

FT의 빠른 신뢰도계산을 위한 연구

A Study on the rapid calculating of reliability for Fault Tree

이 일 재* · 이 광 원**

Il-Jae Lee · Kwang-Won Rhie

(1997년 7월 28일 접수, 1997년 12월 12일 채택)

ABSTRACT

A new method in the fault tree analysis (FTA) for the reliability calculation is suggested. Two steps are necessary in traditional method in evaluation of the occurrence probability of top event in fault tree (FT). The first step is to find the minimal cutsets, and the second one is to substitute the result into the poincaré equation. In order to reduce the enormous computing time of this method, lots of rapid algorithms have been developed. Almost of all achievements were, however, based on the partial structural properties of FT. In this paper, the FT is transformed to a non-linear graph G which has the same minimal cutsets of original FT, and then the reliability is calculated using the domination theory. In this new method, the required number of equation terms are at most 2^n (n is node number of graph G), while $2^m - 1$ (m is the number of minimal cutsets) calculation terms are required in the poincaré equation in traditional method. Since $m \gg n$ in general, our new method reduces the calculation time significantly.

1. 서론

보통 시스템은 신뢰도 계산을 위하여 graph나 fault tree(FT)등으로 그 시스템의 신뢰도 특성을 표현하게 된다. 전산망이나 교통망등은 보통 하나의 부품이 graph의 한선에 1:1로 대응하

는 linear graph로 표현되나 화학공장이나 원자력 발전소등의 신뢰성분석을 위하여 쓰이는 FT는 보통 하나의 부품 또는 사건이 여러 곳에서 나타나는 non linear graph이다.

linear graph로 표현되는 system의 신뢰도분석은 문헌^{1~21)}에서 많이 연구되어 있으며 non

* 호서대학교 산업안전공학과

** 호서대학교 안전공학부

linear graph의 신뢰도 분석은 linear graph의 분석에 비해 더 복잡한 것으로 알려져 있다.

본 논문에서는 non linear graph로 분류되는 FT를 acyclic linear graph로 변환시킨 후²⁾에서 제시한 신뢰도 분석방법을 토대로하여 빠른 신뢰도 계산 알고리즘을 제시하고자 한다.

2. 연구의 동향

2.1 FTA의 소개

FTA(Fault Tree Analysis)는 시스템안전공학의 발달과 때를 같이 해서 1962년 벨 전화연구소의 H.A. Watson에 의해 미닛 맨 미사일의 발사 제어 시스템 연구에 관한 공군 계약에 관련해서 처음으로 고안되었다. 이어서 이 방법은 같은 벨 전화연구소의 Mearns를 비롯한 연구 그룹에 의해 개량되어 미사일의 우발 사고를 ㉠측하는 문제의 해결에 공헌했다.

FTA에 대한 내외의 관심을 일거에 높인 것은 1974년 미국 원자력위원회가 행한 상업용 원자력 플랜트 재해 위험성의 평가, 즉 라스무센 보고서(Rasmussen Report)에 인용되면서이다. 이 보고서에서 FTA가 가장 대규모로 활용되어 재해의 ㉠측이 행해졌다. 이 보고는 각 방면에 큰 반향을 불러 일으키면서 동시에 이것이 FTA 이용가치의 높이를 세상에 넓히는 데 큰 영향을 했다고 할 수 있다²²⁾.

2.2 FTA의 고찰

2.2.1 Top event의 확률계산

FTA는 크게 정성적 분석과 정량적 분석 두 가지로 대변된다²³⁾.

정성적 분석에서는 minimal cutsets을 구하는 것이 대표적이며 정량적분석에서는 top event의 발생확률 $P(\text{top})$ 을 구하는 것이 대표적이다²⁴⁾.

Basic event의 발생확률값이 매우 미미한 경우(<0.05) FT에 나타나는 포앙카레식의 첫 번째 항만을 사용하여 계산을 하여도 top event 발생확률을 큰 오차없이 계산할 수 있다. 그러나 $P(\text{top})$ 을 정확히 계산하기위하여는 포앙카레

식에 나타나는 모든 항을 계산하여야 하며 이때 항의 수가 2^m-1 개(m 은 minimal cutset의 수)로 m 에 대해 폭발적으로 증가하게 된다.

만약 $m=1000$ 개인 경우 2번째 항까지 계산하려면 약 50만개의 항이되며 3번째 항까지 계산하려면 약 16,750만개를 계산하여야 한다. 위와 같이 항의 수가 지수적으로 증가하므로 인하여 정확한 값을 계산하지 못하고 있다. 이처럼 FT 해석은 np-hard problem이므로 FT의 해석을 위하여 다양한 여러 알고리즘이 개발되어왔다. 간단하게 살펴보면 처음으로 Vesely와 Narum은 첫 번째 결정론적 FT Reduction과 정량 코드인 PREP과 KITT를 개발하였으며 Fussell과 Vesely는 FT의 cutset을 결정하기위한 체계적인 방법을 개발하였다. 이 Algorithm은 MOCUS에 사용되었다. MOCUS는 top-down algorithm이다. 그러나 이를 커다란 FT에 적용하기는 어려웠다. Chatterjee에 의하여 개발된 modularization and independent sub-tree는 1970년대에 개발된 FTA, WAMCUT에 사용되었고 1980년대 초에 개발된 PRAs에 사용되었다. Sandia National Laboratory에서 개발된 PRA code인 SETS는 다른 code와 다르게 FT에서 cutset을 결정하기 위하여 Boolean equation과 Boolean algebra를 사용하였다. 또한 이 code에 independent sub-tree를 인식할 수 있는 루틴을 포함하고 있다. 1980년대에 personal computer의 성능향상으로 인하여 PRA code가 개인 컴퓨터에 적합하도록 변형되었다. 오늘날 개인 컴퓨터는 1970년대말이나 1980년대초의 대형 컴퓨터를 능가하는 강력함을 갖추고 있다²⁵⁾. 이런 개인 컴퓨터에서 사용되는 프로그램으로는 IRRAS, CAFTA, KIRAP, 독일에서 개발된 RISA+등이 있다.

