

탄성반력의 영향에 따른 직교 이방성 복합판의 고유 진동 해석

정영화* · 심도식** · 김경진*** · 이세진****

Vibration Analysis of Orthotropic Composite Plate According to Elastic Reaction Effect

Jung, Young-Hwa* · Shim, Do-Sik** · Kim, Kyoung-Jin*** · Lee, Se-Jin****

ABSTRACT

In this paper, the result of application of vibration method to the orthotropic plates with free edges supported on elastic foundation and with a pair of opposite edges under axial forces is presented. Such plates represent the concrete highway slab and hybrid composite pavement of bridges. The reinforced concrete slab can be assumed as a special orthotropic plate, as a close approximation. The highway slab is supported on elastic foundation, with free boundaries. Sometimes, the pair of edges perpendicular to the traffic direction may be subject to the axial forces. The plate is subject to the concentrated load/loads, in the form of traffic loads, or the test equipments. Finite difference method is used to obtain the deflection influence surfaces needed for vibration analysis. The influence of the modulus of the foundation, the aspect ratio of the plate, and the magnitudes of the axial forces and the concentrated attached mass on the plate, under the natural frequency is thoroughly studied.

1. 서론

고속도로 콘크리트 슬래브의 손상문제는 세계적으로도 매우 중요한 문제이다. 손상된 슬래브의 보수작업에 대한 판단을 내리기 전에 정확한 비파괴 평가가 필요하다. 이러한 평가중 신뢰할 만한 방법의 하나는 고유진동수로부터 구한 슬래브의 현상태의 강성과 설계시의 강성을 비교함으로써 손상정도를 평가하는 것이다. 고속도로 슬래브는 자유경계를 갖고 탄성지지되어 있으며, 교통 방향

에 수직인 양단은 축하중을 받을 수 있다.

첨단 복합재료 교량상판의 포장재료로 마모성이 적은 강화된 폴리머와 포화된 직조 섬유를 조합함으로써 만들 수 있다. 그러한 포장은 탄성지지된 상태의 자유단을 갖는 특별직교 이방성판과 같이 거동할 것이다.

이러한 포장은 교통진행방향으로 트럭충격에 의한 도로경사의 수직력과 온도변화등에 의해 발생하는 축하중을 받게되며, 교통하중과 가속장치와 같은 실험장비에 의한 첨가질량의 영향을 받는다.

이 논문에서는 탄성반력이 처짐 및 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 김의방법^{[1][2]}을

* 강원대학교 토목공학과 교수

** 강원대학교 토목공학과 시간강사

*** 충주산업대학교 토목공학과 전임강사

**** 강원대학교 토목공학과 석사과정

사용하였으며, 수월한 경계조건처리를 위하여 처짐의 영향계수는 F.D.M.을 이용하여 계산하였다. 또한 축하중과 탄성반력을 동시에 받는 판에 대하여 진동해석을 실시하였으며, 첨가질량의 영향 또한 데이터로써 비교하였다.

2. 사용된 진동이론

구조물의 고유진동수는 공명 상태하에서 확산하기 시작하는 처짐 모드 형태하에서의 주파수이다. 자유진동으로 인한 처짐으로부터 이러한 처짐을 유발하는데 필요한 힘을 알 수 있다. 일련의 이러한 과정에 의해 결정된 모드형태가 충분히 정확하다면, 수렴된 것과 바로 이전 값 사이에서의 상대적 최대처짐은 이러한 관성력하에서 불변하다.

구조물의 진동은 조화운동이고 진폭형상은 삼각함수에 의해 표시될 수 있는 부분이 있다. 처음에 제 1모드만 고려하면, 구조부재의 처짐형태는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w = W(x, y)F(t) = W(x, y) \sin \omega t \quad (1)$$

Newton의 법칙에 의해 진동하는 질량 m 의 동적 힘은

$$F = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

이다. 여기서 ω 와 W 는 미지수이다.

