 이루어진다. 일반적으로 수평적 수학화는 그 문제를 수학적 수단에 의해 접근 가능

10) 프로이덴탈은 반성하기란 사고의 입지를 이행하는 것(shifting standpoints)이라고 설명하면서, 반성하기의 여러 양식을 소개하고 있다. 첫째는 A를 살펴보기 위해 A에서 B로 이행하는 것으로 이것을 상호 이행 (reciprocal shifting) 이라 한다. 두 번째의 것은 C를 고려하면서 A에서 B로 이행하는 것인데 이것을 방향 지어진 이행 (directed shifting) 이라 한다. 세 번째는 A의 상황을 B의 상황으로 이행하는 것으로 평행 이행 (parallel shifting) 이다. (H. Freudenthal, 1991, p. 105)

한 영역을 스키마화 하는 것으로 이루어진다. 이것의 뒤를 따라 수학적 과정 즉, 그 문제의 풀이, 해의 일반화 그리고 그 이후의 형식화와 관련된 활동들은 수직적 수학화로 서술될 수 있다.

프로이덴탈에 따르면 생활의 세계에서 기호의 세계에 이르는 과정, 예를 들면 모형화, 스키마화, 기호화 동안 수평적인 수학화가 이루어진다. 그리고 그 기호가 더 빠른, 나은 수학적 처리를 위해 모양을 갖추게 되고, 새롭게 고쳐지게 되고 다루어지면서 수직적인 수학화가 개재되는 것이다.

예를 들면, 세기의 경우 셈이 되기 위해서는 여러 가지 대상 혹은 사건들로 이루어진 비구조화된 집합이 손으로, 시각적으로, 청각적으로, 정신적으로 구조화되어야만 한다. 반면에 다소 구조화 되어 있는 집합에서는 유용한 구조가 발견되고 강화되어야만 한다. 이것은 수평적 수학화를 요구한다. 반면에 이렇게 창조되거나 발견된 구조에 셈열을 적용하는 것은 수직적 수학화이다. 그것은 예를 들면, 직사각형 구조로 제시되거나 해석된 집합을 셈하기 위해 곱셈을 사용함으로써 구조에 의존하여 다소 세련된 방식으로 일어날 수 있다.

또 다른 예를 들면, 시각적인 닮음을 기하적으로 그리고 산술적으로 수학화하는 것은 이쪽에서 두 배인 것은 저쪽에서도 두 배가 되어야 한다와 같은 명제로 시작해서 수평적 수학화와 수직적 수학화가 서로 교대되는 경로를 따라 이루어질 수 있다. 비는 더 나아가서 스키마와 일차함수의 직선 그래프에 의해 수직적으로 수학화될 수 있고, 마찬가지로 비를 포함하는 일상적인 상황들이 수평적으로 수학화될 수 있다. 일정한 비와 선형성(linearity) 사이의 관계가 수직적 수학화의 특성인데, 비의 값과 그래프의 기울기 사이의 관계도 마찬가지이다. 고정된 비와 비례적으로 결정되는 비 모두를 포함하는 환율을 계산하는 문제나 무게에 따른 물건의 가격과 같은 상업적인 업무의 수평적 수학화는 그 업무의 특징을 그래프의 특징과 관련시키는 수직적 수학화로 이어진다.[11)]

트레퀴스는 수평적 수학화와 수직적 수학화의 어느 것이 더 강조되느냐에 따라 수학교육의 경향을 기계론적(mechanistic), 경험주의적(emphiristic), 구조주의적(structuralist) 그리고 실재론적(realistic)인 것으로 구분하였다. 기계론적 수학교육에서는 두 가지 측면 모두가 빈약한 반면, 그 반대가 실재론적 수학교육이다. 구조주의적 수학교육에서는 수직적 수학화가 대부분이고 수평적 수학화는 빈약하며, 그 반대가 경험주의적 수학교육이다.

III. 수학화의 학습-지도 방법론

수학화를 지향하는 수학의 학습-지도는 기성 수학을 부과하는 것이어서는 안되며 인류의 수학 학습 과정, 수학의 발생 과정, 수학화 과정을 학습자의 현재 상황(실재)에서 재발명하도록 안내하는 안내된 재발명 과정이어야 한다. 프로이덴탈은 수학적 지식의 발달을 상식에 바탕을 두고 더 높은 차원의 상식으로 재구성되어 가는 과정으로 보고 있으므로, 수학의 학습 지도는 상식(학습자에게 자명한 것으로 받아들여지는 실재)에서 출발하는 것이 바람직하며, 상식적인 활동을 거쳐 수학이 재발명되도록 지도해야 한다. 그렇게 하기 위해서는 수학의 학습-지도는 학습자의 현실 내에서 수평적 수학화에 적합한 풍부한 문맥과 학습 상황을 선정하고 수직적 수학화를 위한 수단과 도구를 제공하면서 수학이 재발명되도록 지도해야 한다. 여기서는 프로이덴탈이 제시하고 있는 수학화의 구체적인 지도-방법론을 알아보기로 하겠다.

11) 수직적 , 수평적 수학화의 또 다른 예는 각주 4)를 참고하기 바람.

1. 안내된 재발명 방법(method of guided reinvention)

프로이덴탈은 수학의 학습-지도는 기성 수학을 부과하는 것이 아닌, 사고 활동으로 수학을 경험시키는 것으로 그 활동을 학습하는 최선의 방법은 그것을 수행하는 것이라 하여, 학습자에게 수학적 활동의 재발명을 경험시키는 학습-지도 방법을 주장한다. (Freudenthal, 1973.) 프로이덴탈은 수학적 개념, 구조, 아이디어는 물리적, 사회적, 정신적 세계의 여러 가지 현상을 정리하고 조직하는 수단으로 발명된 것으로 보고 있으므로 그에게 수학은 그러한 현상의 정리 수단으로 학습되어야 한다. 곧 수학화, 추상화, 스키마화, 알고리듬화, 언어화를 재발명하도록 안내할 것을 주장한다.

