

## 역추기법을 이용한 해면골의 점탄성 특성 해석

강신일\*·이원희\*·홍정화\*\*

= Abstract =

### Estimation of Viscoelastic Properties of Trabecular Bone Using An Inverse Method

Shinill Kang\*, Won-Hee Lee\*, Jung-Hwa Hong\*\*

An inverse method with regularization has been developed to determine the viscoelastic properties of trabecular bone. A series of stress relaxation experiments were performed under the condition of uniaxial compression stress state. Optimization has been formulated within the framework of nonlinear least-squares and a modified Gauss-Newton method with a zeroth-order regularization technique. The stress relaxation behavior of trabecular bone was analyzed using a standard viscoelastic model. The present study clearly shows that trabecular bone exhibits typical viscoelastic stress relaxation behavior, and the obtained material parameters well represent the viscoelastic behavior of trabecular bone.

**Key words :** Trabecular bone, Viscoelastic model, Inverse method, Regularization

### 서 론

인체 골격계(Human Skeletal System)를 구성하는 뼈(Bone)는 인체에 작용하는 하중을 지지하는 주요한 구조적 요소로서 크게 해면골(Trabecular Bone)과 치밀골(Cortical Bone)로 구분된다. 이 중에서 골격구조의 내부를 형성하고 있는 해면골은 인체에 작용하는 내외부의 하중을 지지하는 기계적 기능을 담당하고 조혈 및 골재형성 등 생리학적(Physiological)으로 중요한 역할을 수행한다[1]. 골패사증(Osteonecrosis), 골관절염(Osteoarthritis)과 같은 병리학적(Pathological) 요인과 노화(Aging)와 같은 현상은 해면골의 강도를 저하시키고 골반 및 척추 등에 빈번한 골절(Fracture)을 초래한다[2]. 따라서 골절을 치료하기 위하여 인공관절(Arthroplasties) 및 골절 고정기구(Fixation Implants) 등이 수술을 통해 주로 해면골에 위치되는데 이러한 기구와 해면골간의 헐거워짐(Loosening), 부정렬(Mismatch) 등은 수술 후 부작용을

빈번하게 초래하여 심각한 임상적 문제(Clinical Problem)를 야기시킨다[3]. 이러한 문제의 폭넓은 이해를 위해서는 해면골의 기계적 거동에 대한 고찰이 필수적이며, 이와 관련하여 해면골의 탄성적 거동특성과 탄성계수 측정 등의 연구가 진행되어 왔다. 이러한 연구들은 생체 내에서의 해면골의 기계거동을 예측할 수 있게 하였고 노화, 질병, 그리고 여러 생리학적 요인이 해면골의 기계거동에 미치는 영향을 이해하는데 공헌하였다. 그러나 해면골은 탄성학적으로 설명될 수 없는 응력완화(Stress Relaxation)[4], 크리프(Creep)[5], 기계적 물성치의 변형률속도에 따른 변화[6,7,8], 교번하중 및 교번변형을 적용시의 입력과 출력간의 상차이(Phase Lag)[9] 등의 현상을 보인다. 따라서 해면골의 비탄성적 기계거동 및 시간 종속적인 거동을 설명하기 위한 이론적인 모델이 필요한데 그 중의 하나로 점탄성 모델, 특히 표준 점탄성 모델(Standard Viscoelastic Model)을 들 수 있다. 이러한 모델링을 위해서는 정확한 점탄성 물성들의 측정이 필요

\* 연세대학교 공과대학 기계설계학과

\* Department of Mechanical Design and Production Engineering, Yonsei University

\*\* 삼성자동차 기술연구소

\*\* Technology Center, Samsung Motors Inc.