2.2.2 FTA의 해석단계

위의 2.2.1에서 설명한 여러 code에 사용된 알고리즘은 대개의 경우 다음과 같은 단계를 거쳐 minimal cutsets을 산출하고 Top사건의 발생확률 $P(\text{top})$ 을 계산한다.

1) Cutset의 산출

일반적으로 FT의 top사상발생확률 $P(\text{top})$ 을 얻기 위하여 minimal cutsets을 구하고 이를 이

용하여 P(top)을 산출한다. minimal cutsets을 구하기 위한 방법은 크게 다음과 같은 세 가지 방법을 이용한다.

첫 번째, bottom-up으로 이 방법은 FT의 하위 gate에서 상위 gate로 올라가며 최종적으로 정점사상(top)에 대한 계산을 수행하는 방법이다. 두 번째, top-down은 FT의 상위의 gate에서 하위 gate로 내려가며 계산하는 방법이다²⁶⁾.

세 번째는 위의 두 방법을 혼용하여 사용하는 것인데 IRRAS 코드에서 사용되고 있다²⁵⁾.

2) cutsets에서 minimal cutsets의 산출

이 과정은 repeat event가 존재하는 경우에 적용하는 단계이나 보통의 FT의 경우는 이런 event를 포함하고 있다. repeat event가 존재하지 않는다면 이런 과정은 생략 가능하다²⁷⁾.

cutsets에서 minimal cutsets을 구하기 위하여 이전에 발표한 논문²²⁻³⁶⁾을 보면 찾아진 하나의 cutset을 일일이 전에 구하여진 minimal cutsets의 집합에서 현재의 cutset과 비교하여 minimal cutsets을 찾거나 혹은 모든 cutsets을 찾은 후 이들을 서로 비교하여 minimal cutsets을 찾는다. minimal cutsets을 찾기위하여 소요되는 시간의 단축을 위하여 기존에 많은 연구논문이 발표되어 있다.

3) 산출된 minimal cutsets을 사용한 top event의 발생확률계산

시스템의 정량적평가를 위하여는 산출된 minimal cutsets을 poincaré식에 대입하여 구해지거나 계산시간이 minimal cutset수에 지수적으로 증가하게 된다. 이런 이유로 보통 poincaré식의 제1항이나 3항까지 계산한 근사치로 만족하여야 하는 경우가 많으며, 보통 구하여진 minimal cutset의 값을 모두 합한 제1항만을 계산하게 된다.

2.2.3 절삭값

보통 FT가 커지면 minimal cutset의 수도 폭발적으로 커지게 되며, 이런 경우 계산하기가 곤란하여 진다. 전개되는 항의 수를 줄이는 한 방법으로 어떤 항의 발생확률이 미리 주어진 절삭값(cutoff value)보다 적은 항은 삭제하는 것이다. 절삭값을 적용하지 않는다면 전개되는 항의 수는 ㉠측이 불가능할 정도로 많아지게 된다²⁶⁾.

2.2.4 본 연구의 방향

위에서 보듯이 FT의 분석은 minimal cutset들을 찾고 다시 이를 poincaré식에 대입하여 계산하는 두 단계를 꼭 거쳐야 한다. 이때 이 두 단계들은 많은 계산시간을 요구하며 종종 분석의 정확도를 떨어뜨리게 된다. 본 연구에서는 FT를 graph로 변환시키고 신뢰도특성이 변하지 않음을 증명한 후 graph의 신뢰도분석에서 가장 빠르다고 여겨지는 [2]의 algorithm을 사용하여 FT의 top사건발생확률을 계산할 수 있는 algorithm을 제시한다. 이 algorithm은 minimal cutsets의 산출과 P(top)의 계산을 동시에 수행하며, 정확한 신뢰도산출을 할 수 있고, 계산시간은 최대 2^n (n은 변환된 graph의 절점수)개의 항을 요구한다. FT의 minimal cutset의 수가 최대 2^n 개임을 감안한다면 이는 기존의 방법보다 훨씬 빠른것이라고 사료된다.

3. 수학적 배경

본 연구는 FT를 이에 대응하는 non linear graph로 1차 변환시킨 후 이를 acyclic linear graph로 변환시킨다. 이때 신뢰도 특성이 변함이 없음을 증명하기 위하여는 domination이론을 사용하였다. 본 장에서는 고전적인 신뢰도 계산 방법들과 domination이론들에 대하여 간단히 설명한다.

3.1 신뢰도계산 방법과 domination이론

보통 어떤 system의 신뢰도 계산을 위하여는 그 system에 대응하는 graph나 FT의 minimal path나 minimal cutset을 찾고 이를 poincaré(Inclusion-Exclusion 식)이나 Factoring Method를 사용하는 법과 Reduction방법등 크게 3가지로 분류할 수 있다.

이 중 minimal cutsets을 찾아내고, 이를 이용하여 system의 고장도를 계산하면 system의 고장도 Q(G)는 최소한 하나의 minimal cutset에 포함되는 모든 부품이 고장날 확률로 표현된다.