그러나 재발명 방법은 이전에 존재하지 않았던 새로운 어떤 개념을 발명해 내게 하는 지도 방법을 의미하는 것이 아니라, 이전에 이미 발명이 된 개념을 그 개념이 발명되어 온 과정에 따라 다시 한 번 발명해 내게 하는 학습-지도 방법을 의미한다. 그러므로 그 방향은 인류의 수학 학습 과정 곧 수학화와 그 다양한 측면으로이며, 교사의 주도 아래 그 곳으로 인도한다는 '방향성'이 있음을 '안내된'이라는 용어가 시사해 준다.

그러나 그 과정은 수학의 역사를 있는 그대로 모두 반복한다는 것은 아니다. 그보다는 수학의 개념, 아이디어가 역사적으로 발달해 온 과정을 단축된 형태의 가상적인 과정으로 재구성하여, 그것을 학생들이 재현할 수 있도록 이끄는 방법이다.

프로이덴탈은, 학생들에게 이러한 역사적 학습 과정 다시 말해, 수학의 발달이라고 하는 인류 그 자체의 학습 과정을 단축된 형태의 가상적 과정으로 재현시켜 줌으로써, 수학적 사고의 경험을 할 수 있다고 보는 바, 그것은 바로 그가 '역사 발생적 원리'를 교수 현상학에서의 중요한 교수 원리의 하나로 간주하고 있음을 의미한다.

> 수학의 역사는 점진적인 스키마화(schematising)의 학습 과정이었다. 아동이 인류의 역사를 반복할 필요는 없지만, 아동이 선조가 멈춘 바로 그 지점으로부터 시작해야 한다고 기대해서도 역시 안된다. 어떤 의미에서 아동은 실제로 일어났던 역사를 반복해야 하는 것이 아니라 현재 우리가 충분히 운이 좋아서 알고 있는 그런 사실을 우리의 선조들이 알고 있었다면, 그때 일어났었을 그 역사를 반복해야 한다. (H. Freudenthal, 1983, p. 3.)

프로이덴탈이 주장하는 역사 발생적 원리에 의한 재발명 방법은 사실상 새로운 것은 아니다. 이미 오래 전부터 많은 사람들에 의해 주장되어 왔으며, 특히 20C에 들어와 발생적 원리는 수학교육 근대화 운동의 선구자인 클라인(F. Klein)에 의해서 강조되었다. 프로이덴탈의 주장도 다음의 클라인의 주장의 연장선상에 있는 것이다.

> 물론 우리는 우리의 수학교육적 입장에서 아동에게 너무 일찍 그러한 추상적이고 어려운 것을 제시한다는 인상을 주지 않도록 해야 한다. 이 점에 대한 나의 견해를 정확히 규정하기 위하여 생물학적 기본 법칙을 인용하고자 한다. 그에 따르면 개체는 종족의 전 발달 단계를 단축된 순서로 거치면서 발달한다. 이러한 생각은 오늘날 모든 사람들이 교양이 되어 있다. 나는 이 기본 법칙을 일반적으로 모든 교육에서와 같이 수학교육에서도 일반적으로 따라야 할 것으로 생각한다. 소년의 자연적인 소질과 연결시켜 인류 전체가 그 순진한 원시 상태로부터 보다 높은 인식에 다다른 그 길을 다라 천천히 높은 것으로, 마지막으로 추상적인 형식화에 이르러야 한다. 이 요구를 재삼재사 제기할 필요가 있다. 왜냐하면 중세의 스콜라 철학자의 방식에 따라 그 교육을 가장 일반적인 아이디어로 시작하며, 이 방식만을 '유일한 과학적 방법'이라고 옹호하려는 사람들이 거듭 존재하기 때문이다. 그러나 이러한 근거는 결코 옳지 않다. 꼭 과학적으로 가르친다는 것은 과학적으로 사고하도록 인간을 이끄는 것을 의미할 수 있을 뿐이지 결코 처음부터 차디찬 과학적으로 손질된 시스템으로 사고하도록 이끌 수는 없다.[12]

이러한 재발명 방법은, 수학적 사고는 수학화 곧 수학적 활동이 일어나는 실제적 과정을 재현하여 경험시킴으로서 배울 수 있다는 것을 함의한다. 이런 교수 방법은 듀이의 생각과도 일맥상통하는 것으로, 그는 '지식'을 가르칠 때 그것이 의미 있는 것이 되도록 하려면, 그 지식이 어떤 실제적인 상황과 관련되는 것인지, 어떤 실제적인 문제 사태를 해결하기 위한 수단이 되는 지를 분명히 하여 그 해결 수단으로 가르쳐야 한다고 하였다. 이와 같은 방식으로 학습된 것이 '지식'이며 이것은 단지 사실의 더미나 정보를 수동적으로 받아들인 '지식의 기록'과는 분명한 차이를 보인다.

재발명 방법을 통한 수학의 학습-지도가 의미 있게 진행되기 위해서는 무엇보다도 교수 제재(subject matter)가 실행 수학의 모습으로 주어져야 한다는 것이 중요하다. 사실상 수학의 개념, 구조는 그것이 수학자에 의해 기성 산물로서 그 모습을 드러내기 전에는 모두 실행 수학적인 모습으로 존재했던 것이기 때문에 학생들이 그것을 재발명할 수 있게 되기 위해서는 먼저 그것의 실행 수학적인 모습을 재현해 주어야 한다. 이와 같이 재발명에 의해 학습된 수학적 지식과 기능은, 보다 덜 활동적인 방법으로 학습된 것보다 더 잘 이해되고 더 잘 전이되며, 잊혀졌을 때조차 다시 회상하여 수학적 지식을 만들어 내는 것을 가능하게 한다.