고유진동수 ω 를 구하기 위하여 다음의 과정이 취해진다. 어떤 몇개의 점에서 최대 처짐의 진폭은 임의로 주어진다.

$$w(i, j)(1) = W(i, j)(1) \quad (3)$$

여기서 (i, j) 는 고려한 점을 나타낸다.

이것은 절대적으로 임의의 값이지만 경험에 의해 가정하면 수렴을 촉진시키는데 더욱 좋다. 이러한(최대) 진폭에 대응하는 동적힘은

$$F(i, j)(1) = -m(i, j)[\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1) \quad (4)$$

이다. 이 힘에 의해 일어나는 "새로운" 변위는 F 의 함수이고 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w(i, j)(2) = f(m(i, j)[\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1)) \\ = \sum \Delta(i, j, k, l) \{-m(i, j)[\omega(i, j)(1)]^2 \times w(i, j)(1)\} \quad (5)$$

여기에서 Δ 는 처짐에 대한 영향계수이다.

공명상태하에서 구조부재의 모든 점에서 고려한 $w(i, j)(1)$ 과 $w(i, j)(2)$ 는 동일해야 하고 다음조건을 만족해야 한다.

$$w(i, j)(1)/w(i, j)(2) = 1 \quad (6)$$

이 방정식으로 부터 (i, j) 의 각 점에서의 $\omega(i, j)(1)$ 이 얻어질 수 있지만, 대부분의 경우에 일치하지 않는다. 구조부재의 고유진동수가 부재의 모든 점에서 동일해야 하므로 $\omega(i, j)$ 의 충분한 같은값이 모든 (i, j) 점에서 얻어질 때까지 이 과정이 반복된다. 그러나 대부분의 경우에 첫번째 cycle의 계산에 의해 얻어진 $\omega(i, j)$ 의 최대와 최소값의 차이는 공학적으로 충분히 무시 될 수 있다. 정확도는 최대와 최소치의 평균을 취하거나 또한 처짐이 최대인 곳에서 $\omega(i, j)$ 의 값을 취함으로써 개선될 수 있다. 2번째 cycle의

$$w(i, j)(3) = f\{m(i, j)[\omega(i, j)(2)]^2 w(i, j)(2)\} \quad (7)$$

에서 $w(i, j)(2)$ 의 절대적 수치가 편리하게 사용될 수 있다. composite 구조물을 포함하여 불규칙한 단면과 이상적이 아닌 지지조건을 가진 판의 경우, 경계조건에 관계없이, 이 판을 몇개의 요소로 나누어 고려하는 것이 편리하다. 결과의 정확성은 처짐 계산의 정확도에 비례한다.

3. 수치 해석

이 논문의 수치해석에 사용된 적층복합판의 형태는 $[A/B/B/C/A/A/B]_r$ 형태이며 물성값은 다음과 같다.

$$E_1 = 38.6 \text{ GPa}, \quad E_2 = 8.27 \text{ GPa}, \\ \nu_{12} = 0.26, \quad \nu_{21} = 0.0557, \\ G_{12} = 4.14 \text{ GPa}, \quad h = 0.000875 \text{ m}$$

하나의 ply 두께는 0.000125m이다. 적층수가 증가함에 따라 B_{16} , B_{26} , D_{16} 와 D_{26} 가 감소하여 특별직교 이방성판 이론을 사용할 수 있으며, 이때 보강재의 보강각은 $A=45^\circ$, $B=-45^\circ$, $C=90^\circ$ 이며, 적층수 $r=22$ 이다.

3.1 탄성반력과 축하중을 받는 직교이방성 판의 지배 방정식

이 논문에서는 처짐에 대한 영향면을 구하기 위해 유한차분법을 이용하였다. 축하중을 받는 탄성지지된 특별직교 이방성 판의 지배 방정식은 다음과 같다.

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) - kw + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

여기서 $D_1=D_{11}$, $D_2=D_{22}$, $D_3=(D_{12}+2D_{66})$.

