

## 연속슬래브교량의 고유진동해석에 대한 수치모형

박 제 선\* · 심 도 식\*\* · 이 정 호\*\*\* · 정 경 일\*\*\*\*

### Numerical Modeling of Reinforced Concrete Bridge Panels for Vibration Analysis

Park, Je-Sun\* · Shim, Do-Sik\*\* · Lee, Jung ho\*\*\* · Jung, Kyoung-Il\*\*\*\*

#### ABSTRACT

The problem of deteriorated highway concrete slab is very serious all over the world. Before making any decision on repair work, reliable non-destructive evaluation is necessary. One of the dependable methods is to evaluate the in-situ stiffness of the slab by means of obtaining the natural frequency. By comparing the in-situ stiffness with the one obtained at the design stage, the degree of damage can be estimated rather accurately.

In this paper, the numerical modeling of vibration analysis to three span continuous reinforced concrete bridge with elastic intermediate support is presented.

#### 1. 서 론

거더와 cross-beam, 콘크리트 상판을 포함하는 대부분의 교량 구조는 특별직교 이방성판과 같이 거동하며 이러한 패널 뿐아니라 건물 바닥판 패널의 몇몇 경우도 단순지지된 특별직교 이방성 판과 같이 거동한다. 이러한 특별직교이방성 판의 진동해석에 있어서, 기술자들은 설계시 고유진동수를 계산하는 것을 필요로 하지만 이러한 문제에 있어서 정확한 해를 구하기는 매우 어렵다<sup>[1],[2],[3]</sup>.

현재 가장 많이 쓰이고 있는 RC Slab는 특별직교 이방성 복합판으로 좀더 정확한 해석이 가능하다. 이러한 특별직교 복합판의 휨에 대한 지배방정식은 처짐  $w$ 에 관한 4차편미분 방정식으로 표시된다. 유한차분법을 사용하여 풀려면 소요되는 점의 수가 너무 많아서 경계조건을 이용하여 가상점을 소거시키는데 애로사항이 많으며 계산상 혼잡을 일으킨다. 그러나 평형방정식을 사용하여 미지수 3개를 가진 3개의 2차 연립편미분 방정식으로 나타내면 문제를 좀더 단순화 시킬 수 있고, 이 3개의 방정식을 풀면 최종적으로 처짐과 모멘트를 한번에 구할 수 있는 장점이 있다<sup>[7]</sup>. 차분법에 의한 matrix는 경계조건 등을 포함하여, tri-diagonal matrix 해법으로 해를 구할 수 있다<sup>[6]</sup>.

이 논문에서는 3연속 R.C Slab 교량을 특별

\* 강원대학교 토목공학과 교수  
\*\* 강원대학교 토목공학과 시간강사  
\*\*\* 강원대학교 토목공학과 박사과정  
\*\*\*\* 강원대학교 토목공학과 석사과정

직교 이방성 판의 진동해석과 처짐, 모멘트, 응력을 동시에 구할 수 있는 수치 모형을 제시하였고, 이방성 일때 강성값의 변화에 따른 영향에 대하여 고찰 하였다.

## 2. 탄성지지된 특별직교 이방성 복합판의 유한차분법에 의한 해법

탄성지지된 특별직교 이방성 판의 지배 방정식은 다음과 같다<sup>[4]</sup>.

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) - kw \quad (1)$$

여기서  $D_1 = D_{11}$ ,  $D_2 = D_{22}$ ,  $D_3 = 2(D_{12} + 2D_{66})$ 이다.