통신저자 : 강신일, (120-749) 서울시 서대문구 신촌동 134번지, Tel.(02)361-2829, FAX. (02)362-2736,

E-mail : snlkang@bubble.yonsei.ac.kr

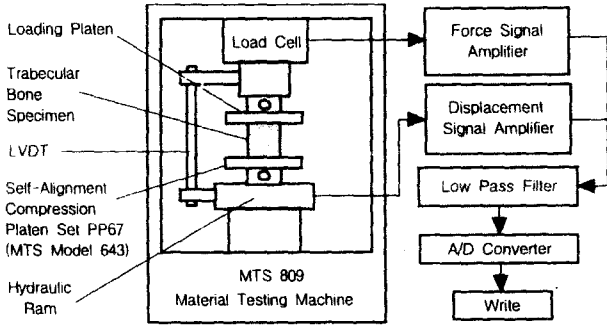


그림 1. 응력완화 실험 및 데이터 측정 장치를 나타내는 개략도  
Fig. 1. A schematic of stress relaxation experiment apparatus and data measurement system

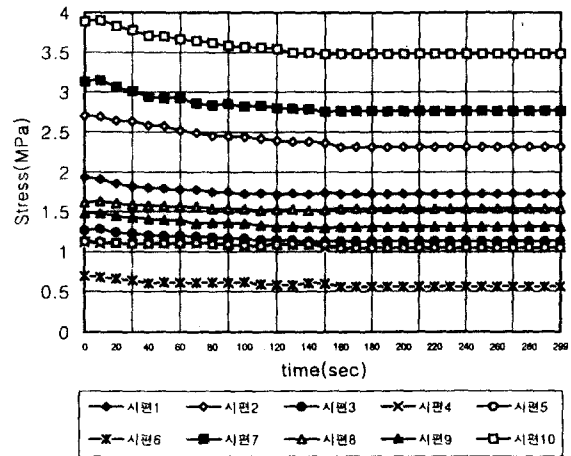


그림 1. 10개의 해면골 시편에 대한 응력완화 실험 결과  
Fig. 1. Results of stress relaxation experiments for 10 trabecular bone specimens

하지만, 실험으로부터 직접 그 값을 알아내기 어렵기 때문에 현재 이에 관련된 연구가 미진한 실정이다. 따라서 본 연구에서는 일축압축응력상태의 조건하에서 응력완화 실험을 먼저 수행하여 이를 통해 해면골이 점탄성적으로 거동함을 보이고 또한 응력완화 실험에서 구한 실험 결과로부터 역추기법(Inverse Method)을 이용하여 해면골의 점탄성 거동을 정확히 묘사할 수 있는 모델 변수값을 구하고자 한다[10]. 역추기법에서 쓰이는 비선형 최소자승법 형태로 표현되는 최소화 문제의 해를 구하기 위하여 영차 정규화 기법(Zeroth-Order Regularization Technique)[11]이 포함된 수정형 가우스-뉴턴 방법(Modified Gauss-Newton Method)을 사용하며 오차분석을 통하여 본 연구에서 제안된 방법을 검증한다.

## 재료 및 실험 방법

### 1. 재료 및 시편 채취

해면골에 대한 응력완화거동 측정을 위하여 총 10개의 송아지 요추골(L5)이 사용되었다. 요추골은 골 내부의 생체조직 및 골수의 보존을 위하여 여러 겹의 의료용 거즈와 플라스틱 백을 사용하여  $-20^{\circ}\text{C}$ 에서 보존되었다. 각각의 요추로부터 원통형의 해면골 시편이 다이아몬드 코어링 드릴(Starlite, Rosemond, PA, USA)과 저속 다이아몬드 톱(Buhler Corp., Lake Bluff, IL, USA)을 사용해 가공되었다. 각 요추의 중앙에서 요추의 위아래방향(Cephalad-Caudal Direction)으로 한 개의 해면골 시편이 얻어졌다. 해면골 시편은 지름 9.8mm 및 길이 20mm인 형상을 가지고 있다. 골수의 손실과 가공시 시편 표면의 미세한 손상에 의해 발생하는 실험 오차를 최소화하기 위하여 시편은 냉동된 상태로 가공되었다. 또한 해면골 시편내의 구조적 손상을 발견하기 위하여 X선을 사용한 촬영이 수행되었으며 구조적 결함이 발견된 해면골 시편은 실험에서 제외되었다.