이러한 입장에서 프로이덴탈은 수학의 발명 과정과 반대되는 기성의 연역적 체계에 따른 전개를 통한 지도를 '반 교수학적 전도(anti-didactical inversion)'라고 하였다.[13] 이는 수학적 엄밀성과 체계성이 이미 갖추어져 있는 수학자들에게는 만족감을 주고 분명한 이해를 가능하게 할 수 있지만 그러한 준비가 결여되어 있는 학생들에게는 의미를 줄 수 없는 것이다.

프로이덴탈은 특히 알고리듬과 사고 패턴, 문제 해결 전술과 전략 등의 수학적 사고를 재발명에 의해 학습해야 함을 강조한다. 수학은 계산학이라고 할 정도로 알고리듬은 수학의 근간이며, 현대 수학은 개념적 사고를 강조하지만 알고리듬화의 경향은 수학의 자연스러운 행보이다. 어떤 영역을 알고리듬화 하는 것은 매우 쉽게 그 영역을 초월하는 길이 되지만 알고리듬은 틀에 박힌 루우틴(routine)으로 적용되며, 이것이 그 존재 이유이고 이를 위해 창안된 것이지만 이것이 동시에 교육을 위태롭게 하는 이유가 된다. 교사는 학생들에게 알고리듬을 '가르치기' 쉬우며 학생들은 알고리듬에 사로잡히기 쉽다(우정호, 1994). 알고리듬이란, 어떤 개념이나 절차를 다루면서 떠오르는 통찰력 있는 사고를, 그것을 방해하는 혼란이나 본질적이지 않는 요소를 피하면서 오랫동안 연속해서 무의식적으로(자동적으로) 행하여 만들어진 간략해진 계산, 조작의 절차이다. 그러므로 알고리듬은 학습되어져야 하고 연습되어져야 하지만 너무 일찍 해서는 안되며 학생 스스로가 그 알고리듬의 본질적인 부분을 통찰하면서 자신의 절차를 간략하게 하는 재발명의 방식으로, 즉 알고리듬화로 학습되어야 하는 것이다. 이러한 알고리듬의 재발명은 그것이 석회화되는 것을 방지해 주며, 그 창안의 목적대로 유연성 있게 응용될 수 있다.

수학 교과서에서는 일반적으로 기성 산물로서의 수학으로 기술되어 있으나 프로이덴탈은 이를 재발명하면서 실제로 행하는 수학으로 변형하기를 기대하며 실행 수학적인 모습으로 제시되기를 기대하고 있다. 따라서 교사는 기성 산물의 형태로 제시된 교재의 내용을 재발명에 의해 행하는 수학으로 지도해야 한다. 그것은 학습자가 수학보다는 수학화를, 추상 개념보다는 추상화를, 스키마보다는 스키마화를, 공식보다는 형식화를, 알고리듬보다는 알고리듬화를, 언어보다는 언어화를 재발명하면서 활동으로서의 수학을

---

12) F. Klein, *Elementarmathematik vom hoheren standpunkteaus*, veerte Aufl., Erster Band, verlag von fulius springer, 1924, s. 289를 인용한 김용태, 박한식, 우정호, 수학교육학 개론, p. 219에서 재인용

13) 프로이덴탈은 수학적 지식은 그 본질이 조직되어지는 현상으로부터 출발되는 것이 올바른 순서라는 주장으로부터 연역적 체계에 따르는 학습-지도는 완결된 그 결과로부터 시작하는 것으로 그 전개 순서가 전자의 것에 비해 반전되었다는 것을 '반 교수학적 전도'라고 설명하였다.

경험해야 한다는 것을 의미한다. 그리고 프로이덴탈은 재발명 방법에 의한 지도에 앞서 가상적인 학생을 상대로 가르치고 학생의 반응을 상상하며 대응 방안을 준비하는 '사고 실험(thought experiment)'을 할 것을 제기한다. 이 용어는 이론 물리학에서의 중심적인 연구 방법으로, 수학 교수학에서 사고 실험이란 사고 가운데에서 활동적인 학생을 상상하면서 그들의 있음직한 반응에 미리 반응하면서 가르치는 교사나 교과서 저자의 행동을 말한다.

프로이덴탈은 교사가 어떤 방법을 통하여 학생들을 재발명의 과정으로 인도할 것인가에 대해 트레훠스가 제안한 다음의 원리를 추천하고 있다. (A. Treffers, 1987, pp. 248-250.)

(1) 구체적인 현상의 탐구 원리

교수학적 현상학을 기반으로 하는 점진적인 수학화를 추구하는 수업에서는 첫째 교수 학습 단계는 구체적인 문맥에서 시작되며 이 단계에서는 수학화를 염두에 두면서 여러 개념과 구조가 드러나는 현실 상황들을 탐구한다. 이 탐구의 목적은 여러 개념과 구조의 본질적인 측면이 미리 형성되는 풍부한 직관적인 관념들을 모으는 데 있다. 이 단계에서는 문맥의 역할이 본질적이다.