위의식 (1)은 4차의 단일 미분항을 갖기 때문에 중앙 차분식을 사용하여도 소요되는 점의수가 5개가 되어 계산상 혼잡을 일으킨다. 그러한 혼잡을 피하기 위해서 다음과 같이 세 개의 종속변수  $w$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ 를 가진 세 개의 2차 연립 편미분 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y) + kw(x, y) \quad (2)$$

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4)$$

첫 번째식의  $4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$  항은 4차 편미분식이지만 2차 차분식으로 표기되므로 pivotal point의 수를 줄일 수 있다. 2차원 좌표계를 사용할 때 요소 크기는 각각 X와 Y의 증분인  $\Delta X$ 와  $\Delta Y$ 로 주어질 수 있으며, MI를 X방향에 주어진 점의수라 하고 MJ를 Y방향의 점의수로 하여 판의 구간을 나누었다. 우선 각 경계선을 제외한 대표적인 구간에 대하여 J방향으로 차분식을 세우면 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} [M_x(i-1, j) - 2M_x(i, j) + M_x(i+1, j)]$$

$$- \frac{4D_{66}}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} \begin{vmatrix} w(i-1, j+1) & -2w(i, j+1) & w(i+1, j+1) \\ -2w(i-1, j) & 4w(i, j) & -2w(i+1, j) \\ w(i-1, j-1) & -2w(i, j-1) & w(i+1, j-1) \end{vmatrix} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \begin{vmatrix} M_y(i, j+1) \\ -2M_y(i, j) \\ M_y(i, j-1) \end{vmatrix} - kw(i, j) = -q(i, j) \quad (5)$$

$$M_x(i, j) + \frac{D_{11}}{(\Delta x)^2} [w(i-1, j) - 2w(i, j) + w(i+1, j)] + \frac{D_{12}}{(\Delta y)^2} \begin{vmatrix} w(i, j+1) \\ -2w(i, j) \\ w(i, j-1) \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

$$M_y(i, j) + \frac{D_{12}}{(\Delta x)^2} [w(i-1, j) - 2w(i, j) + w(i+1, j)] + \frac{D_{22}}{(\Delta y)^2} \begin{vmatrix} w(i, j+1) \\ -2w(i, j) \\ w(i, j-1) \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

위의식에서

$$C_1 = \frac{1}{(\Delta x)^2}, C_2 = \frac{1}{(\Delta y)^2}, C_3 = \frac{4D_{66}}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2},$$

$$C_4 = \frac{D_{11}}{(\Delta x)^2}, C_5 = \frac{D_{12}}{(\Delta y)^2}, C_6 = \frac{D_{12}}{(\Delta x)^2}, C_7 = \frac{D_{22}}{(\Delta y)^2},$$

$F_1 = C_4 + C_5$ ,  $F_2 = C_6 + C_7$ ,  $F_3 = \frac{1}{2}(4C_3 + k)$ 라 정 의하면 (7)은 다음과 같이 정리된다.

$$C_1 |M_x|_{i=1} - 2C_1 |M_x|_i - C_3 \begin{vmatrix} w_{j+1} \\ -2w_j \\ w_{j-1} \end{vmatrix}_{i=1}$$

$$- 2 \begin{vmatrix} -C_3 w_{j+1} \\ F_3 w_j \\ -C_3 w_{j-1} \end{vmatrix}_i + C_2 \begin{vmatrix} M_{y_{j+1}} \\ -2M_{y_j} \\ M_{y_{j-1}} \end{vmatrix}_i = -|q|_i \quad (8)$$

$$|M_x|_i - C_4 |w|_{i=1} - \begin{vmatrix} C_5 w_{j+1} \\ -2F_1 w_j \\ C_5 w_{j-1} \end{vmatrix}_{i=1} = 0 \quad (9)$$

$$|M_y|_i - C_6 |w|_{i=1} - \begin{vmatrix} C_7 w_{j+1} \\ -2F_2 w_j \\ C_7 w_{j-1} \end{vmatrix}_{i=1} = 0 \quad (10)$$

식(8),(9),(10)은 경계 선을 제외한 전형적인 선에서의 차분식이다. 어떤 전형적인 선을

고려하고,  $x=0$ 인 원점으로부터  $I$ 번째의 것이라고 하자. 모든 선이  $MJ$ 개의 균등한 거리를 가진 점으로 대치된다고 가정하면, 각점에서 평형방정식(2),(3),(4)식이 만족되어야 한다. 또한 경계선에서는 각 선의 경계조건을 만족시켜야 한다.  $j=1$ 부터  $j$ 가 증가하는 방향으로 먼저 (2)식을 적용시키고, 다음에 (3)과 (4)를 차례로 적용시키면서 순서대로 배열하면 새로운 matrix  $XI$ 는 식(11)같이 정의할 수 있다.