### 2. 실험 장치 및 방법

해면골 시편의 응력완화거동 측정이 일축압축응력상태 하에서 수행되었다. 따라서 시편의 횡방향 변형은 구속되지 않았다. 시편의 종축과 하중적용선의 일치성을 위한 자체축정렬하중판(MTS Model 643; MTS Minneapolis, MN, USA)이 사용되었다. 냉동된 해면골 시편은 상온에서 2시간 동안 해동된 후 MTS 809 재료 시험기(MTS Minneapolis, MN, USA)에 위치되었다. 해면골 시편은 1% 변형률까지 0.12 mm/min의 적용하중속도로 변형된 후 300초 동안 일정 변형률로 유지되면서 압축 변형되었다. 해면골 시편을 압축시키는 동안 하중판과 시편 경계와의 마찰로 인해 발생하는 횡방향하중에 의한 실험 오차를 최소화하기 위하여 윤활재를 시편과 하중판의 경계에 적용하였다. 또한 시편의 종방향과 횡방향의 길이비가 2:1이 되게 가공하여 시편의 압축 도중 발생할 수 있는 시편 양끝단의 비균일 변형에 의한 실험 오차를 최소화하였다[12]. 해면골 시편의 응력완화거동은 5분 이내에 종결된다고 보고되어있다[5,13]. 따라서 본 실험에서는 해면골 시편의 응력완화거동이 300초의 시간 동안 측정되었으며, 하중 변화가 MTS 809 재료 시험기의 로드셀(Load Cell)을 통하여 10Hz의 데이터 획득률로 획득되었다(Global Lab; Data Translation, Inc., Marlboro, MA, USA). 개략적인 실험 및 측정 장치는 Fig. 1에 나타내었다.

### 3. 실험 결과

10개의 시편들에 대하여 300초 동안 각각 300개씩의 데이터가 측정되었다. 시편들이 값의 크기의 차이는 보이지 않지만 모두 시간에 따라 응력이 감소하는 응력완화거동을

보임을 알 수 있다.

### 표준 점탄성 모델 파라미터 추정

#### 1. 표준 점탄성 모델의 파라미터화

탄성체와 구별되는 점탄성체의 특징으로서 크리프와 응력완화 현상을 들 수 있다. 여기서 크리프란 일정한 응력 하에 변형률이 증가하는 현상을 말하고, 반대로 응력완화는 일정한 변형률 하에 응력이 감소하는 현상을 말한다. 이러한 점탄성 재료의 크리프, 응력완화 등과 같은 거동을 나타내기 위해서 선형 탄성체의 성질을 나타내는 스프링과 뉴턴 유체의 성질을 나타내는 대시포트(Dashpot)를 조합해 놓은 맥스웰-켈빈 모델(Maxwell-Kelvin Model)이 주로 사용된다. 특히 1개의 스프링 요소와 1개의 대시포트 요소가 병렬 연결된 조합에 또다른 스프링 요소 1개를 직렬 연결시킨 모델을 표준 점탄성 모델(Standard Viscoelastic Model)이라고 하는데 이것은 점탄성 고체재료의 거동을 나타내기 위해 널리 쓰이는 모델중의 하나이다. 표준 점탄성 모델에서 응력(Stress)과 변형률(Strain) 사이의 관계는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다[14].

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma(t) = E_1 \dot{\epsilon}(t) + \frac{E_1 E_2}{\eta} \epsilon(t) \quad (1)$$

(1)식으로부터 변형률 값이 일정한 경우, 즉  $\epsilon(t) = \epsilon_0$ 인 경우 표준 점탄성 모델의 일차원 응력완화거동은 (2)식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{\sigma(t)}{\tau_\epsilon} = \frac{E_1 E_2}{\eta} \epsilon_0 \quad (2)$$

여기서  $\sigma(t)$ 는 시간 변화에 따른 응력,  $\tau_\epsilon$ 는 지연시간 상수(Retardation Time Constant)로서

$$\tau_\epsilon = \frac{\eta}{E_1 + E_2} \quad (3)$$

이며  $\eta$ 는 대시포트 요소의 점성계수,  $E_1$ ,  $E_2$ 는 스프링 요소의 탄성계수,  $\epsilon_0$ 는 점탄성 재료에 가해지는 일정 변형률 값이다. (2)식의 해는 파라미터 벡터  $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$ 을 도입하여,

$$\sigma(t; \mathbf{p}) = p_1(1 - e^{-p_2 t}) + p_2 e^{-p_3 t} \quad (4)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서

$$p_1 = \epsilon_0 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}, \quad p_2 = \epsilon_0 E_1, \quad p_3 = \frac{E_1 + E_2}{\eta} \quad (5)$$

이다.