중양차분을 사용하더라도 식(8)은 소요되는 점의 수가 너무 많아 가상점을 소거시키는데 혼잡을 일으킨다. 일반적으로 한방향의 축하중만을 고려하면 $N_y=N_{xy}=0$ 이 되며, 다음과 같은 세 개의 2차 연립 편미분 방정식을 풀면 이러한 혼잡을 피할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y) + kw(x, y) - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (9)$$

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (10)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (11)$$

위의 식을 유한차분모형^[4]을 이용하여 차분식을 세운후 MI개의 x방향 선으로 구성된 전체판의 각각의 선에 대해 MI개의 matrix방정식으로 구성하여, tri-diagonal matrix해법을 이용하면 w , M_x , M_y 값을 구할 수 있다.

3.2 수치해석의 정확도

사용된 유한차분법의 정확도를 검증하기 위해 단순지지된 특별직교 이방성 판의 정확해인 Navier해와 비교하였으며, 고려한 판의 형상을 Fig. 1에 나타내었다.

판의 형상비는 $c=a/b=1m/1m=1$ 로 고려하였으며, 요소의 수는 10×10 으로 분할하였다. 이때, 하중은 판의 중앙점에 집중하중 1000N을 재하하였

으며, 두 방법에 의한 처짐비를 Table 1에 나타내었다.

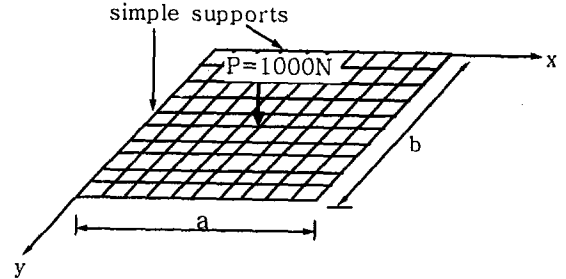


Fig. 1 Mesh size and loading ($a=b=1m$, 10×10)

Table 1. Deflection ratio of Navier solution to F.D.M. solution. (10×10)

x \ y	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	0.9982	0.9941	0.9833	0.9941	0.9982
0.3	0.9940	0.9912	0.9769	0.9912	0.9940
0.5	0.9865	0.9796	0.9468	0.9796	0.9865
0.7	0.9940	0.9912	0.9769	0.9912	0.9940
0.9	0.9982	0.9941	0.9833	0.9941	0.9982

F.D.M과 해석해인 Navier해법과의 중앙점에서의 최대 처짐비는 5.32%로 나타났다.

20×20 , 40×40 의 분할요소에 대한 하중재하점인 판중앙에서의 처짐비를 나타내면 아래와 같다.

20×20 case : 3.28%
 40×40 case : 1.09%

3.3. 지반탄성계수와 형상비의 영향

지반의 반발강도가 판의 처짐 w 에 비례한다고 가정하면, 반발강도 $P=kw$ 로 나타낼 수 있다^[3]. 여기서 k 는 지반탄성계수이다. 판의 형상과 작용하중은 Fig. 2와 같다.

하중재하점에서 처짐에 대한 형상비(a/b)와 지반상수 k 의 영향을 Table 2와 Fig. 3에 나타내었다.

판의 형상비가 증가할수록 또한 지반탄성계수 k 값이 커질수록 처짐은 작아지는 경향을 나타내었으며, k 값이 클수록 형상비에 대한 영향이 적음을 알 수 있다.