(2) 수직적 도구에 의한 수준 상승의 원리

수학적 개념이나 기능을 학습하는 것은 장기간에 걸쳐서 진행되는 과정이고 다양한 추상화 수준에 따라 이행되는 과정이다. 수직적 도구라는 의미는 처음 수준에서의 직관적, 구체적, 비형식적 문맥에 결합된 조작과 반성적, 추상적, 형식 체계적 조작 사이의 수준 차를 연결하는데 도움이 되도록 처음부터 여러 자료, 화살표 기호와 같은 시각적 모델, 상황 모델, 스키마, 다이어그램, 그리고 기호와 같은 수학적 도구들이 제공되고, 탐구되고, 개발된다는 것을 의미한다. 이 단계에서는 이런 수학적 도구들이 그대로 부과된다기 보다는 학생들이 그 문맥에 맞는 자신의 생각을 표현할 수 있는 도구들을 만들어 보는 단계가 포함되어야 한다. 예를 들면, 수식을 나타낼 때도 x, y와 같은 고정된 문자로 시작하기 보다는 그 문맥에서 사용되는 용어의 약어나 암호와 같은 도구들을 사용할 기회를 주는 것이 바람직하다. 이 때, 구체적이거나 또는 추상적이었던 것이 고학년에서는 구체적인 것이 될 수도 있고 고학년에 가면 산술 체계 자체가 대수를 위한 구체적인 조작이 될 수 있다.

점진적인 수학화의 관점에서 이것은 한 번의 비약이라기 보다는 오히려 한 단계씩 한 단계씩 전진하는 것이다. 수학화 과정의 수평적 성분들은 문제가 드러나는 현실 상황의 다양성과 개념 형성에 필요한 여러 관념을 풍부하게 표현해 주는 반면 수직적 성분은 학습 과정에 필요한 체계적이고 주제 지향적이고 형식적인 지식과 능력들을 표현해 준다. 학생들이 목표로 하는 도달점에 이르는 과정은 말쑥하게 정돈된 격자 모양이 아니라 누덕누덕 기워 놓은 것과 같은 모양을 나타낸다. 단지 교사는 학생들이 미궁으로 빠지지 않도록 하면서 목표에 이르는 길을 발견할 수 있도록 안내하는 것이다.

(3) 학생의 창작 활동을 통한 반성적 사고의 촉진 원리

수준 상승은 반성적 사고에 의해서 촉진되며, 갈등이나 학생들 자신의 창작 활동은 반성적 사고가 일어나도록 하는 데 도움이 될 수 있다. 학생들은 이미 접한 학습 가닥들을 반성하고 앞으로 무엇이 진행될 것인지에 대한 것을 예언할 기회를 계속해서 가져야 한다. 이런 반성적 사고를 가능케 하고 학생들의 창조적 활동을 더욱 활성화하기 위해서는 주어진 문맥을 다루어 가는 것도 중요하지만, 어떤 단계에 이르러서는 좀 더 새로운 상황에 직면하도록 할 필요가 있다. 현실과 관련된 또는 수학적인 문제로서 매우 다양한 해결책들과 때로는 수학화의 다양한 수준에 따른 해결책들을 허락함으로써, 길포드(Guilford)의

발산적인 생산을 비추어 주는 상대적으로 열린 문제들과 해결되기 전에 자료나 준거들을 스스로 보충할 것을 요구하는 불완전한 문제들을 해결하는 것도 필요하고, 다른 학생들을 위해 저술되는 어떤 주제 또는 어떤 과정에 대한 시험지 또는 문제집으로 자기 자신의 문제들을 고안하기 등을 들 수 있다. 또한 보다 광범위한 문제들이 있는데 이것은 여러 기호, 언어적 도구, 기호, 스키마 또는 모델들을 고안하는 것을 포함한다. 이런 활동들을 통해서 학생들은 수업에서 수학화의 과정을 자신이 결정할 수 있다.

교수 학습 과정에서 학생들은 자신의 창작 활동을 통해서 다음과 같은 경험을 할 수 있다. 첫 번째는 현실과 관련된 열린 문제 또는 불충분한 문제를 해결한다는 것은 수학적 도구에 의해서 현실의 여러 현상들과 그것들을 기술하고 조직화하는 것을 의미한다. 이런 연결이 지속되면 수학적 태도 즉 현실 상황을 수학화하는 수평적 수학화를 개발하는 데 도움이 될 수 있다. 두 번째는 수학적 자료를 조직화해 봄으로써 수학화의 기회를 극대화할 수 있다. 예를 들어, 342개의 스티커를 5명의 아동에게 공평하게 분배하는 과정에서 시작해서 세로 나눗셈을 나름대로 발명해 보고 처음에는 더딘 방식으로 진행되다가 나중에는 단축화와 스키마화가 이루어지고 최종적으로는 표준 알고리듬으로 인도하는 방식으로 진행되고 6394/12의 결과가 532, 533, 약 530과 같은 결과를 갖게 되는 이야기를 발명해 봄으로써 중요한 수학화의 경험을 할 수 있다. 세 번째는 학생들은 그들 자신의 창작 활동을 통해서 그들의 잘못된 아이디어와 오개념을 드러냄으로써 교수 학습 과정의 반성과 예견의 이론적 기반을 제시해 준다. 이것은 진단적 가치를 더해 주며, 올바른 진단은 학습과 교수의 성공적인 교정을 보장한다. 네 번째는 용어, 기호, 기호법, 스키마 그리고 모델들을 만드는 것은 수평적, 수직적 수학화 모두에 공헌한다. 어린 아동의 경우에 일, 십, 백,…, 억, 조, 경 등을 알고 있을 때, 그 다음 단위의 이름을 발명해 본다던가 문제 풀이 과정에서 필요한 여러 기호 등을 만들어 보는 것으로부터 여러 스키마를 만드는 일은 학생들에게 많은 반성의 기회를 줄 것이다.