#### 2. 영차 정규화 기법이 포함된 비선형 최소자승법을 이용한 파라미터 추정

표준 점탄성 모델의 파라미터 추정은 비선형 최소자승법을 이용하여 수행한다. (4)식이 선형이 아니기 때문에 일반적인 최소자승법으로는 파라미터 값을 찾을 수 없으며, 반복계산과정을 거치게 되는 비선형 최소자승법을 써야한다. 다음의 (6)식과 같이 함수의  $l_2$  놈(Norm) 형태로 목적 함수(Objective Function)를 나타낼 수 있다. 이러한 목적 함수를 최소로 만드는 파라미터를 찾음으로써 표준 점탄성 모델의 파라미터를 추정할 수 있다.

$$J(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\sigma(t; \mathbf{p}) - \hat{\sigma}(t)\|^2 \quad (6)$$

여기서  $\sigma(t; \mathbf{p})$ 는 모델로부터 계산되는 응력 함수이고  $\hat{\sigma}(t)$ 는 실험에서 측정된 응력 값이다. 목적 함수를 시간에 대해 분할한 형태는 다음과 같다.

$$J(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\sigma(t_i; \mathbf{p}) - \hat{\sigma}(t_i)]^2 \quad (7)$$

여기서 N은 응력완화 실험에서 측정된 데이터 개수로서 본 실험에서는 N=300이며, 모델로부터 계산되어지는 응력  $\sigma(t_i; \mathbf{p})$ 는

$$\sigma(t_i; \mathbf{p}) = p_1(1 - e^{-p_2 t_i}) + p_2 e^{-p_3 t_i} \quad (8)$$

이다. 파라미터 벡터  $\mathbf{p}^{k+1} = \{p_1^{k+1}, p_2^{k+1}, p_3^{k+1}\}$ 를 계산하기 위하여 반복과정(Iteration Process)을 생각하면, k+1번째 반복시의 목적 함수는 다음의 벡터 형태로 나타낼 수 있다.

$$J(\mathbf{p}^{k+1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{S}(\mathbf{p}^{k+1}) - \hat{\mathbf{S}})^T (\mathbf{S}(\mathbf{p}^{k+1}) - \hat{\mathbf{S}}) \quad (9)$$

여기서  $\mathbf{S}$ 는 모델로부터 계산되는 응력값으로 이루어진 벡터,  $\hat{\mathbf{S}}$ 는 실험에서 측정된 응력값으로 이루어진 벡터로서

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}^k) = \{\sigma(t_i; \mathbf{p}^k)\}, \quad \hat{\mathbf{S}} = \{\hat{\sigma}(t_i)\} \quad (10)$$

으로 정의된다. (9)식은 영차 정규화 기법(Zeroth-Order Regularization Technique)을 이용하여 다음과 같이 바꿔 쓸 수 있다. 즉, 영차 정규화 파라미터  $\alpha_0$ 를 도입하여 (9)식을 (11)식으로 바꾼다. 이 방법은 미지의 파라미터를 구하는 일반적 최적화 기법에서 부적절한 초기값이 사용되거나 실험데이터에 오차가 크게 내재되어 있을 때 파라미터들이 발산하지 않고 적절한 값들로 수렴하게끔 해주는 장점을 가지고 있다.

$$J(\mathbf{p}^{k+1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{S}(\mathbf{p}^{k+1}) - \widehat{\mathbf{S}})^T(\mathbf{S}(\mathbf{p}^{k+1}) - \widehat{\mathbf{S}}) + \alpha_0(\mathbf{p}^{k+1})^T \mathbf{I} \mathbf{p}^{k+1} \quad (11)$$