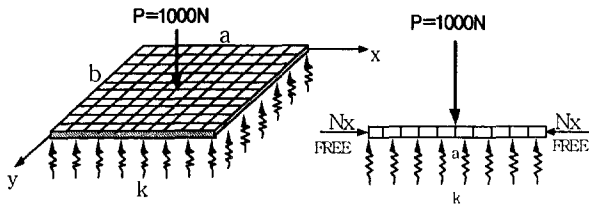


Fig 2. Plate geometry and loading

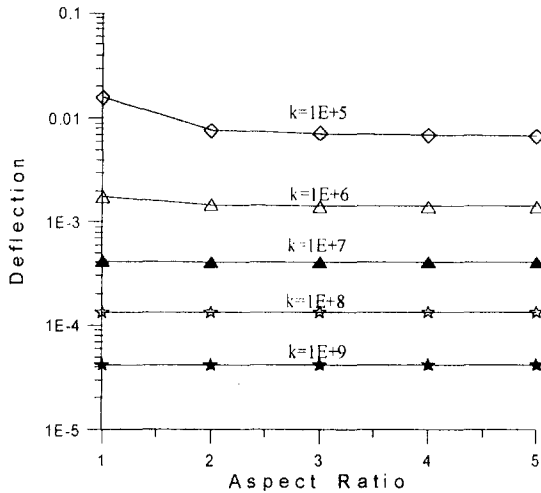


Fig. 3. Deflection at the load point(center of the plate) with different aspect ratios and k values

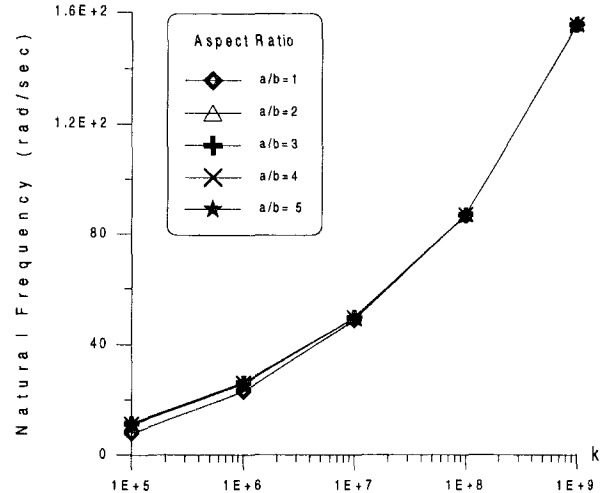


Fig. 4 Natural Frequencies for each case of k and a/b

Table 2. Deflection at the loading point (center of the plate). (k : modulus of foundation ; N/m³)

(Unit : m)

k (N/m ³) \ a/b	k= 10 ⁶	k= 10 ⁵	k= 10 ⁷	k= 10 ⁸	k= 10 ⁹
1	0.157464E-01	0.174296E-02	0.416537E-03	0.132746E-03	0.413241E-04
2	0.763536E-02	0.145253E-02	0.403906E-03	0.132654E-03	0.413241E-04
3	0.716962E-02	0.142352E-02	0.404193E-03	0.132654E-03	0.413241E-04
4	0.693619E-02	0.141226E-02	0.404183E-03	0.132654E-03	0.413241E-04
5	0.673492E-01	0.141228E-02	0.404184E-03	0.132654E-03	0.413241E-04

Table 3. Natural Frequencies for each case of k and aspect ratio, a/b.

(Unit : rad/sec)

k (N/m ³) \ a/b	k= 10 ⁶	k= 10 ⁵	k= 10 ⁷	k= 10 ⁸	k= 10 ⁹
1	7.71164	22.66935	48.68064	86.63852	155.4520
2	10.86166	25.66662	49.45140	86.66915	155.4520
3	11.28889	26.02688	49.43317	86.66916	155.4521
4	11.21350	26.04478	49.43380	86.66919	155.4522
5	11.42447	26.04412	49.43381	86.66920	155.4522

고유진동수에 대한 결과값을 Table 3과 Fig. 4에 나타내었다. k값과 형상비가 증가함에 따라 고유진동수는 커지는 경향을 나타냄을 알 수 있으며, 처짐과 마찬가지로 k값이 클수록 형상비에 관계없이 고유진동수 값이 일정값에 수렴하는 경향을 나타내었다.

