韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1997. 6. 제 36권, 제 1호, 49-60.

J. Korea. Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Jun. 1997, Vol. 36, No. 1, 49-60.

수학교육에서 퍼지(FUZZY)개념의 도입[1)]

강 미 광 (동의대학교)
이 병 수 (경성대학교)

I. 서 론

현대의 수학과 과학기술을 지배하고 있는 논리는 모든 것을 참과 거짓으로 명확하게 구분하는 아리스토텔레스의 이치논리(二値論理)이다. 그러나 우리는 명확하게 참과 거짓으로만 구분할 수 없는 애매함 속에서 살아가고 있다고 해도 과언이 아니다.

현실에서 접하는 대부분의 문제는 상황에 따라 달라질 수 있고 개인에 따라 해석하는 바가 다르므로 분류 자체가 애매하고, 어떤 일에 대해 판단을 내릴 때에도 드러난 기준외에도 무수히 많은 인자가 무의식 중에 작용하므로 인간의 사고(思考)나 의사결정이 항상 일관성을 가지기가 힘들다. 즉, 애매성(曖昧性, fuzziness)은 인간에게 있어서 본질적인 것이라 할 수 있다.

또한 어떤 일에 대해 결정을 하고, 평가하는 일은 우리의 일상생활에서 뿐 만 아니라 결정이론, 추론, 학습등의 분야에서도 다반사로 일어나는데, 이 때 사용하는 커뮤니케이션은 일상의 자연언어를 바탕으로 한다. 우리가 일상생활에서 사용하는 자연언어는 '서른 정도'나 '성격이 좋은 편'과 같이 단어의 의미가 불확실하고 애매모호(fuzzy)한 표현을 많이 쓰며, 또 단어의 의미가 설령 '춥다'나 '노인'과 같이 정확히 잘 정의되었다 하더라도 객체를 기존의 집합이론에서와 같이 이 집합에 속하느냐? 속하지 않느냐? 로 나눌 때의 경계 역시 애매할 때가 많다. 실제로 언어란 연속적인 자연현상이나 사물을 분절화에 의해 비연속화 시키고, 유한한 언어 기호수로 인해 의미의 다양성이 발생하므로 성격상 본질적으로 애매할 수 밖에 없다.

현대사회는 과학기술의 대상을 물질에서 에너지로, 에너지에서 정보로 옮겨가고 있다. 정보는 본질적으로 애매한 인간의 사상이 개입되므로 명확함을 추구하는 그 동안의 과학기술에서는 되도록이면 배제당해 왔다. 그러나 이에 대한 중요성과 필요성이 점차 인식되면서 현대사회는 정보화 시대로 나아가고 있다. 그런데, 정보란 보내는 쪽과 받는 쪽인 인간에게 정확하게 의미가 이해, 전달되어야 비로서 쓸모가 있으므로 인간을 무시할 수 없다. 이것이 바로 고도정보사회가 인간의 본질이라 할 수 있는 애매성의 존재를 인정하고 과학적, 수리적으로 적극 수용해야하는 이유이다

이와같이 참과 거짓만을 다루는 이치논리로는 우리 생활의 대부분을 표현하거나 해결할 수 없으며 본질적으로 애매함을 지니는 인간의 사고(思考)를 충분히 다룰 수 없다. 그런데, 우리는 지금까지 애매모호성을 배제하는 입장인 이치 논리를 바탕으로 한 수학을 근간으로 과학기술을 발전시켜 왔었다. 그러나 본래 애매모호한 존재인 인간을 억지로 그러한 이치적인 과학기술에 맞추는 것은 인간이 과학기술을 통해 보다 편리한 생활을 영위할 수 있도록 한다는 본래의 취지에도 맞지 않으며, 기존의 이치논리를 바탕으로 한 수학으로는 다양화, 정보화 시대의 효율적인 발전을 기대할 수가 없다. 그러므로 인간의 사고와 감성에 보다 가까운 논리를 수학적으로 다루기 위해서는 참과 거짓 사이의 많은 단계의 중간적 개념을 인정하는 다치논리가 필요하다. 이에 우리는 애매성의 존

1) 본 연구는 1997학년도 동의대학교 기초과학연구소의 학술연구 조성비의 지원을 받아 연구되었음.

재를 인정하고 인간의 말의 의미 내용을 수량적(數量的)으로 다루는 퍼지이론(fuzzy theory)을 수학에 도입, 발전시켜 우리 생활에 적극 활용하고자 한다.