여기서  $\alpha_0$ 는 영차 정규화 파라미터로서 양의 수이며,  $\mathbf{I}$ 는 단위행렬이다. (8)식을 파라미터 벡터  $\mathbf{p}$ 에 대하여 선형화 시켜서 (11)식에 대입하여 정리한 후에 (11)식을 최소로 만드는  $\Delta \mathbf{p}^k$ 를 찾으면 다음과 같다.

$$[\mathbf{Z}^T(\mathbf{p}^k)\mathbf{Z}(\mathbf{p}^k) + \alpha_0\mathbf{I}]\Delta \mathbf{p}^k = \mathbf{Z}^T(\mathbf{p}^k)[\widehat{\mathbf{S}} - \mathbf{S}(\mathbf{p}^k)] \quad (12)$$

여기서 민감도계수 행렬(Sensitivity Coefficient Matrix)

$$\mathbf{Z}(\mathbf{p}^k) = [Z_{ij}(\mathbf{p}^k)] \text{는}$$

$$Z_{ij} = \left. \frac{\partial \sigma(t_i; \mathbf{p})}{\partial p_j} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^k} \quad (13)$$

으로 정의된다. (12)식을 풀어서  $\Delta \mathbf{p}^k$ 를 얻을 수 있으며, 파라미터 벡터는  $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \Delta \mathbf{p}^k$  식을 이용하여 새로운 값으로 대체된다. 다음은 반복과정의 알고리즘이다.

1. 적당한 파라미터 벡터의 초기값  $\mathbf{p}^0$ 을 추정한다.
2.  $k = 0, 1, 2, \dots, K$ 에 대하여
  - a. 추정한  $\mathbf{p}^k$ 를 이용하여 (8)식으로부터 응력, 즉  $\mathbf{S}(\mathbf{p}^k)$ 를 계산한다.
  - b. 민감도계수 행렬  $\mathbf{Z}(\mathbf{p}^k)$ 를 계산한다.
  - c. (12)식을  $\Delta \mathbf{p}^k$ 에 대하여 풀고 파라미터를  $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \Delta \mathbf{p}^k$ 로 대체한다.
3. 수렴 여부를 체크한다. 만약 주어진 허용오차  $\lambda$ 에 대하여
 
$$\|\Delta \mathbf{p}^k\| \leq \lambda \|\mathbf{p}^k\|$$
 이 성립하면 알고리즘은 정지한다. 그렇지 않다면  $k = k+1$ 로 놓고 2.a.에서 계산을 재 수행한다.

### 3. 수치해석 결과

#### 1) 파라미터의 초기값 결정

수정형 가우스-뉴턴 방법을 실행할 때, 먼저 적절한 파라미터의 초기값을 정해주는 것이 매우 중요하다. 만약 부적절한 초기값을 주게 되면 위에서 설명한 알고리즘의 결과가 원하는 값으로 수렴하지 못하고 발산하게 되거나, 원하는 값으로 수렴한다고 해도 반복 횟수가 늘어나게 되어 계산 시간이 증가하는 문제가 생기게 된다. 여기서는 이러한 초기값의 부적절한 선택으로 인한 오류를 피하기

위해 영차 정규화 파라미터  $\alpha_0$ 를 도입하였다. 본 연구에서는 Burns[15] 등이 붉은털 원숭이의 추간판 관절(Rhesus Monkey Intervertebral Joint)을 표준 점탄성 모델로 가정하여 크리프 실험으로부터 구한 파라미터 값을 초기값으로 정하였다. 즉, 초기값으로  $E_1=21.580$  MPa,  $E_2=320.310$  MPa,  $\eta=1342.00$  GPa·s로 정하였으며, 이 값을 파라미터 벡터로 나타내면

$$\mathbf{p}^0 = \{0.202, 0.216, 0.000255\} \quad (14)$$

이 된다. 허용오차는  $\lambda=10^{-6}$ 으로 정하였다.