3.4 첨가질량의 영향

Fig. 5는 첨가질량의 영향에 대하여 수치해석을 수행한 판의 하중형태 및 판의 형상을 나타내고 있다. 판의 적층형태와 보강각도는 $[45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 45^\circ, -45^\circ]_{22}$ 이며, 형상은 $a=1m, b=1m$ 를 고려하였다. 첨가질량만이 작용한 경우를 Case A로, 첨가질량과 판의 자중이 작용하는 경우를 Case B로 고려하여 수치해석을 수행하였다.

이때, 지반탄성계수는 $k=7MN/m^3$ 이며, 축하중은 $N_x=1000N/m$, 판의 자중 $q=367.8675N/m^2$ 가 작용한다고 고려하였다. 여기서 N은 실수이며, 집중하중 $P(i,j)$ 는 판 중앙에 등분포하중의 N배 형태로 제하되었다.

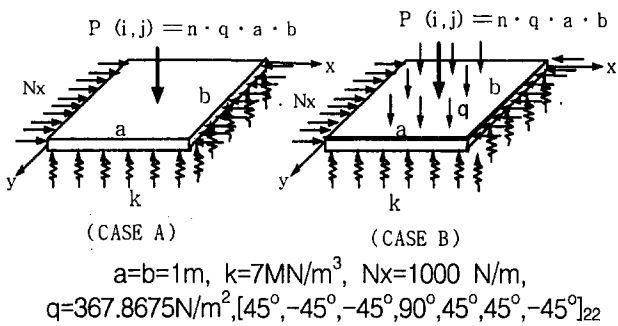


Fig. 5 Loading conditions of a plate

Table 4는 N값의 변화에 따른 판중앙에서의 처짐을 나타내며, Table 5는 판의 고유진동수를 나타낸 것이다. N이 3이상일 때, Case A와 Case B의 처짐은 90%이상 일치하였으며, 고유진동수는 97%이상 일치하였다.

이러한 결과로부터 판자중보다 큰 첨가질량이 작용하면 판자중을 무시하고 첨가질량만을 고려한 진동해석이 가능함을 알 수 있다.

Table 4. Deflection at the center of the plate

N	CASE A (m)	CASE B (m)	CASE A / CASE B
0		0.5250E-04	
1	0.1865E-03	0.2390E-03	0.7803
3	0.5595E-03	0.6120E-03	0.9145
5	0.9325E-03	0.9850E-03	0.9367
7	0.1306E-03	0.1358E-02	0.9411
10	0.1865E-02	0.1917E-02	0.9581
20	0.3730E-02	0.3782E-02	0.9786

Table 5. Natural frequency (rad/sec)

N	CASE A	CASE B	CASE A / CASE B
0		13.78558	
1	7.322637	6.768390	0.9243
3	4.227726	4.117696	0.9740
5	3.274783	3.223351	0.9843
7	2.767696	2.736574	0.9888
10	2.315621	2.297361	0.9921
20	1.637391	1.630922	0.9961

3.5. 판의 형상비와 축하중의 영향

하중재하점에서 처짐에 대한 판 형상비와 축하중 N_x 의 영향을 Table 6과 Fig. 6에 나타내었으며, 진동해석의 결과는 Table 7과 Fig. 7에 나타내었다.