관찰하는 system G의 모든 minimal cutset의 family를 $C(G) = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ 이라 하고 사건 A_i

를 C_i 에 포함되는 모든 부품이 고장일 사건이라 하면 결국 시스템의 고장도 $Q(G)$ 는

$$Q(G) = q(\bigcup_{i=1}^m A_i) \dots\dots\dots (1)$$

로 쓸 수 있다. 이 확률계산은 Inclusion-Exclusion식을 사용할 경우

$$Q(G) = \sum_{i=1}^m q(A_i) - \sum_{i>j} q(A_i \cdot A_j) + \dots + (-1)^{m-1} q(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \dots A_m) \dots\dots\dots (2)$$

로 표현되며 2^m-1 개의 항을 관찰하여야 한다.

이 항들 중 같은 부분집합이며 부호가 다른 항들이 다수 발생되며 이들은 서로 소거되어질 수 있다.

식(2)에 나타나는 임의의 항 $A_i \cdot A_j \dots A_k$ 에 포함되어지는 선(부품)들만을 포함한 어떤 부분그래프 G_k 는 사건들 $A_i \cdot A_j \dots A_k$ 가 i) 짝수개이면 -(minus)부호를 ii) 홀수개이면 +(plus)부호를 갖으며 짝수개가 n_c 번, 홀수개의 사건이 n_o 번 나타나면 결국 $n_o - n_c$ 번의 $q(G_k)$ 값을 계산해야 한다.

이 때 $n_o - n_c$ 값을 그 부분그래프의 domination이라 부르며, $q(G_k)$ 는 G_k 에 포함되는 모든 부품이 고장날 확률을 뜻한다.

<정의>

G 의 어떤 임의의 부분그래프(subgraph)를 G_a 라 하고, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_b\}$ 를 G 의 선집합, $E_a (\subseteq E)$ 는 G_a 의 선집합, $M(G) = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ 을 E 의 원소를 기초로 한 임의의 집합 family($M_i \subseteq E$)라 하면 모든 $M(G)$ 의 subfamilyset $M_a = \{M_i, M_j, \dots, M_k\}$ 들이

$$\bigcup_{j=1}^1 M_j = E_a$$

인 경우 G_a 의 formation이라 한다. 만약 $|M_a| (= M_a)$ 에 포함된 M_i 수가 짝수이면 짝수 formation, 그렇지 않으면 홀수 formation이라 하고 N_c 와 N_o 를 짝수와 홀수 formation의 수를 나타낸다고 하면, $M(G)$ 를 기초로 한 부분그래프 G_a 의 domination $d(G_a, M(G))$ 는

$$d(G_a, M(G)) = N_o - N_c \dots\dots\dots (3)$$

로 정의된다.

[예 1]

$M(G)$ 가 Fig. 1의 그래프 G 의 minimal cutset family $C(G)$ 인 경우를 관찰하자. G 의 minimal

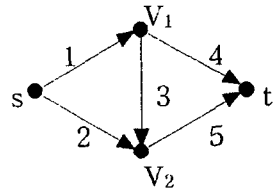


Fig. 1 A graph with bridge structure G

cutsets을 $C_1 = \{1,2\}$, $C_2 = \{1,5\}$, $C_3 = \{2,3,4\}$, $C_4 = \{4,5\}$ 라 하면 선의 집합 $\{1,2,3,4,5\}$ 를 갖는 그래프의 formation은 5개가 존재한다. 즉 $C_2 \cup C_3$, $C_1 \cup C_2 \cup C_3$, $C_1 \cup C_3 \cup C_4$, $C_2 \cup C_3 \cup C_4$, $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ 가 존재하며 3개의 홀수 formation과 2개의 짝수 formation을 갖으므로 $C(G)$ 를 기초로 한 $\{1,2,3,4,5\}$ 를 갖는 그래프(즉 G)의 domination은 $d(G, C(G)) = n_o - n_c = 3 - 2 = 1$ 이 된다.

식(2)에서 항 $A_i \cdot A_j \dots A_k$ 는 이들이 포함하고 있는 선들만을 포함하는 G 의 어떤 부분그래프 G_a 에 대응하게 되며 결국 식(2)는 식(3)과 함께

$$Q(G) = \sum_{G_a} d(G_a, C(G)) \cdot q(G_a) \dots\dots\dots (4)$$

여기서, $q(G_a)$: G_a 의 모든 선이 고장일 확률
 G_a : 식(2)에 나타나는 항들과 대응되는 부분그래프

로 나타낼 수 있다.

3.2 Domination이론에서의 기초식

참고문헌 1)에서는 임의의 subgraph G_a 에서 선들의 집합 e 를 제거한 $G_a - e$ 의 domination 값이 다음과 같음을 증명하였다.

$$d(G_a - e, M(G) - e) = \sum_{M_i \in M} d(G_a - e, M_i) \dots\dots\dots (5)$$

여기서 $M(G)$ 는 minimal cutset이나 minimal path의 집합으로 생각할 수 있으며 $M(G) = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ 인 경우 $M(G) - e$ 는 원소들($M_i \in M(G)$)(즉, minimal cutset이나 minimal path들)로부터 선집합 e 를 제거한 것이다. 결국 식(5)는 $M(G) - e$ 를 기초로한 subgraph $G_a - e$ 의 domination은 $M(G)$ 를 기초로한 모든 subgraph들 $G_a - e_i$ (여기서 e_i 는 e 의 부분집합들)의 domination과 같음을 말해준다. 윗식은 본 연구에서 non linear graph를 linear graph로 변환시 신뢰

도 특성에 변화가 없음을 증명 가능케 해준다.

3.3 기초용어론

3.3.1 Indegree와 Outdegree, Incut과 Outcut

어떤 p-그래프에서 임의의 절점 V_i 를 관찰할 때 들어오는(도착되어지는) 모든 선의 집합을 그 절점의 Incut이라 하고 $Incut(i)$ (또는 I_i)라 표시하며, V_i 에서 나가는(출발하는) 모든 선의 집합을 그 절점의 Outcut이라 하고 $Outcut(i)$ (또는 O_i)로 표시한다.