위에서 살펴본 바와 같이 학생들은 자기 자신의 창작 활동을 통해서 수학화 과정에서 핵심적인 역할을 수행하며, 좀 더 형식적인 수학적 관념, 연산, 구조 등으로 이동하는 것이 용이해진다. 그러나, 전통적인 수업은 학생들의 가능성을 단지 수동적으로 받아들이는 데서 찾고자 했기 때문에 조기에 형식적인 수학을 제시하게 되었고 그 커다란 간극 때문에 아동들에게 정신적인 퇴보 현상을 불러 일으켰다고 볼 수 있다. 교수 과정에서 중시해야 할 것은 출발 단계에서는 학생들의 비형식적 방법을 이용할 기회를 극대화시키는 것이고 자신들의 활동을 반성케 함으로써 단축과 간소화, 또는 자신에 대한 진단을 할 수 있는 기초를 제공할 수 있도록 해야 하며, 더 나아가서는 표준의 형식적인 절차와의 접목이 이루어지도록 해야 한다. 우리는 또한 이런 근원을 역사적인 수평적 그리고 수직적 수학화에 의해서 어떤 암시를 받을 수 있다.

(4) 상호 작용 교수 원리

학생들 자신의 창작 활동뿐만 아니라 현상학적 탐구와 모델링은 그것들이 상호 작용 수업 즉 서로 상의하고, 참여하고, 타협하고, 협동하고 그리고 개관할 기회가 주어지며 교사는 설명 위주가 아니라 조력자로서의 역할을 담당할 때, 효율적으로 이루어질 수 있다. 이런 과정에서 고려해야 할 점은 기본적으로 개별화하되, 다른 한편으로는 단일화할 수 있도록 수업 과정을 고안해야 한다는 것이다. 교과 내용은 다소 자체로서 완비된 단원들의 구역으로 분할되고 각 단원은 몇 주간의 시간을 필요로 한다. 같은 나이의 학생들은 같은 단원에서 같이 시작하고 계속 같은 그룹에 머무르면서, 그들은 서로를 도와서 향상시킬 수 있고, 상의와 협동할 기회 그리고 결과적으로 반성과 반복의 기회가 있다. 각 학생은 개인적으로 연구할 기회를 갖고 그룹과 분리되지 않은 상태에서 자기 자신의 경로를 구성할 기회를 갖는다. (Treffers, 1987, p. 261.)

랑게 (De Lange)는 협동 학습에 있어서 두 사람의 공동 연구는 이해의 원천일 뿐만 아니라 다른 사람과의 접촉의 원천이며 이것은 활동의 역학에 큰 도움이 된다고 말한다. 그들이 이해되어야 한다는 사실 때문에 상대방으로부터 오는 여러 가지 갈등이 단순히 여러 가지 사실에서 발생되는 한 사람의 학습자에게 직면하는 갈등보다 더 잘 지각된다는 것이다. 수학 교수 학습에서 학생들은 항상 서로 다른 인지 수준과 서로 다른 문화적 배경 속에서 활동하므로 서로간의 인지적 갈등이 있게 마련인데 이 상황을 최대한으로 만드는 것이 교사, 연구자 그리고 교육과정 개발자들의 의무임을 주장한다. 따라서, 학생들은 상호 작용 교수를 통해서 자기 자신의 생각을 재고하면서 반성할 기회를 갖고 보다 나은 아이디어를 창조해 낼 수 있다.

이런 상호작용의 중요성을 강조하는 것은 디인즈(Dienes)가 동질의 학급을 최선으로 삼은 반면 프로이덴탈은 이질 학급의 구성을 중요시하게 된 근본적인 차이점을 드러내 준다. 구성주의에서도 역시 상호작용 수업을 주장하고 갈등과 반성을 중시하나 점진적인 수학화를 추구하는 수업에서는 그 목표가 형식적인 수학으로 나아가는 촉진제의 역할이고 구성주의에서는 학생들의 합의를 이끌어 내기 위한 역할을 담당하는 것이다. 이런 차이점은 근본적으로 수학관의 차이에서 비롯된다고 볼 수 있다.

(5) 학습 가닥의 혼합을 통한 구조화 원리

장기 학습 과정의 의미로 볼 때 과거의 학습과 미래의 학습은 서로 통합되어야 한다. 과거에는 너무 작은 단계별로 쪼개어 가르치거나 너무 체계적으로 가르쳤기 때문에 오히려 학습자 자신의 실제에서 보면 맥이 끊기는 결과를 초래했다. 그러나, 비형식적인 방법에서 나타나는 학생들이 선호하는 방법을 억압할 것이 아니라, 그것을 활용해야 한다. 예견 학습이란 이런 선호하는 방법을 활용하는 학습을 의미한다. 즉, 체계적이고 형식적으로 다루어지기 전에 여러 문맥에서 일상 언어로 상식적인 내용으로 접할 수 있도록 다양한 비형식적인 기회를 제공함으로써 나중에 체계적 학습의 발판이 되도록 하는 것을 의미한다. 여기에 대응되는 개념으로 회고 학습이 있는데, 오래된 학습 문제를 적절할 때마다 더 높은 견지에서 더 넓은 문맥에서 재고의 가치가 있을 때마다 회상하는 것을 의미한다. 일반화나 언어화가 이루어지자마자 과거의 경험은 새로워지고 패러다임적인 요소들이 동형에 대한 일반적인 특징으로서 이해되어야 한다. 이전의 생각을 재고해 보는 것은 더 깊은 이해를 가져온다. 따라서, 학습자에게는 예견 학습이 허용되고 자극되어야 하고, 회고 학습이 교수에 의해 조직되고 학습 습관으로서 활성화되어야 한다. (Freudenthal, 1991, pp. 118-119.)