#### 2) 결과값

초기값을 (14)식과 같이 정하고, 영차 정규화 파라미터  $\alpha_0$ 값을 주지 않았을 경우에는 점탄성 모델의 파라미터 값이 수렴하지 못하고 발산하였다. 이렇게 발산하는 이유는 초기값이 부적절하게 선택되었거나 실험 결과의 변동이 크기 때문이다. 따라서 초기값을 바꾸거나 적절한  $\alpha_0$ 를 주어야 알고리즘이 수렴하게 된다. 여기서는 초기값을 바꾸지 않고 대신  $\alpha_0=0.01$ 으로 선택하였다. 이 경우 시편 2번을 제외하고는 모든 시편에서 점탄성 모델의 3개의 파라미터 값이 수렴하였다. 또한  $\alpha_0=0.06$ 으로 증가시키면 시편 2번에서도 모델의 파라미터 값이 적절한 값으로 수렴하였다. 다음의 Table 1.은 10개의 시편에 대해 행한 응력완화 실험 결과로부터 구한 각 시편들에 대한 점탄성 모델변수 값을 나타내고 있다. 여기서 파라미터들의 평균 값은 각각  $E_1=193.963$  MPa,  $E_2=1281.866$  MPa,  $\eta=111.775$  GPa·s 이다.

#### 3) 고찰

위에서 구한 모델 파라미터 값들의 정확도를 살펴보기 위해 실험을 통해 얻어진 응력완화곡선과 계산된 점탄성 변수값을 이용하여 구한 응력완화곡선을 이용하여 오차 분석을 행하였다. 오차는  $l_2$  norms을 사용하여 다음과 같이 정의하였다.

$$\text{error}(\%) = \frac{\|\sigma(t_i) - \bar{\sigma}(t_i)\|_2}{\|\bar{\sigma}(t_i)\|_2} \times 100 \quad (15)$$

여기서

$$\|\sigma(t_i) - \bar{\sigma}(t_i)\|_2 = \left[ \sum_{i=1}^N (\sigma(t_i) - \bar{\sigma}(t_i))^2 \right]^{1/2} \quad (16)$$

이고  $\bar{\sigma}(t_i)$ 는 실험에서 구한 응력완화곡선을 나타내며,  $\sigma(t_i)$ 는 파라미터를 이용하여 구한 응력완화곡선을 나타낸다. (15)식을 이용하여 각 시편에 대하여 오차 분석을 한 결과를 Fig. 3에 나타내었다. 실험치의 편차가 컸던 시편 4, 5, 6번의 경우 1.3~1.8%의 비교적 큰 오차를 보였으

표 1. 역추기법을 이용하여 계산된 해면골의 점탄성 물성치  
Table 1. Estimated viscoelastic properties of trabecular bone using an inverse method

시편 번호	$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$\eta$ (GPa·s)
1	197.303	1337.804	56.866
2	276.572	1318.497	123.173
3	129.483	840.668	57.719
4	112.287	847.775	254.848
5	112.380	859.743	248.686
6	69.688	283.413	26.280
7	323.618	1866.650	105.732
8	166.884	1894.220	62.187
9	151.751	939.330	58.535
10	399.661	2630.558	173.727
Mean	193.963	1281.866	111.775
SD	106.145	684.422	75.652

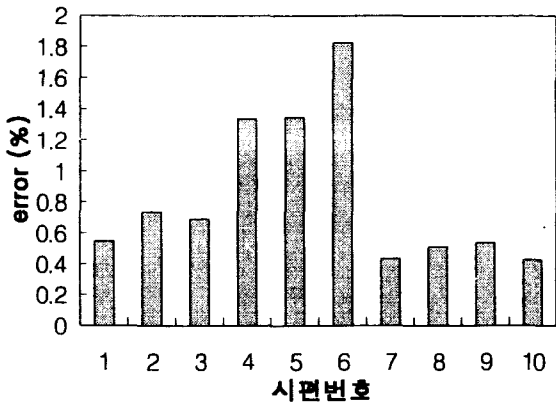


그림 1. 점탄성 모델로부터 계산된 응력값과 응력완화 실험으로부터 구한 응력값 사이의 오차 분석 결과

Fig. 1. Results of error analysis between the estimated stress from viscoelastic model and the obtained stress from stress relaxation experiments

며 실험치의 편차가 작았던 나머지 시편들은 0.4~0.7% 정도의 작은 오차를 보였다. 전반적으로 각 시편들이 모두 2% 미만의 작은 오차를 보여 계산된 파라미터 값이 해면골의 점탄성 거동을 정확히 묘사하고 있음을 알 수 있다.