Indegree(i) 또는 outdegree(i)는 절점 V_i 에 도착되는 선 또는 출발하는 선의 수를 나타내 주며 간단히 $Ind(i)$ 또는 $Outd(i)$ 로 표시한다.

정의에 의해 source절점 s에서 $Ind(s)=0$ 이며 terminal절점에서 $Outd(t)=0$ 이 된다.

Table 1 Incut, Outcut, Indegree and Outdegree of Fig.1

	Incut	Outcut	Indegree	Outdegree
s	{ }	{1,2}	0	2
V_1	{1}	{3,4}	1	2
V_2	{2,3}	{5}	2	1
t	{4,5}	{ }	2	0

4. FT의 graph로의 변환

본 장에서는 FT를 1차적으로 acyclic non linear graph로 변환시킨 후 이를 다시 acyclic linear graph로 변환하여 본다. 이때 FT의 신뢰도특성이 변하지 않음을 증명하였다.

4.1 FT의 non linear graph로의 변환

일반적으로 FT는 시스템의 특성을 표현하기 위하여 다양한 gate를 사용한다. 본 논문에서는 이들 중 가장 많이 쓰이는 or-gate, and-gate 그리고 n out of m gate만을 갖는 경우를 관찰하였다.

1) Or-Gate인 경우

FT의 어느 임의의 or-gate T와 그 밑에 기초사상이나 gate가 Fig. 3(a)와 같이 분기된다고 하자. 이 부분 FT에 해당되는 그래프는 Fig. 3(b)와 같이 표현되어 진다. 이때 graph의 절점들은 완벽하며(즉 고장확률은 0이며) 각각의 선

들은 FT의 대응되는 각 사상의 발생확률값을 갖는다고 정의된다. 이때 gate T가 발생될 고장확률 $Q(T)$ 는 A, B, ..., L중 하나의 기초사상이나 gate가 발생될 확률이므로

$$Q(T) = q(\bigcup_{i=A}^L i)$$

로 표현된다.

그래프에서는 절점 S에서 T가 연결되지 않을 확률 $Q(S \rightarrow T)$ 로 A, B, ..., L선중 하나만 고장이면 연결되지 않으므로

$$Q(S \rightarrow T) = q(\bigcup_{i=A}^L i)$$

이며 두 구조는 결국 같은 확률과 cutset을 갖는다.

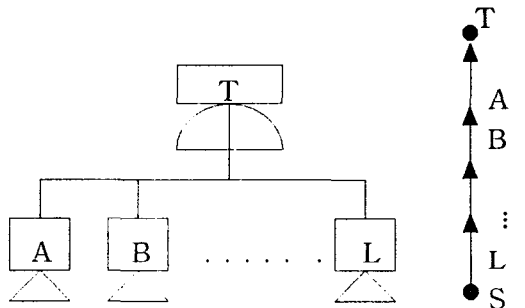


Fig. 2(a) or-gate

Fig. 2(b) a changed graph for Fig. 2(a)

2) And-Gate인 경우

FT의 어느 임의의 and-gate T와 그 밑에 기초사상이나 gate가 Fig. 4(a)와 같이 분기된다고 하자. 이때 이 부분 FT에 해당되는 그래프는 Fig. 4(b)와 같이 표현되어 진다. 이때 gate T가 발생될 고장확률은 A, B, ..., L중 하나의 기초사상이나 gate가 동시에 발생될 확률로 표현되며

$$Q(T) = q(\bigcap_{i=A}^L i)$$

로 표현된다.

그래프에서는 절점 S에서 T로 연결되지 않을 확률은 A, B, ..., L선 모두가 고장이면 연결되지 않으므로

$$Q(S \rightarrow T) = q(\bigcap_{i=A}^L i)$$

이며 두 구조는 결국 같은 확률을 갖는다.

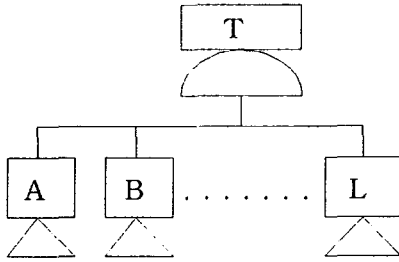


Fig. 3(a) and-gate

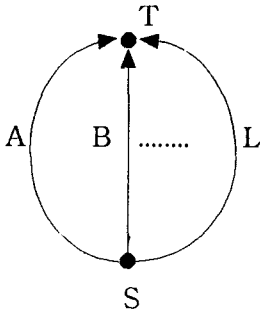


Fig. 3(b) a changed graph for Fig. 3(a)

3) n out of m(n/m) gate인 경우

FT의 어느 임의의 n/m gate T와 그 밑에 기초사상이나 gate가 Fig. 5(a)와 같이 분기된다고 하자. 이때 이 부분 FT에 해당되는 그래프는 Fig. 5(b)와 같이 표현되어 진다. 이때 n/m gate T가 발생될 고장확률은 A, B, ..., L(=m개)의 기초사상이나 gate중 n개의 기초사상이나 gate가 동시에 발생될 확률로 표현되며 mC_n 개의 minimal cutset수를 갖는다. 각 minimal cutset은 모두 n개의 성분으로 구성되며 이들 minimal cutset들의 집합을 $C(T)=\{C_1, C_2, \dots, C_L\}$ 이라 하면

$$Q(T) = \prod_{i=1}^L q(C_i)$$

로 표현된다.

이들 minimal cutset들에 포함된 성분들을 모두 병렬연결 시키고, 이들은 직렬연결 시켜서 얻는 graph역시 Q(T)와 같은 값을 얻는다.