$$X_I = \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_{MJ} \\ Mx_1 \\ \vdots \\ Mx_{MJ} \\ My_1 \\ \vdots \\ My_{MJ} \end{bmatrix}_{3MJ \times 1} \quad I=1,2,\dots,MI \quad (11)$$

또한 Matrix를 사용하여 전형적인  $I$ 선상의 평형방정식을 다음과 같은 하나의 matrix방정식으로 표시할 수 있다.

$$SX_{I-1} + TX_I + SX_{I+1} = F_I \quad (12)$$

여기서  $F_I$ 는 차분방정식의 오른쪽항이  $X_I$ 와 같은 순서로 배열된 matrix로 식(13)과 같다.

$F_I$ 는 차분방정식의 오른쪽항이  $X_I$ 와 같은 순서로 배열된 matrix로 식(13)과 같다.

$$F_I = \begin{bmatrix} -q(i,j) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3MJ \times 1} \quad I=1,2,3,\dots,MI \quad (13)$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & 0 & 0 \\ S_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & I & 0 \\ T_{31} & 0 & I \end{bmatrix} \quad (15)$$

$S$ 와  $T$ 는 각각 (8),(9),(10)식 계수로써 구성되며, 식(14)와 식(15) 같이 표시된다. 전체 판이  $MI$ 개의  $x$ 방향 선으로 구성되어 있다면, 다음과 같은 일련의 matrix 방정식(16)를 얻는다.

$$\begin{aligned} AX_1 + BX_2 &= F_1 \\ S_{11}X_1 + TX_2 + SX_3 &= F_2 \\ SX_2 + TX_3 + SX_4 &= F_3 \\ &\dots \\ &\dots \\ SX_{MI-2} + TX_{MI-1} + S_{22}X_{MI} &= F_{MI-1} \\ BX_{MI-1} + A_{22}X_{MI} &= F_{MI} \end{aligned} \quad (16)$$

$$AP = \begin{bmatrix} A & B \\ S_{11} & T & S \\ & S & T & S \\ & & & \dots \\ & & & \dots \\ & & & \dots \\ & & & S & T & S_{22} \\ & & & & B & A \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서  $A, B, S_{11}, S_{22}$  등은 경계조건에 의해 결정되는 matrix들이다. 식(16)은

$XP = [X_i]_{MI \times 1}$ ,  $I = 1, 2, 3, 4, \dots, MI$ ;  $FP = [F_i]_{MI \times 1}$ ,  
 $I = 1, 2, 3, 4, \dots, MI$ , AP를 식(17)과 같이 정의 할  
 때,  $AP \cdot XP = FP$ 로 정의 될 수 있다.  
 즉,  $XP = AP^{-1} \cdot FP$ 가 된다.

[AP] matrix는 전형적인 tri-diagonal  
 matrix해법으로 구할 수 있다<sup>[5]</sup>.

### 2.3 사용된 진동이론

구조물의 고유진동수는 공명 상태하에서  
 확산하기 시작하는 처짐 모드 형태하에서의  
 주파수이다. 자유진동으로 인한 처짐으로 부  
 터 이러한 처짐을 유발하는데 필요한 힘을 알  
 수 있다. 일련의 이러한 과정에 의해 결정된  
 모드형태가 충분히 정확하다면, 수렴된 것과  
 바로 이전 값 사이에서의 상대적 최대처짐은  
 이러한 관성력하에서 불변하다.