수학을 배운다는 것은 단편적인 지식과 기능을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 지식과 기능을 하나의 구조화된 전체로 조직하는 것이다. 따라서, 새로운 개념과 기능은 기존의 지식체에 적절하거나 아니면 기존의 지식체 자체가 이 새로운 개념과 기능에 의해 새롭게 조직되어야 한다. 따라서, 우리는 새로운 관점에서 기존의 지식을 살펴보는 기회를 마련해야 하고 교사는 이런 기회를 충분히 제공해야 한다. 따라서, 예견 학습은 하나의 새로운 개념과 기능을 알기 위한 출발점이며 회고 학습은 새로운 개념과 기능을 알았을 때, 기존의 지식체를 새로운 안목에서 보는 것을 말한다.

예견 학습과 회고 학습의 연장선상에서 학습 가닥의 혼합을 생각해 볼 수가 있는데, 이것은 관련된 학습 과정을 전체로서 보는 관점이다. 학습은 가능한 한 일찍부터 지속적으로 강하게 서로 얽혀 있는 여러 가닥들로 조직되어야 한다.

예를 들면, 비와 분수는 처음부터 함께 출발할 수 있다. 분리된 여러 대상을 시각적으로 비교하는 것은 하나의 대상을 여러 부분으로 비교해 보는 것과 같고 수직선과 비례표에 대한 이중의 비율 표현은

비와 분수를 서로 관련짓는 도구이며 같은 아이디어에 대한 다른 표현이 된다. 또한 이런 비는 비례 관계로 연결되고 이것은 또다시 일차 함수로 연결된다. 혼란스러워 보이는 것을 잘 조직하고 체계화하는 것은 안내된 재발명의 또 하나의 과제이다.

수학이 수직적으로 다양한 주제들이 분리되어 지도되고 횡적 연결을 무시한다면, 수학을 응용하기는 어렵다. 응용에서 우리는 보통 대수 한 가지만 또는 기하 한 가지 만이 아니라 더 많은 것들을 필요로 한다. 학생들은 여러 다른 수학적 모델들을 비교하고 통합할 수 있어야 한다. 따라서, 횡적, 종적인 학습 가닥의 혼합을 통해서 전체적인 구조화가 이루어져야 한다. 그리고 동시에 처음부터 응용과 순수 수학이 결합되어야 하며, 현실이 수학적 구조와 개념의 근원이자 응용 영역이어야 한다.

학습 가닥의 혼합이 가능한 이유는 현상학적 출발 즉, 수학적 구조의 개념이 드러나는 실제 현상에 깊은 발생의 근원을 갖고 있다고 말할 수 있다. 그 이유는 한 가지 구조나 한 가지 개념만을 포함할 만큼 순수한 현상은 현실 세계에서는 드물기 때문이다. 따라서, 다시 한 번 문맥의 중요성을 고려해야 하며 여러 가닥을 포함하고 있는 하나의 상황 모델로서 작용하는 문맥을 찾아내는 것이 중요하다.

2. 실재와의 관련성이 적재된(bond with reality) 수학

프로이덴탈에 따르면, 수학은 수학화를 통해서 발생해 왔고 발생한다. 그리고 수학화란 비수학적인 어떤 것 혹은 더 낫게, 더 세련되게, 더 명확하게 될 필요가 있는 아직은 덜 수학적인 어떤 것을 수학화하는 것이다.

따라서 수학화란 실재, 실재의 일부를 수학화하는 것이며, 여기에서 실재란 고정되어 있는 것이 아니라 각 사람에게 그의 내적인 이해와 외적인 환경의 상태에 따라 변하는 유동적인 것이다. 여기에서 중요한 것은, 수학화되어야 할 실재는 학습자의 실재, 곧 학습자가 그것을 안내되어 온 실재이어야 하며, 그럴 때 수학화는 학습자 자신의 의미 있는 활동일 수 있다. 더욱이 실재로서 제시되어야 할 문제 문맥은 전형적인 것으로 수학적 구조 내용의 강력한 심상을 구성하게 하고 수직적 수학화의 잠재력을 갖고 있어 추상적인 지식과 기록에 실제적인 의미를 부여하는 동시에 응용으로서 일어날 수 있는 넓은 범위의 실제적인 현상을 대표하는 것이어야 한다.

수학은 수학화를 통해 발생하며, 수학화는 실재를 수학화하는 것으로 보면, 이에 대응되는 재발명 방법은 학생들에게 수학화의 경험을 제공하기 위한 것이며, 재발명의 본래의 의도는 학생들에게 감정이입이 가능한 실재, 다시 말하면, 자신의 상상력을 발휘할 수 있는 실재를 제공함으로써 학생들의 창조적 활동을 가능하게 하는 것이다. 그러나, 학생들에게 얼마나 현실적인가 하는 것은 각 개인마다 다르다. 그렇지만, 수학화가 교수학적으로 재발명으로 번역되는 한은 수학화되어야 할 실재는 학습자의 실재이며, 학습자가 안내되어 왔던 실재이고 수학화는 학습자 자신의 활동이다. 따라서, 학생들에게 의미 풍부한 실재적 문맥을 제공하는 것이 점진적인 수학화의 가장 중요한 초기 단계라고 볼 수 있다. 학생들에게 감정이입이 가능한 실재가 무엇인가는 개인적으로 역사적으로 매우 다양하다. 학생들에게 제공되는 실재는 생명력 있는 원초적인 실재이어야 한다.