다음 Fig. 4(a)는 2 out of 3 gate의 경우를 Fig. 4(b)는 이에 대응하는 graph를 보여주며 Fig. 4(c)와 Fig. 4(d)는 Fig. 4(b)를 간략히 그린 것이다.

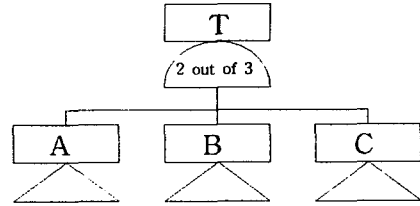


Fig. 4(a) 2 out of 3 gate

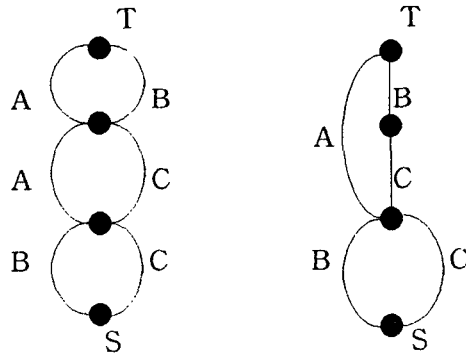


Fig. 4(b) a chanded graph

Fig. 4(c)

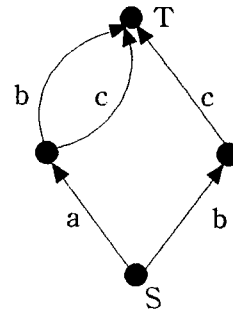


Fig. 4(d) a simple graph of Fig. 4(a) of Fig. 4(b)

4) 일반적인 경우

and와 or-Gate 또는 n out of m gate가 여러 개 있는 일반적인 FT의 그래프 변환은 top gate로부터 차례대로 변환시킬 수 있다. 이때 생성되는 graph는 cycle을 포함치 못하는 acyclic graph임을 쉽게 알 수 있다. 다음의 ㉠는 gate가 3개 기초사상이 6개인 FT의 acyclic 그래프로의 변환을 보여준다.

[예 2]

Fig. 5에서 FT를 Graph로 변환시켜 본다.

top gate를 그래프로 나타내면 아래와 같다. top gate는 and-gate이므로 아래의 Fig. 5(a)와

같이 연결된 event(basic event와 gate를 통칭) 만큼 선이 분기한다. 각각의 선은 event가 된다. 오른쪽은 FT로 나타낼 때의 그림이다

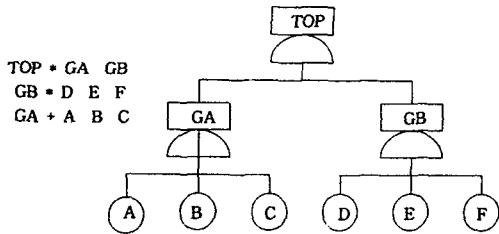


Fig. 5 FT with 3 gate

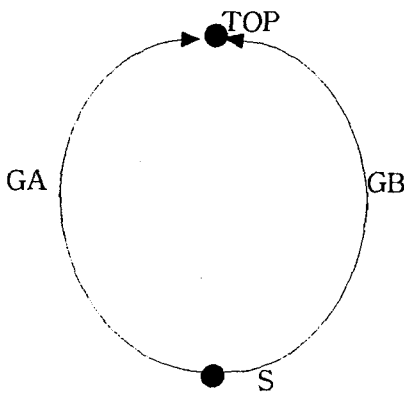


Fig. 5(a) first step to change into graph

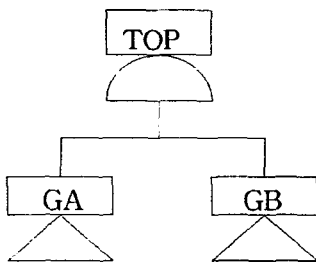


Fig. 5(b) separation of top gate

Fig. 5(a)에서 S절점에서 출발하여 TOP절점에 도착하지 않을 확률 $Q(S \rightarrow TOP)$ 은 $Q(GA) \cap Q(GB)$ 로 표현되고 Fig. 5(b)에서 top사건이 발생할 고장확률 $Q(TOP)$ 역시 동일하다. gate GA는 or-Gate이므로 각각의 event는 하나의 연결된 선과 같은 연결을 이루며 중간에 node가 삽입된다.(Fig. 5(c) 참조)

이때 $Q(S \rightarrow TOP) = q(A \cup B \cup C) \cap q(GB)$ 이고

Fig. 5(d)에서는 $Q(TOP) = q(A \cup B \cup C) \cap q(GB)$ 이므로 역시 동일하며 위의 두 Fig.5(c), Fig.5(d)의 minimal cutsets = $\{(GB,A)\{GB,B)\{GB,C)\}$ 역시 같다. 위의 예의 세 번째줄을 그래프로 나타내면 아래와 같다.

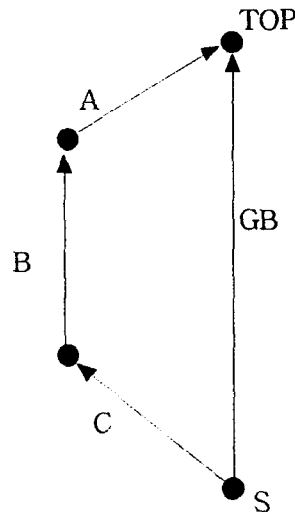


Fig. 5(c) second changing

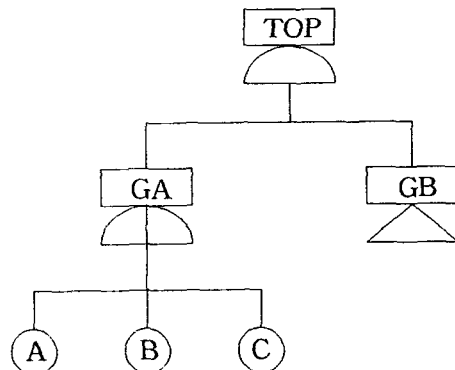


Fig. 5(d) separation of second gate

GB 역시 병렬구조로 분기되며 Fig. 5(e)와 같은 acyclic graph를 결국 얻게 된다. 이때 Fig. 5와 Fig. 5(e)는 같은 신뢰도값과 minimal cutsets $C(G) = \{(D, E, F, A), \{D, E, F, B), \{D, E, F, C)\}$ 를 갖는다.