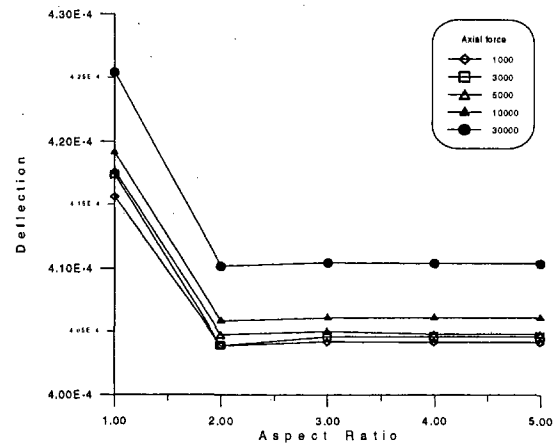


Fig. 6 Deflection for each case of the axial forces and the aspect ratios, a/b

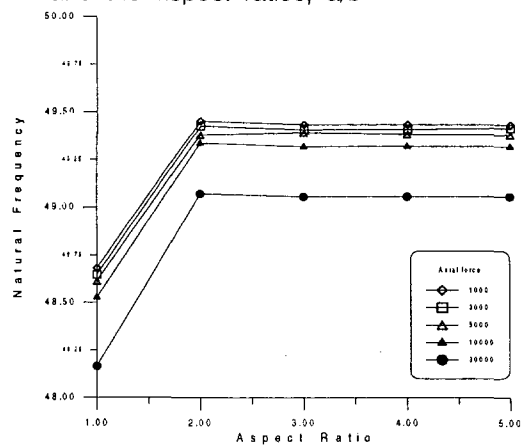


Fig. 7 Natural frequencies for each case of the axial forces and the aspect ratios, a/b

Table 6. Deflection at the loading point (center of the plate)

		$k=10^7(N/m^2)$				
$N_x(N/m)$	a/b	1000	3000	5000	10000	30000
1		0.415637E-03	0.417394E-03	0.417683E-03	0.419150E-03	0.425480E-03
2		0.403906E-03	0.403906E-03	0.404747E-03	0.405809E-03	0.410177E-03
3		0.404193E-03	0.404611E-03	0.405031E-03	0.406087E-03	0.410430E-03
4		0.404183E-03	0.404601E-03	0.404810E-03	0.406076E-03	0.410414E-03
5		0.404184E-03	0.404601E-03	0.404810E-03	0.406076E-03	0.410414E-03

Table 7. Natural frequency for each case of the axial forces and the aspect ratios, a/b

		$k=10^7(N/m^2)$				
$N_x(N/m)$	a/b	1000	3000	5000	7000	10000
1		48.68064	48.64727	48.61361	48.52819	48.16460
2		49.45140	49.42568	49.37989	49.33506	49.07111
3		49.43317	49.40760	49.39196	49.31756	49.05547
4		49.43380	49.40827	49.38266	49.31836	49.05657
5		49.43381	49.41567	49.38069	49.31832	49.05650

위의 결과를 살펴보면, 형상비가 증가함에 따라 처짐은 축하중의 크기에 관계없이 약 0.0004m에 수렴하는 경향을 나타내었으며, 고유진동수는 49.4 rad/sec에 수렴하였다.

4. 양단에 축하중이 작용하는 경우, 형상비가 증가함에 따라 고유진동수는 축하중크기의 영향을 받지 않음을 알 수 있었다.

4. 결 론

이 논문에서는 유한차분법과 D. H. Kim의 진동해석방법을 이용하여 탄성지반위에 놓인 축하중을 받는 슬래브의 진동해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 수치해석의 정확성을 검증하기 위해 정확해로 알려진 Navier해법과 비교한 결과, 판의 최대 처짐오차는 1.09%로 나타나 정확성을 입증할 수 있었다.
2. 지반탄성계수와 형상비가 증가함에 따라 고유진동수가 증가하였으며, 지반탄성계수가 크게 되면 형상비의 영향을 받지 않음을 알 수 있었다.
3. 복합판에 작용하는 첨가질량이 판의 자중에 비해 클수록 판의 자중을 무시한 첨가질량만으로 진동해석이 가능함을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] Kim, D. H. : Composite Structures for Civil and Architectural Engineering, Published by E&FN SPON, Chapman & Hall, London,1995.
- [2] Kim, D. H. : "Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Members," 1990 Structures Congress, American Society of Civil Engineers, Baltimore, MD., U.S.A., May, 1990.
- [3] Stephen P. Timoshenko, and S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, Second Edition, Mcgraw Hill Book Co., 1989.
- [4] 심도식, "특별직교 이방성 복합판 이론에 의한 연속 콘크리트 슬래브교의 자유진동 해석", 강원대학교 토목공학과 박사학위논문, 8. 1997.