본 소고에서는 우리 인간사와 관련된 모든 학문에 이용 가능성이 높은 퍼지개념(fuzzy concept)을 모든 학문의 기본적 언어라고 할 수 있는 수학에 도입하는 것을 목적으로 주로 중등 교육 과정에서 다룰 수 있는 퍼지개념과 관련하여 퍼지집합(fuzzy set)과 퍼지논리(fuzzy logic)에 관한 기본적인 내용을 소개한다. 그리고, 수학교과과정에 퍼지개념 도입의 필요성과 정당성을 사회적 배경측면과 수학, 수학 교육의 본성과 목적에 비추어 고찰하고자 한다.

II. 사회적 측면에서 본 퍼지개념의 필요성(불확실성에 대한 패러다임의 변화)

과학과 수학에서 20C에 나타난 여러 가지 패러다임 변화 중 하나는 불확실성(uncertainty)에 대한 관점의 변화이다. 전통적인 관점에서는 '불확실성'은 비과학적이고 바람직하지 못한 현상으로 어떤 수단을 써서라도 이를 배제하여 확실성(certainty)를 얻고자 노력하였으나 요즈음은 '불확실성'이란 본질적으로 피할 수 없는 것이므로 이를 받아들이고 인정해야한다는 관점으로 바뀌고 있다.

지금까지의 과학기술문명은 사물이나 현상을 정확히 파악하고 묘사하기 위해 수리 논리학을 이용하였고 수리 논리학은 명제들 사이의 관계를 기호라는 형식적 언어를 도입·표현함으로써, 일상적 언어 사용시 발생하는 의미의 모호성을 없애고 논리전개의 타당성을 보장해주는 준거로써의 역할을 해왔다. 이와 같이 모든 현상을 참과 거짓으로 명확하게 구분 짓는 아리스토텔레스의 이치논리는 객관적이고도 분석적이라는 특성 때문에 보편성·합리성을 중시하는 근대 합리주의에 받아들여졌다. 그리하여 기계화·분업화에 의해 현대 기술 문명이 크게 발전하였고 모든 현상이나 물질을 분석적 방법으로 접근해감으로써 자연 과학이 급속도로 발달하였다. 그리고 수학에서는 힐베르트(Hilbert)의 공리주의가 채택되었다. 이처럼 확실성을 중시하는 이치논리는 사회의 모든 분야에서 눈부신 활약을 해 왔으나 20C에 들어와서는 차츰 그 한계에 부딪히기 시작했다.

1920년 물리학에서는 하이젠베르크에 의해 미시세계에서 입자의 위치는 정밀하게 측정하면 할수록 운동량은 불확정하게 된다는 '불확정성 원리(quantum uncertainty)'가 발표되어 지금까지의 분할적 접근법으로는 자연의 본질을 파악할 수 없음을 보였다[3]. 즉, 최종적 존재로써 인식했던 소립자마저 결코 영원한 실재가 아니라 생성, 소멸되는 과정에 있는 잠정적 실재이므로 자연법칙의 본질은 원래 비결정적이고 불확정적이라는 것이다. 이는 현대 물리학의 기본사상으로 뉴우튼 역학에서 미적분이 했던 역할을 양자역학에서는 확률론이 대신하게 된다.

수학에서는 1931년 괴델이 '불완전성 원리(incomplete principle)'를 증명함으로써 순수 이성의 무한가능성을 수학의 공리계로써 증명하려 했던 힐베르트의 의지를 꺾어버렸다. 불완전성 원리란 모순이 없는 수학적 공리계가 주어져 있을 때 이 공리계에서는 참·거짓을 판정할 수 없는 수학적 명제가 반드시 존재한다는 것으로 인간의 이성 일반에 있어서의 한계를 보여준다.