Fig. 5(b)에서 Fig. 5(e)사이의 전개과정과 같이 게이트의 성질에 따라 and-gate이면 병렬분기하고 or-gate이면 직렬분기하는 형태의 그래

프로 구현이 된다.

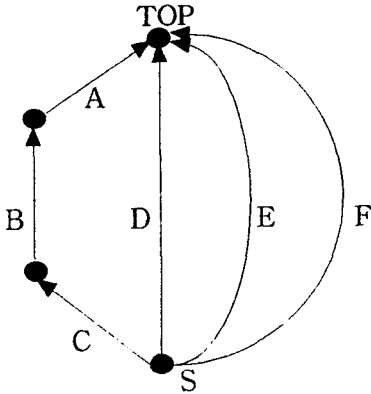


Fig.5(e) a matched acyclic graph with Fig.5

4.2 Non Linear Graph의 Linear Graph로의 변환

본장은 non linear graph인 임의의 그래프 G를 같은 신뢰도특성을 갖는 linear graph GL로 변환하는 것에 대하여 설명한다.

어떤 non linear graph에 포함되는 선(부품) i가 L번 나타나면 I₁, I₂, ..., I_L로 각기 표기하고 다른 성분으로 인식하자. I₁, I₂, ..., I_L의 집합을 I로 표시하고 임의의 subset j(⊆I)가 포함된 subgraph G_k+j에 포함된 모든 부품이 고장날 확률을 q(G_k+j)=q(G_k)·q(j)로 정의하면 다음의 식이 성립된다.

< Theorem 1 >

$$Q(G) = \sum_{\forall G_k \in G} d(G_k, C(G)) \cdot q(G_k)$$

$$= \sum_{\forall G_k \in G} d(G_k^L, C(G^L)) \cdot q(G_k) \dots\dots\dots (6)$$

증명 :

i) G가 여러번 나타나는 성분을 포함치 않으면 G=G^L, G_k=G_k^L, C(G)=C(G^L)이며 d(G_k, C(G))=d(G_k^L, C(G^L))이 성립된다.

ii) G가 여러번 나타나는 성분을 한개만 포함한 경우

이 성분을 i라 하고 L번 나타난다 할 경우, G^L에는 I₁, I₂, ..., I_L이 존재하게 된다. 이때 I={i₁, I₂, ..., I_L}이라 하면

식(5)에서 I를 모두 포함하는 모든 subgraph G_k^L에 대하여

$$d(G_k^L - I, C(G^L - I)) = \sum_{i \in I} d(G_k^L - i, C(G^L)) \quad (7)$$

로 쓸 수가 있으며 i를 포함하는 subgraph G_k에 대하여는

$$d(G_k - i, C(G - i)) = d(G_k, C(G)) + d(G_k - i, C(G)) \dots\dots\dots (8)$$

로 쓰여진다. 이때 G_k^L-I=G_k-i이므로 식(7),(8)의 좌변항은 같다. 결국 식(7),(8)의 우변항도 같아야 되므로

$$\sum_{i \in I} d(G_k^L - i, C(G^L)) = d(G_k, C(G)) + d(G_k - i, C(G)) \dots\dots\dots (9)$$

이며 모든 GK⊆(G-i)에 대하여 성립하므로 식(6)은 증명된다.

iii) G가 여러번 나타나는 성분을 여러개 포함한 경우 단계 ii)와 함께 induction방법을 적용하면 증명된다.

5. 신뢰도 계산 Algorithm

acyclic linear graph G^L에 대한 신뢰도 계산 식은 문헌²⁾의 식(6)와 식(12)에서

$$Q(G^L) = \sum_{\forall A \in S(G^L)} q(O_{SA} - I_A) \cdot \prod_{\forall b \in A} (1 - q(I_b - O_{(N-A)})) \dots\dots\dots (10)$$

with $\begin{cases} S(G^L) = \{ \forall A \subseteq N \mid I_A \not\subseteq O_b, b \in A \} \\ N : G \text{ 또는 } G^L \text{의 내부절점집합} \end{cases}$

로 주어진다.

이 식은 문헌²⁾의 식(7-8)로 바꿔 쓸 수 있다.

즉

$$Q(G^L) = \sum_{\forall A \in S(G^L)} Q_A, \text{ with } Q_A = (q(O_i) / q(I_i - O_{(N-A+i)})) \cdot (1 - q(I_i - Q_{(N-A+i)})) \cdot Q_{A-i} \dots\dots\dots (11)$$

여기서 i는 절점집합 A에서 그래프구조 제일 나중에 오는 절점이고, Q_∅=q(O_s)이다. 위식은 내부절점의 수가 n개일 경우 최대 2ⁿ에 비례되는 계산시간을 요구한다.

[예 3]

식(10)을 사용한 2/3 gate의 고장도 Q(G)는 다음과 같다.