구조물의 진동은 조화운동이고 진폭형상은  
 삼각함수에 의해 표시될 수 있는 부분이 있  
 다. 처음에 제 1모드만 고려하면, 구조부재의  
 처짐형태는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w = W(x, y)F(t) = W(x, y) \sin \omega t \quad (18)$$

Newton의 법칙에 의해 진동하는 질량  $m$   
 의 동적힘은

$$F = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (19)$$

이다. 여기서  $\omega$ 와  $W$ 는 미지수이다.

고유진동수  $\omega$ 를 구하기 위하여 다음의 과  
 정이 취해진다. 어떤 몇개의 점에서 최대 처  
 짐의 진폭은 임의로 주어진다.

$$w(i, j)(1) = W(i, j)(1) \quad (20)$$

여기서  $(i, j)$ 는 고려한 점을 나타낸다.

이것은 절대적으로 임의의 값이지만 경협  
 에 의해 가정하면 수렴을 촉진시키는데 더욱  
 좋다. 이러한(최대) 진폭에 대응하는 동적힘은

$$F(i, j)(1) = -m(i, j)[\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1) \quad (21)$$

이다. 이 힘에 의해 일어나는 “새로운” 변위는  
 $F$ 의 함수이고 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} w(i, j)(2) &= f(m(i, j)[\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1)) \\ &= \sum \Delta(i, j, k, l) \{-m(i, j)[\omega(i, j)(1)]^2 \times w(i, j)(1)\} \end{aligned} \quad (22)$$

여기에서  $\Delta$ 는 처짐에 대한 영향계수이다.

공명상태하에서 구조부재의 모든 점에서  
 고려한  $w(i, j)(1)$ 과  $w(i, j)(2)$ 는 동일해야 하고  
 다음조건을 만족해야 한다.

$$w(i, j)(1)/w(i, j)(2) = 1 \quad (23)$$

이 방정식으로 부터  $(i, j)$ 의 각 점에서의  $\omega$   
 $(i, j)(1)$ 이 얻어질 수 있지만, 대부분의 경우에  
 일치하지 않는다. 구조부재의 고유진동수가  
 부재의 모든 점에서 동일해야 하므로  $\omega(i, j)$ 의  
 충분한 같은값이 모든  $(i, j)$ 점에서 얻어질 때까  
 지 이 과정이 반복된다. 그러나 대부분의 경  
 우에 첫번째 cycle의 계산에 의해 얻어진  $\omega$   
 $(i, j)$ 의 최대와 최소값의 차이는 공학적으로 충  
 분히 무시 될 수 있다. 정확도는 최대와 최  
 소치의 평균을 취하거나 또한 처짐이 최대인  
 곳에서  $\omega(i, j)$ 의 값을 취함으로써 개선될 수  
 있다.

2번째 cycle의

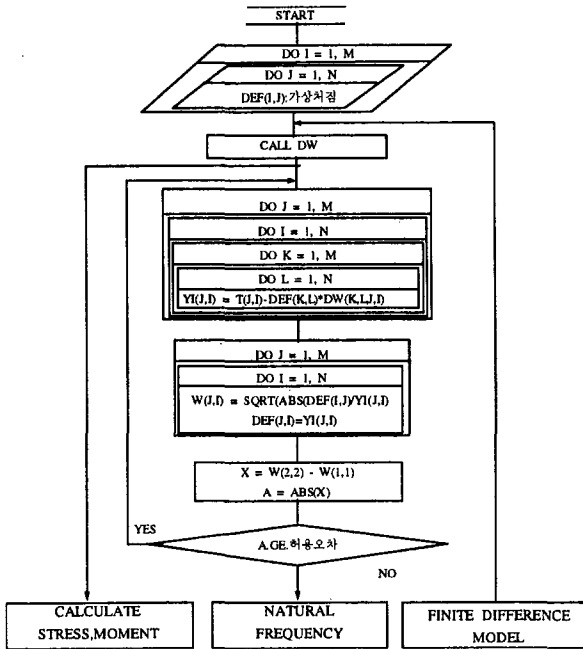
$$w(i, j)(3) = f(m(i, j)[\omega(i, j)(2)]^2 w(i, j)(2)) \quad (24)$$

에서  $w(i, j)(2)$ 의 절대적 수치가 편리하게 사용  
 될 수 있다. composite 구조물을 포함하여  
 불규칙한 단면과 이상적이 아닌 지지조건을  
 가진 판의 경우, 경계조건에 관계없이, 이 판  
 을 몇개의 요소로 나누어 고려하는 것이 편리  
 하다. 결과의 정확성은 처짐계산의 정확도  
 에 비례한다.