### 결 론

1. 본 연구에서는 일축압축응력상태의 조건하에서 응력완화 실험을 먼저 수행하였으며 이를 통해 해면골이 점탄성적으로 거동함을 보였다. 또한 응력완화 실험에서 구한 실험 결과로부터 역추기법을 이용하여 해면골의 점탄성적 거동을 정확히 묘사할 수 있는 모델 변수값을 구하였다.

본 연구에서 제안한 역추기법을 통해 계산한 표준 점탄성 모델의 변수값들이 점탄성으로 거동하는 해면골의 특성을 정확히 묘사하고 있음을 알 수 있었다.

2. 실험 오차나 부적절한 초기값으로 인해 기존의 최소자승법으로 구하기 어려운 파라미터들을 영차 정규화 기법을 통해서 안정적으로 빠르게 구할 수 있었다.

3. 본 연구를 통해 확립된 표준 점탄성 모델은 실제로 시간 종속적인 해면골의 거동을 정확하게 묘사하는데 이용될 것이다.

### 참 고 문 헌

1. J.A. Buckwalter, M.J. Glimcher, R.R. Cooper and R. Recker, "Bone Physiology", J. Bone Jt. Surg., Vol. 77A, pp.1256-1289, 1995.
2. T.M. Keaveny and W.C. Hayes, "A 20-year perspective on the mechanical properties of trabecular bone", J. Biomech. Eng., Vol. 115, pp.534-542, 1993.
3. B.D. Snyder, Anisotropic structure-property relations for trabecular bone, Ph.D. Dissertation, Univ. Pennsylvania, 1991.
4. D.D. Deligianni, A. Maris and Y.F. Missirlis, "Stress relaxation behavior of trabecular bone specimens", J. Biomech., Vol. 27, pp.1469-1476, 1994.
5. C.M. Schoenfeld, E.P. Lautenschlager and P.R. Meyer, "Mechanical properties of human cancellous bone in femoral head", Med. Biol. Eng., Vol. 12, pp.313-317, 1974.
6. D.R. Carter and W.C. Hayes, "The compressive behavior of bone as a two-phase porous structure", J. Bone Jt. Surg., Vol. 59A, pp.954-962, 1977.
7. F. Linde, P. Norgaard, I. Hvid, A. Odgaard and K. Soballe, "Mechanical properties of trabecular bone. Dependence on strain rate", J. Biomech., Vol. 24, pp.803-809, 1991.
8. Z.P. Luo, J.A. Ochoa and B.M. Hillberry, "Effects of specimen size on hydraulic stiffening of cancellous bone", Trans. Orthopaedic Research Society, Vol. 18, pp.174, 1993.
9. T. Tateishi, Rheological Characteristics of Human Joints, In Recent Research on Mechanical Behavior of Solids, Tokyo, Japan, Univ. Tokyo Press, pp. 179-204, 1979.
10. H. Bui, Inverse Problems in the Mechanics of Materials, Boca Raton, FL, USA, CRC Press, 1994.

11. A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, *Solution of Ill-Posed Problems*, Washington D.C., V.H. Winston, 1977.
12. T.M. Keaveny, R.E. Borchers, L.J. Gibson and W. C. Hayes, "Theoretical analysis of the experimental artifact in trabecular bone compressive modulus", *J. Biomech.*, Vol. 26, pp.599-607, 1993.
13. H. Zilich, A. Rohlmann, G. Bergmann and R. K lbel, "Material properties of femoral cancellous bone in axial loading. Part 2: Time dependent properties", *Arch. Orthop. Trauma Surg.* Vol. 97, pp.257-262, 1980.
14. S.I. Krishnamachari, *Applied Stress Analysis of Plastics*, New York, Van Nostrand Reinhold, 1993.
15. M.L. Burns, I. Kaleps, L.E. Kazarian, "Analysis of compressive creep behavior of the vertebral unit subjected to a uniform axial loading using exact parametric solution equations of Kelvin-solid models. Part 2: Rhesus monkey intervertebral joints", *J. Biomech.* Vol. 17, pp.131-136, 1984.