수학의 기본적인 능력과 개념을 지도하려면, 가능한 한 부차적인 소음을 제거하는 것이 교수학적 원리가 되어 왔지만, 일단 학습된 수학이 적용되려면 이런 소음은 불가피한 것이다. 이 세상은 소음으로 가득 차 있고 이 세계를 수학화한다는 것은 본질을 찾는 것 그리고 소음 내에 있는 메시지를 이해하는 것을 뜻한다. 근본적인 실재로부터 본질적인 것을 찾고 소음 내에서 메시지를 감지하면서 그것이 만들어지기까지의 수학화 과정으로 재발명된 수학적 내용, 구조는 학습자에게 수학적인 '안목'이 됨과 동시에 생활 및 과학의 도구로서 실제적인 응용 가능성을 가질 수 있다는 것이다. 따라서, 수학화는 원초적인 실

재에서 통합된 점진적 알고리듬화를 통해 이루어져야 하며, 소음 내에서 본질을 찾고 메시지를 감지하는 것이다. 그러나, 기성 스키마와 알고리듬, 즉 결과만을 먼저 제시하는 경우에는 본질을 파악할 수가 없고, 학생들에게 풍부한 의미를 제공해 주지 못하기 때문에 학습자의 안목으로 통합되지 못하고 현실에서 그것을 적절히 사용할 수 없다. 따라서, 원초적 실재에서 문제를 형식화함으로써, 본질을 찾고 학습 과정의 결과뿐 아니라, 본질적인 과정 자체도 기억해야 한다.

수학화를 중요시하는 근거는 학생들에게 수학화 경험을 통해서 수학에 대한 보다 수준 높은 이해와 자신의 세계를 이해하는데 수학적 수단을 사용할 줄 알도록 하는 것이다. 이것을 응용 가능성이라고 한다면 응용은 처음에는 수학 그리고 나서 실재 세계로 돌아가는 것을 의미하는 것이 아니라 처음에 현실세계에서 출발해서 수학화 과정을 거치고 다시 현실 세계로 돌아올 수 있도록 하는 것을 의미한다. 이것을 가능하게 하기 위해서 즉 이런 실재와의 결합을 창조하고 강화하고 유지하기 위해서는 풍부한 문맥을 학생들에게 제시해야 하며 이를 기반으로 수평적 수학화와 수직적 수학화가 교대로 이루어질 수 있도록 하는 것이 중요하다.(Freudenthal, 1981-1, p.144)

문맥이란 '어떤 구체적 수업 과정에서 학생들에게 열려 있는 수학화되어야 할 실재의 영역'을 의미한다. (Freudenthal, 1991, p. 73.) 이것은 교수학적 현상학에서 학생의 실재를 분석함으로써 찾아낸 수학을 포함한 현상들을 교수학적으로 다소 정돈한 것이라 볼 수 있다. 풍부한 문맥은 교수학적으로도 그리고 학생들에게도 의미가 풍부해야 하고, 수학은 여러 문맥 내에서 지도되어야 하며 아무리 추상적인 수학이라 하더라도 구체적인 문맥에서 시작되어야 함을 의미한다. 이때, '실재적'이나 '구체적'이라는 의미를 van den Brink(1991, p.80)는 아동들이 그 상황을 상상하고, 자신의 아이디어, 경험, 환상을 구현할 수 있다는 의미로 보았다. 그러나, 전통적으로 우리가 문맥 문제라고 생각해 온 문장제 문제와 구체성을 강조하는 수업 자료들은 사실상은 인위적인 요소가 많으며, 진정한 재발명에 의한 수학화 활동이 이루어지기는 부적절하다.

우선 텍스트는 언어학적 매개물 또는 문장제 문제로 불린다. 그러나, 우리가 대하는 교과서에서는 각 문제의 문맥이 풍부하지 못하며 단지 하나의 해를 갖는다. 이러한 문맥은 적절한 실재라기 보다는 구체적인 문제에 의한 내용 도입 이후 등장하는 흔히 '응용'이라고 불리우는 것으로 단지 수치만 바꾸는 것이거나, 본래의 것과 동형인 이미지를 갖는 의사-동형(pseudo-isomorphic)의 세계를 묘사한다. 학생은 교과서 저자에 의해 그려진 의사 동형 사상을 발견하고 이런 의사-동형이 마치 실재와 연결된 것처럼 보이는 여러 문제를 풀도록 기대된다. 이런 교수학이 학생들의 반 교수학적 태도를 만들어 내는 것은 너무도 당연하다. 교과서에서 문장제 문제를 다룰 때, 풀리지 않거나 여러 개의 해를 갖는 '실재'와 관련된 풍부한 문맥이 다루어져야 한다.

트레훠스는 수학화를 추구하는 수업을 위한 초기 단계에서의 수학적 활동은 구체적인 문맥에서 이루어져야 하며, 고려 중인 여러 개념과 여러 구조가 드러나는 실제 현상들이 여러 가지로 탐구되어야 하고, 여러 개념과 구조의 본질적인 측면이 미리 형성되는 풍부한 직관적인 관념들을 형성해야 한다고 말한다. (Treffers, 1987, p. 248.) 이때 사용되는 문맥 문제들은 특별한 형태, 내용 그리고 기능들을 갖는다. 트레훠스는 문맥 문제들의 여러 가지 기능을 다음과 같이 설명한다.

① 개념 형성: 수업 과정의 초기 단계에서 문맥 문제들은 학생들에게 수학에 대한 자연스럽고 동기를 부여하는 접근을 가능하게 한다.

② 모델 형성: 문맥 문제들은 사고를 위한 중요한 뒷받침을 할 수 있는 다른 자료들과 시각적인 모델들과 더불어 형식적 연산, 기호법, 규칙 등을 학습하기 위한 확고한 기반을 제공한다.

③ 응용 가능성: 문맥 문제들은 근원이자 응용 영역의 원천으로서의 현실을 드러낸다.

④ 특수한 산술 능력들을 응용 상황에서 연습할 기회를 제공한다.

다시 말하면, 문맥 문제들은 수평적 그리고 수직적 기능을 모두 가지며, 한편으로 수학적 지식과 능력을 적용 가능하게 하고 다른 한편으로 형식적인 조작에 풍부한 의미를 부여할 수 있다.