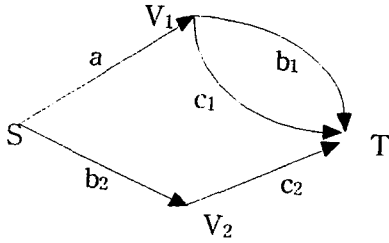


Fig. 6 a changed linear graph for FT with a 2/3 gate

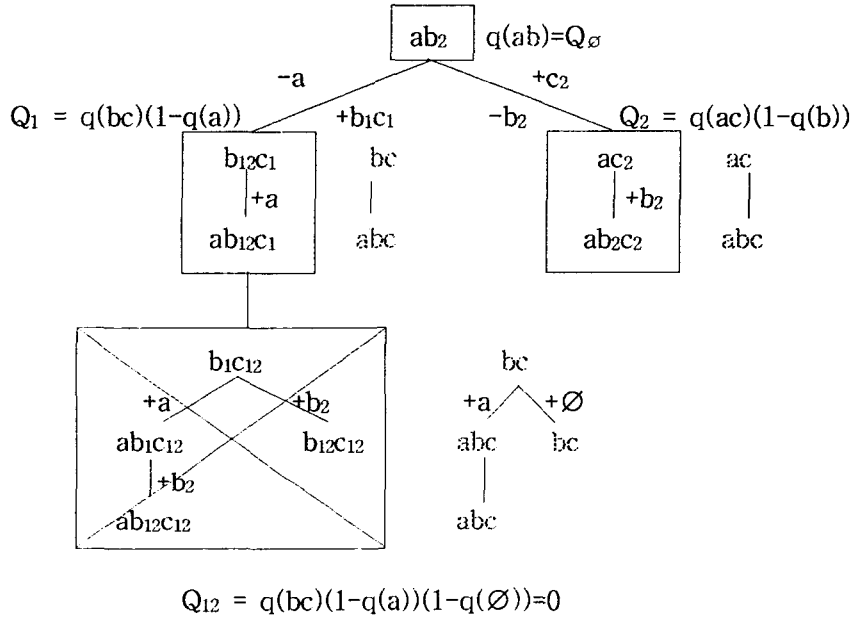
6. 알고리즘

FT의 정성적 및 정량적평가를 위한 minimal cutsets의 산출과 top event의 발생확률을 계산하기위한 알고리즘은 다음과 같다.

Main program

Start

step 1; FT를 linear graph로 변환시킨다.



$$Q(G) = Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_{12}$$

$$= q(ab) + q(bc)(1-q(a)) + q(ac)(1-q(b))$$

Fig. 7 process of calculation

step 2; $A = \{ \}$, $Q = q(O_S^*)$, $Q(G) = Q_A$

step 3; O_S 에 포함되는 모든 도착점 i 에 대하여 Call Procedure(A, i, Q)

End

Procedure(A, i, oldQ)

Start

step 4; $A = A \cup i$

$$NewQ = \left(\frac{q(O_i)}{q(I_i - O_{(N-A)})} \right) \cdot$$

$$(1 - q(I_i - Q_{(N-A)})) \cdot OldQ$$

$$Q(G) = Q(G) + NewQ$$

step 5; If $i \neq n$ For $j = i + 1$ to n Do

If $I_j \cap O_{S,A} = \emptyset$

Then Call Procedure(A, j, NewQ)

Stop

FT를 4장의 설명과 같이 linear graph로 변환시킨다. 변환된 그래프 G의 source절점과 terminal 절점이 연결되지 못할 확률 Q(G)는 FT의 top event 발생확률과 같으며 이를 계산하기 위하여는 식(11)을 사용하여 계산할 수 있다. 이를 위하여 제일 먼저 source절점에서 나가는 모든 선들의 도착점 i에 대하여 procedure를 호출하고(step3), 식(11)에 따라 계산한다(step4). 계산후 관찰한 절점 i에서 출발하는 모든 선들의

도착절점들에 대하여 procedure를 재귀적으로 다시 호출하고(step5) 만약 나가는 선들이 없으면(즉 관찰되는 절점 i 가 terminal절점 t 이면) 본 알고리즘이 끝난다.

본 알고리즘은 내부절점의 수가 n 개인 경우 계산되어야 하는 항의 수는 그래프의 구조에 따라 다르나 최대 $2n$ 개의 항이 계산되어야 한다. minimal cutset의 수의 최대 $2n$ 개 생성될 수 있음을 고려할 때 이는 기존 FT의 계산방법에 비해서 상당히 빠르다고 할 수 있다.

7. 결 론

본 연구는 non linear graph인 FT를 일반적인 graph로 변형시키고 이를 다시 acyclic linear graph로 변형시켰다. 이 과정에서 신뢰도의 변화가 없음을 증명하였고, 기존의 FT 신뢰도 분석보다 이론상으로 빠른 신뢰도 계산식과 알고리즘을 제시하였다. 본 연구에서는 우선 and-, or-, n out of m gate를 만들 포함한 FT를 대상으로 하였으며, 그밖의 다른 gate를 포함한 FT에 대한 연구와 이의 실용화가 앞으로 연구 과제라 할 수 있겠다.