첨가질량의 영향은 각각의 mass point에서  
 처짐의 영향면에 첨가질량을 곱함으로써 얻을수  
 있다. 처짐 영향면을 얻는 것은 패널의 설계와  
 해석에 있어서 첫 번째 단계이다. 이러한 값들을  
 얻기위해서 여러 방법이 사용되어질 수 있다.  
 예로 거더와 cross-beam을 갖는 교량 격자구조  
 의 경우에 있어서 F. Leonhardt(1950), H.  
 Homberg (1951, 1956), C. Massonnet(1954), N.  
 Watanabe(1965), D. H. Kim(1972) 등에 의한 방  
 법 및 테이블이 사용될 수 있다.

## 2.4 수치모형

2.2절의 유한차분법을 2.3절의 진동해석법과 결합하면 다음과 같은 수치모형을 얻을 수 있다.



## 3. 진동해석

유한차분을 통하여 처짐,  $M_x$ ,  $M_y$ 를 동시에 구한다음, 처짐에 대한 영향계수를 김의 진동방법에 사용하면 2.4절과 같은 수치모형을 얻을 수 있는데, 이 수치모형을 이용하여 임의의 경계조건을 가진 탄성지지된 철근콘리트 교량의 진동해석이 가능하다.

수치모형을 슬래브의 총길이는 26m이고 슬래브 폭은 10m인 3경간 연속슬래브 교량에 적용하였다. 이것은 표준 단면도에 근거 하였으며, 이에 대한 형상을 Figure.1에 도시하였다. 경계조건은 양단 단순지지, 타단 자유단이고 슬래브의 교대는 탄성지지된 것으로 고려하였다.

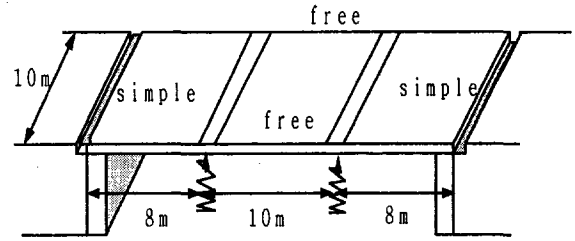


Figure 1. Three span continuous slab bridge

트럭하중은 DB-24하중을 Figure 2.에 도시한 바와 같이 제한하였으며, 철근콘리트의 철근량에 따라 계산된  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{12}$ , and  $D_{66}$ 을 Table 1에 나타냈다.

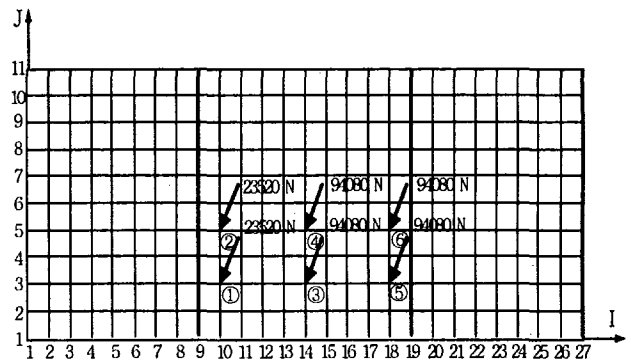


Figure 2. Location of truck loading

Table 1. The stiffnesses of each case( $N \cdot m$ )

	CASE A	CASE B	CASE C	CASE D	CASE E	CASE F
$D_{11}$	86286146	86286146	86286146	86286146	86286146	86286146
$D_{22}$	50000591	59839547	69039248	77726315	86286146	86286146
$D_{12}$	32179358	32179358	32179358	32179358	32179358	0
$D_{66}$	73276926	73276926	73276926	73276926	73276926	0

지반상수,  $k$  값의 변화에 따른 영향을 고찰하기 위해  $k$  값을  $k=145,040N/m^2$  부터  $k=14,504,000 MN/m^2$ 까지 변화시켰다. Table 2 는  $k$  값 증가에 따른 고유진동수를 보여준다.