초기의 초등 수준에서는 학생들의 직접적인 활동을 통하거나 그들의 상상의 세계를 표현하는 문맥들도 고려할 수 있어야 할 것이다. 가장 감각적인 자료로써 학생들의 신체를 이용한 활동을 생각해 볼 수 있다. 예를 들어, 아동들이 원 주위로 둘러앉아 있을 때, 둘러앉은 순서대로 번호가 매겨지고 계속해서 몇 바퀴씩 돌면서 번호가 매겨진다면 7명의 아동이 둘러앉아 있었다면 첫 번째 학생은 계속해서 어떤 번호들을 갖게 될 것인가? 그리로 다른 학생들은? 아니면 100이라는 순번을 갖게 되는 학생은 몇 번째 학생인가? 등등의 문제를 생각해 볼 수 있다. 이 문제는 사실상 풍부한 문맥의 역할을 담당하는데, 이것은 곱셈과 구구단으로 연결될 수 있고, 나눗셈으로 연결될 수도 있고, 이것이 반성된다면 수직적 수학화에 대한 예견 학습이 될 수 있다. (H. Freudenthal, 1991, p. 50.)

문맥은 수업 초기 단계에서도 중요하지만 전반적인 수업 과정에서 다루어져야 하며, 그 단계는 다음과 같다. 첫 번째 단계는, 현실 세계 상황 또는 현실 세계의 문맥 문제는 처음에는 그것을 수학화하려는 관점을 가지고 직관적으로 탐구된다. 이것은 그 문제를 조직화하고 구체화해서, 그 문제의 수학적 측면들을 알아내고, 규칙성을 발견하는 것을 의미한다. 이런 강한 직관적 성분을 갖는 초기의 탐구는 수학적 개념의 개발, 발견 또는 재발명으로 인도되어야 한다.

두 번째 단계는 학생들간의 상호 작용 그리고 학생들의 사회적 환경, 형식화하고 추상화하는 능력과 같은 요인들에 의존해서, 이 학생들은 곧 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출해 낼 것이다. 동시에 수학화 과정에 대한 반성이 필수적이다.

세 번째 단계는 형식화와 추상화의 단계로서, 예상되고 결과적으로 발생되는 수학적 개념들에 대한 기술이고, 이어서 좀 더 엄격하고 형식적인 정의가 뒤따른다. 네 번째 단계는, 그 개념들을 새로운 문제들에 적용함으로써 주요 결과들 중의 하나는 그 개념들을 강화하고 수학화 기능을 개발하며, 일반화된다. 마지막으로 해결된 문제들은 현실 세계에 대한 학생들의 관점에 영향을 미치게 될 것이다. 문맥이 수업에서 다루어지는 과정은 다음과 같이 하나의 학습 사이클로 표현될 수 있다. (De Lange, 1987, A, p. 244.)

<그림 7-1> 수업에서의 수학화 과정

	현실 세계	
피드백 ↗		↘ 수평적 수학화
현실에의 응용	수학화	개념의 추출과 반성
응용적 수학화 ↖		↙ 수직적 수학화
	추상화, 형식화	

실재와의 관련성이 적재된 수학을 수학화로 경험시키기를 기대하면서 프로이덴탈은 학교 수학의 여러 가지 개념에 대해 현상학적 분석과 교수현상학적 분석을 통해 그 본질을 밝히고 그에 대한 상세화된 학습 수준을 밝히고자 하였다. 그러한 분석을 바탕으로 적절한 문제 문맥으로부터 탐구를 통해 수학적 조작을 구성하고 행한 것을 반성하여 객관화함으로서 수학적 사고가 발전해 갈 수 있는 교수학적 배려가 요구되는 것이다.

참 고 문 헌

김응태, 박한식, 우정호 (1984). *수학 교육학 개론.* 서울: 서울대 출판부.

박교식 (1992). *함수 개념 지도의 교수현상학적 접근.* 서울 대학교 박사 학위 논문

우정호 (1994). *H. Freudenthal의 현상학적 수학교육론 연구.* 대한 수학교육학회 논문집 4(2), 93-128.

이홍우 (1992). *지식의 구조와 교과.* 서울: 교육 과학사.

이홍우(역) (1990). *교육의 과정* (J. S. Bruner의 *The Process of Education*). 서울: 배영사.

De Lange, J., & Verhage, H. B. (1987). Math A and achievement testing. *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3*, 243-248.

Dewey, J. (1956). *The Child and the Curriculum.* Chicago: University of Chicago Press.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach Mathematics, So as to be useful. *Educational Studies in Mathematics 1*(1).

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1981). Major problems in mathematics education. *Educatioal Studies in Mathematics 12*, 133-150.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions.* Dordrecht: D. Reidel.

Van den Brink (1991). Realistic arithmetic education for young children. In L. Streefland, *Realistic Mathematics Education in Primary School* (pp. 77-92). Utrecht: CD-Press, Freudenthal Institute.

<Abstract>

Mathmatization As a Method of Teaching Mathematical Thinking

Yoo, Hyun Joo[14)]

Researchers have insisted that mathematics should be learned not as a product but as a process. Nevertheless school mathematics has chosen 'top-down' method and has usually instilled into the mind of students the mathematical concepts in the form of product. Consequently school mathematics has been learned by students without the process of inquiring and mathematical thinking. According to Freudenthal, it is a major source of all problems of mathematics education. He suggested mathematising as the method for "teaching to think mathematically". "Teaching to think mathematically" through the process of mathematization, interpreting and analysing mathematics as an activity, is a means to embody the purpose of mathematics education.

14) Chonju National University of Education (128 Dongseohak-dong, Wansan-gu, Chonju, Cheonbuk 560-757, Korea; Tel: 0652-81-7140; FAX: 0652-81-0102); E-mail: hjyu@yc2.cjonju-e.ac.kr.)