참 고 문 헌

- 1) 이광원, 이일재, 강신재, "Domination 이론에서의 새로운 식과 이의 신뢰성계산에 대한 적용", 한국산업안전학회지, Vol. 11, No. 1, 1996.
- 2) 이광원, "Domination 이론을 이용한 acyclic digraph의 빠른 신뢰도 계산을 위한 연구", 한국산업안전학회지, Vol. 11, No. 1, 1996.
- 3) A. Satyanarayana, "A unified Formula for Analysis of Some network Reliability Problems", IEEE Trans. Reliability, vol. R-31, No.1, April 1982.
- 4) A. Satyanarayana and A. Prabhaker, "New Topological Formula and Rapid Algorithm for Reliability Analysis of Complex networks", IEEE Trans. Reliability, Vol. R-27, pp. 82-100, June 1978.
- 5) J.A. Abraham, "An improved algorithm for network reliability", IEEE Trans. Reliability, Vol. R-28, April 1979.
- 6) L. Fratta and U.G. Montanari, "A Boolean algebra method for computing the terminal reliability in a communication network", IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. C-20, May 1973.
- 7) K.K. Aggarwal, K.B. Misra and J.S. Gupta, "A fast algorithm for reliability evaluation", IEEE Trans. Reliability, Vol. R-24, April 1975.
- 8) S.H. Lee, "Reliability evaluation of a flow network", IEEE Trans. Reliability, Vol. R-29, April 1980.
- 9) R.E. Barlow, F. Proschan, "Statistical Theory of Reliability and Life Testing", Mc-Ardle Press, Inc., 1981.
- 10) K.B. Misra, and T.S.M. Rao, "Reliability analysis of redundant networks using flow graphs", IEEE Trans. Reliability, Vol. R-19, Feb 1970.
- 11) A. Satyanarayana and M.K. Chang, "Network Reliability and the Factoring Theorem", networks, Vol. 13, 1983.
- 12) R.R. Willie, "A Theorem Concerning Cyclic Directed Graphs with Applications to network Reliability", networks, Vol. 10, 1980.
- 13) R.K. Wood, "A Factoring Algorithm Using Polygon-to-Chain Reductions for Computing k -Terminal network Reliability", networks, Vol. 15, 1985.
- 14) A. Satyanarayana, A. Prabhaker, "Comments on New Topological Formula and Rapid Algorithm for reliability analysis of Complex networks", IEEE Trans. Reliability, Vol. R-28, Aug 1979.
- 15) A. Agrawal and R.E. Barlow, "A Survey of network Reliability and domination Theory", Operations Research, Vol. 32, No. 3, May-June 1984.

- 16) A. Satyanarayana, J.N. Hagstrom, "A New Algorithm for the Reliability Analysis of Multi-Terminal networks", IEEE Trans. Reliability, Vol. R-30, Oct 1982.
- 17) J.A. Buzacott, "A Recursive Algorithm for Directed-Graph Reliability", networks, Vol. 13, 1983.
- 18) A. Satyanarayana, J.N. Hagstrom, "Combinatorial Properties of Directed Graphs Useful in network Reliability", networks, Vol. 11, 1981.
- 19) A. Agrawal and A. Satyanarayana, "An O(|E|) Time Algorithm for Computing the Reliability of a Class of Directed networks", Operations Research, Vol. 32, No. 3, May-June 1984.
- 20) J.D. Spragins, J.C. Sinclair, Y.J. Kang, and H. Jafari, "On Selected Areas in Communications", IEEE J., SAC-4, 1986.
- 21) Kwang-Won Rhie, "Zur Domination und Zuverlässigkeit linearer Graphen aufgrund ihrer Minimalschnitte", Dissertation, Technische Universität in Berlin, July 1994.
- 22) 이근철, "FTA안전공학", 기전연구소, 1990.
- 23) Olivier Coudert, Jean Christophe Madre, "MetaPrime: An Interactive Fault-Tree Analyzer", IEEE Trans. Reliability, Vol. 43, March 1994.
- 24) Lee, W.S., D.L. Grosh, F.A. Tillman and C.H. Lie., "Fault Tree Analysis, Methods and Application-A Review", IEEE Trans. Reliability, Vol. 34, pp. 194~203, 1985.
- 25) Kenneth D. Russell, Dale M. Rasmusen, "Fault tree reduction and quantification-an overview of IRRAS algorithms", Reliability Engineering and System Safety, Vol. 40, pp. 149~164, 1993.
- 26) 한국원자력연구소(KAERI), "원자력 안전성 향상 연구, 1단계 PSA 전산체제 개선 94", 과학기술처, pp. 219~222, 1994.
- 27) N. Limnios, R. Ziani, "An Algorithm For Reducing Cut Sets in Fault-Tree Analysis", IEEE Trans. Reliability, Vol. R-35, Dec 1986.
- 28) Winfrid G. Schneeweiss, "Fast Fault-Tree for Many Sets of Input Data", IEEE Trans. Reliability, Vol. 39, aug 1990.
- 29) Ilkka Niemelä, "On simplification of large fault trees", Reliability Engineering and System Safety, Vol. 44, pp. 135~138, 1994.
- 30) S.H. Han, et al., "KIRAP Release 2.0 User's Manual", KAERI/TR-361/93, 1993.
- 31) Ladislav Rosenberg, "Algorithm for finding minimal cut sets in a fault tree", Reliability Engineering and System Safety, Vol. 53, pp. 67~71, 1996.
- 32) A. Sharif Heger, Jayaram K. Bhat, Desmond W. Stack, Dale V. Talbott, "Calculating Exact Top-Event Probabilities Using $\Sigma \Pi$ -Patrec", IEEE Trans. Reliability. Vol. 44, Dec 1995.
- 33) Richard A. Pullen, "AFTP Fault Tree Analysis Program", IEEE Trans. Reliability, Vol. R-33, June 1984.
- 34) N. Limnios, R. Ziani, "An Algorithm For Reducing Cut Sets in Fault-Tree Analysis", IEEE Trans. Reliability, Vol. R-35, Dec 1986.
- 35) G.B. Jasmon, "Cutset Analysis of Networks Using Basic Minimal Paths and Network Decomposition", IEEE Trans. Reliability, Vol. R-34, Oct 1985.
- 36) Ronald C. De Vries, "An Automated Methodology for Generating a Fault Tree", IEEE Trans. Reliability, Vol. 39, April 1990.