한편 컴퓨터 공학에서 금세기 대부분의 과학자들은 복잡성을 지닌 문제들이라도 수학을 이용한 추상적 모델로 적당히 조직화시킨다면, 이들을 처리할 수 있는 능력은 컴퓨터의 처리 용량에 비례한다고 생각했다. 그러나 점차 컴퓨터 공학이나 인간 능력으로 극복할 수 없는 한계가 분명히 있다는 것을 인식하기 시작했다. 예를 들면, 1962년 Hanse Bremermann은 양자론을 바탕으로 지구의 나이와 질량을 계산하여 어떤 가상의 컴퓨터도 2.56×10^{92} bits이상은

처리할 수 없다는 것을 보였다. 그리고, 사실 적당한 크기를 가진 시스템인데도 이에 영향을 주는 변수를 예측하여 다 지정하는 것도 불가능할 뿐 아니라 각각의 변수가 지닌 영향력 또한 각기 다르므로 아무리 엄밀하게 모델을 만들어도 동떨어진 결과를 돌출할 때가 많았다. 이는 전제가 되는 변수에 많은 가정치가 들어 있기 때문으로 인간도 예측할 수 없는 변인들을 무리하게 구체적 수치로 입력시킨 결과이다. 시스템을 모델링하는 가장 중요한 목표는 유용성을 극대화 시키는 것으로 이는 시스템 모델의 복잡성과 신뢰성, 불확실성들의 상호 연관성에 따라 달라진다. 일반적으로 불확실성을 시스템 모델에서 많이 허용하면 할수록 복잡성은 감소하고 결과의 신뢰성은 높혀 주는 경향이 있다[5]. 이처럼 불확실성 역할의 중요성이 점차 인식되기 시작하여 1960년대에는 확률론과는 다른 관점에서 불확실성에 관한 새로운 이론들이 나타나게 된다.

이와같이 수학과 과학, 기술분야에서 되도록 '불확실성'을 기피하려 했던 전통적 패러다임은 '불확실성'이란 본질적으로 피할 수 없는 것이므로 이를 인정하고 수용해야 하며 오히려 이들의 큰 유용 가치를 잘 활용하자는 현대적 관점으로 변하고 있다.

현대 수학과 과학 기술이 확실성을 얻기 위해 이치 논리를 택했듯이 우리가 불확실성을 수용하기 위해서는 이를 수리적으로 다룰수 있는 이론이 필요하다. 여기에 알맞은 이론으로 가장 많이 택해지고 폭 넓게 응용되어지고 있는 것이 애매성의 정도를 [0, 1] 사이의 수치로써 엄밀히 다루고 있는, 이치논리를 확장시킨 퍼지 이론이다.

퍼지이론은 1965년 미국 버클리 대학의 자데(Zadeh) 교수가 인간의 주관적인 사고나 판단의 과정을 모델화(modelling)하고 이것을 정량적(定量的)으로 취급하는 수단으로써 퍼지집합을 소개한 이후 굽타(Gupta), 칸델(Kandel), 카우프만(Kaufmann), 짐머만(Zimmermann) 등의 많은 학자들에 의해 연구, 발전되어 왔으며, 오늘날 퍼지 제어, 신경망, 소프트 컴퓨팅, 퍼지 컴퓨터, 인공 지능시스템 등의 과학과 공학 분야 뿐 아니라 의료 진찰, 유전자, 퍼지 의사결정, 퍼지 선형계획법과 같은 의학 분야, 경영학, 교육학 등의 여러 분야에서 널리 응용되고 있다.

III. 퍼지수학(Fuzzy mathematics)

퍼지수학이란 퍼지개념을 이제까지의 수학 체계속에 도입해서 새로운 분야를 개척하려는 분야이다. 여기에는 퍼지집합론, 퍼지 논리, 퍼지추론, 퍼지측도론, 퍼지 graph, 퍼지관계등이 있으며 위상수학이나 대수학과 관련된 퍼지위상, 퍼지대수론 등으로 차츰 그영역을 확장시키고 있다.

이치논리를 바탕으로 한 수리논리학에서 명제(命題, proposition, statement)란 참 또는 거짓 중 어느 하나로만 판명될 수 있는 진술을 말한다. 현대 수학을 지배하는 철학인 형식주의(形式主義, formalism)는 이치논리가 바탕으로, 수많은 진술 중에서 특별히 진리값 1을 매길 수 있는 참인 진술과 0을 매길 수 있는 거짓인 진술만을 명제라는 이름으로 다루고 있다.