Table 2 Comparison of natural frequencies for different k values(Case D)

k (N/m <sup>2</sup> )	Under Dead Load Only	Dead and Live Load
145,040	0.09163	0.08601
14,504,000	0.55178	0.52540
1,450,400,000	1.09165	1.04228
145,040,000,000	1.09616	1.04421
14,504,000,000,000	1.11105	1.04863

k=1,450.4 MN/m<sup>2</sup>로 고정지켰을 때 각 Case의 고유진동수를 Table 3에 나타내었다.

Table 3. natural frequency for each case, k=1,450.4 MN/m<sup>2</sup> (Unit : rad/sec)

	Under Dead Load Only	Dead and Live Load
CASE A	1.08295	1.03211
CASE B	1.08880	1.03747
CASE C	1.09298	1.04129
CASE D	1.09616	1.04421
CASE E	1.09877	1.04659
CASE F	1.13401	1.07863

D<sub>22</sub>의 영향의 매우 작게 나타났다. 그 이유는 차량진행방향의 평행한 방향의 경계조건이 자유단이기 때문이다. 그러나 차량진행방향의 직각인 방향의 경계조건은 단순지지 또는 탄성지지 이므로 D<sub>12</sub>, D<sub>66</sub>의 영향은 매우 중요하다.

#### 4. 결 론

이 논문에서는, 유한차분법을 이용하여 연속 슬래브 교량의 구조해석에 필요한 수치모형을 제시하였다. 제시된 수치모형을 3경간 연속슬래브 교량에 적용한 결과 간편하게 진동해석을 수행할 수 있었고, 진동해석과 설계시 필요한 처짐, 모멘트, 응력값을 동시에 얻을 수 있었다.

다음으로 휨강성 D<sub>12</sub>, D<sub>22</sub>, D<sub>66</sub>가 진동에 끼치는 영향을 고찰하기 위해, Case A~Case F에 대하여 진동해석을 수행한 결과, 교량형태인 차량진행 방향의 평행한 경계조건이 자유단인 경우에는 철근량 변화에 따른 휨강성 D<sub>22</sub>의 영향이 진동에 끼치는 영향이 매우 작음을 알 수 있었다. 또한 D<sub>12</sub>와 D<sub>66</sub>의 영향이 크므로 설계 및 해석시 무시할 수 없음을 알 수 있었다.

#### 5. 참고 문헌

1. Kim, D. H., "A Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Structural Elements", Proc. International Symposium on Engineering Problems in Creating Coastal Industrial Sites, Seoul, Korea, 1974.
2. Kim, D. H., Hwang, J. W., Chun, D. S., "A Simple Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Elements," Proc. 1st Japan Int' SAMPE Symposium, 1989.
3. Kim, D. H., " Vibration Analysis of Irregularly Shaped Laminated Thick Composite Plates," Proc. ICCM 8, Honolulu, Hawaii, 1991
4. Kim, D. H., *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, E& FN SPON, Chapman & Hall, London, 1995
5. Kim, D. H., "The Effect of Neglecting the Radial Moment Terms in Analyzing a Finite Sectorial Plate by Means of Finite Differences," International Symposium on Space Technology and Sciences, Tokyo, Japan, May, 1967.

6. Kim, D. H., " Analysis of Triangularly Folded Plate Roofs of Umbrella Type," thesis presented to Purdue University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, 1965.
  
7. 심도식, "특별직교 이방성 복합판이론에 의한 연속 콘크리트 슬래브교의 자유진동 해석", 강원대학교 대학원 토목공학과 박사학위논문, 1997.