그러나, 집합론에서 한 원소가 어떤 집합에 속하느냐, 속하지 않느냐 또는 명제논리(命題論理)에서 어떤 명제가 참이냐 거짓이냐와 같은 이치론적 개념으로써는 우리 생활의 모든 진술에 대해 진리값을 매길 수 없다. 예를 들어, "이 사과는 싱싱하다", "이 토마토는 풋풋하다", "저 학생은 예의가 바르다" 등은 명제가 아닌 진술이기 때문에 이치논리적 입장에서 값을 매길 수 없다. 그러나 "사과가 싱싱하다"라는 진술은 보편적으로 사과를 보는 사람들이 공통으로 느끼는 객관적 성질로써 대부분의 사람들은 그 사과를 보고 싱싱하다고 느낄 것이다. 그러나 "저 사람은 신용이 있다" 라는 진술은 그 사람의 사회·경제적 능력, 그 사람의 가정교

육, 보는 사람의 관점 등 그 사람이 관계된 사회와 그 사람을 판단하는 사람의 입장에 따라 달라질 수 있다. 이와 같이 판단하는 사람의 입장이나 그 사람의 입장이 모두 확실치 않은 애매모호한(曖昧模糊, fuzzy) 상황도 수치(數値)로 나타내고자 하는 것이 퍼지논리의 입장으로 사과가 싱싱한 정도나 하늘의 푸르름의 정도, 그 사람의 신용도등을 정량적으로 나타내고자 하는 것이 퍼지논리의 기본이다.

이제는 차츰 생활을 다루는 우리의 지혜가 이치논리에서 다치논리로 변하고 있다. 예를 들어, 오늘의 일기예보가 다음과 같이 "오늘 부산지방의 날씨는 곳에 따라 때때로 비가 오겠다"라고 하는데 하루 중 낮 12시 10분에서 약 1분간 단지 사직운동장 한 모퉁이만 1mm의 비가 왔다고 가정하자. 그러면 위의 일기예보를 "적중했다 혹은 적중하지 않았다"로 구분해서 이야기해야 한다면, 독자는 이치논리의 입장에서 "오늘 부산지방에 비가 왔다"는 명제는 참이라고 할 것이다. 그러나 우리의 인지상정으로는 비가 오지 않았다고 하는 것이 더 정확한 의미전달이 될 것이다. 불과 4, 5년전만 해도 일기예보는 "비가 오겠다, 비가 오지 않겠다"의 단 2가지 경우만을 다루었는데 요즘은 0%에서 100%까지 10% 단위로 10등분하여 10% 또는 40% 등으로 비가 올 확률을 예보하고 있다. 이는 종전의 이치논리에서 11치논리로 변한 것이며 이제 11치논리에서 무한치 논리인 퍼지논리로 우리의 생활을 다루려 한다.

(1) 퍼지명제 (fuzzy proposition)

명제논리에서 다루는 명제가 참이냐 거짓이냐와 같은 이치논리적 개념이 우리의 모든 생활현상, 사고, 그리고 대화등을 다 설명할 수 없다. 예를 들어 "하늘이 매우 푸르다"라는 진술은 참이다 혹은 거짓이다라고 할 수 없으므로 명제가 아니다. 보는 사람에 따라 푸르지 않을 수도 있기 때문에 그 진술은 수리논리학에서는 명제로 다루지 않는다. 그러나 우리의 삶을 좀 더 논리적으로 다루기 위해서는 "하늘이 푸르다"라는 것과 같은 진술이 논리의 범주속에 들어와야 한다. 참이다의 수치값을 1, 거짓이다의 수치값을 0으로 매길 때, 집합 {0, 1}을 확대하여 0과 1를 포함하는 단위구간 [0, 1]을 생각해 볼 수 있다. 예를 들어, 푸른 정도에 따라 [0, 1]에서 구하여 값을 매기는 것을 생각해 볼 수 있다. 예를 들어 우리 육안으로 볼 수 있는 하늘의 전 부분중에서 약 85%가 푸르다면 "하늘이 제법 푸르다"라는 진술이 어울릴 것이고 그 때의 "푸른 정도"의 값을 0.85 쯤으로 주자는 것이다.

이와같은 개념을 바탕으로 우리 삶의 보다 넓은 범위를 수학적으로 다룰 수 있도록 퍼지적 논리를 전개시키기 위해 먼저 퍼지명제, 퍼지 합성명제에 대해 알아본다.

[정의1] 퍼지명제, 혹은 퍼지술어:

애매모호한(fuzzy) 용어를 포함하는 진술을 퍼지술어 혹은 퍼지명제라 한다. 그리고 퍼지술어를 "x는 A이다" 라고 나타낸다. 여기서 x는 주부(subject), A를 퍼지적 술부(fuzzy predicate) 혹은 술어라고 한다.

[예] (1) 내일은 아마 비가 올 것이다
(2) 그의 신용은 땅에 떨어졌다
(3) x는 작은 수이다
(4) y는 매우 작은 수이다.

위의 예제에서 "아마", "신용", "작은" 등과 같은 용어는 확실치 않은 애매모호한(fuzzy) 용어이다. 퍼지명제 'x는 작은 수이다' 와 'y는 매우 작은 수이다' 의 차이점은 두 번째의 y의 작은 정도가 첫번째의 x의 작은 정도보다 더 강하다고 이야기 할 수 있다. 이와같이 애매모호한 용어들에 수식어를 이용하여 애매한 정도(이것을 소속정도라고 한다)를 더 크게 또는 더 작게 나타낼 수 있다.

[예] "토마토가 꽤 싱싱하다"에서 "꽤"는 "싱싱하다"라는 애매모호한 단어를 꾸면서 싱싱한 정도를 더욱 높인다. 반면, "토마토가 덜 싱싱

하다"에서 "덜"은 싱싱하다라는 애매모호한 단어를 꾸미면서 싱싱한 정도를 조금 낮춘다.

(2) 퍼지합성명제(fuzzy compound proposition)

2개 이상의 퍼지명제를 포함한 퍼지명제를 퍼지합성명제라 하고 이 때 포함된 단순 퍼지명제를 성분 명제라 한다. 여기서는 이치논리에서와 같이 퍼지 명제 p와 퍼지 명제 q를 다섯 가지의 연결사를 이용하여 합성명제를 만들고자 한다.

[정의2] 퍼지논리합(fuzzy logical disjunction)

퍼지명제 p와 퍼지명제 q의 진리값을 각각 a, b라 하자. 그러면 p와 q의 퍼지논리합(fuzzy logical disjuntion) $p \vee q$의 진리값을 max(a, b)로 정의한다.

[예] 퍼지명제 "철수는 키가 크다"에서 큰 정도가 0.7이고 퍼지명제 "철수는 무거운 편이다"에서 무거운 정도가 0.5이면 퍼지논리합 "철수는 키가 크거나 무거운 편이다"의 퍼지명제값은 0.7이다,

[정의3] 퍼지논리곱(fuzzy logical conjunction)

퍼지명제 p와 퍼지명제 q의 진리값을 각각 a, b라 하자. 그러면 p와 q의 퍼지논리곱(fuzzy logical conjunction) $p \wedge q$의 진리값은 min(a, b)로 정의한다.

[예] 퍼지명제 "부산은 아름다운 항구이다"에서 아름다운 정도를 0.7이라 하고 퍼지명제 "부산은 역사가 깊은 도시이다"에서 진리값을 0.8이라 할 때, 합성명제 "부산은 아름다운 항구이며 역사가 깊은 도시이다"의 진리값은 0.7이다.

[정의4] 퍼지부정(fuzzy logical negation)

"x는 A이다."라는 퍼지명제 p의 진리값이 a이면 "x는 A가 아니다"라는 퍼지부정명제 $\sim p$의 진리값은 1-a 로 정의한다.

[예] 퍼지명제 "그녀는 미인이다"의 진리값이 0.7이라면 "그녀는 미인이 아니다"의 퍼지진리값은 1-0.7=0.3이다.

[예] "x는 매우 큰 수이다"의 진리값이 0.4이고 "x는 보통 크기의 수이다"의 진리값이 0.9라 할 때 퍼지합성명제 "x는 매우 큰 수가 아니라 보통크기의 수이다"의 진리값은 min(0.6, 0.9) =0.6이다.

[정의5] 퍼지함의 (fuzzy logical implication)

퍼지명제 p의 진리값은 a, 퍼지 명제 q의 진리값은 b라 하자. 이때 "p이면 q이다"라는 퍼지함의 $p \to q$의 진리값은 min(1, 1-a+b)로 정의한다.

[예] "사과가 익었다."의 진리값을 0.9, "사과가 맛있다."의 진리값은 0.8이라 하자. 퍼지합성명제 "사과는 익었으면 맛있다."의 진리값은 min(1, 1-0.9+0.8)=0.9이고 "사과가 맛있으면 잘 익은 것이다" 의 진리값은 1이다.

[정의6] 퍼지명제의 진리값에 관계없이 논리식의 진리값이 항상 1인 합성명제를 퍼지논리적 항진명제라고 하고 논리식의 진리값이 항상 0인 합성명제를 퍼지논리적 모순명제라고 한다.

이와 같이 퍼지논리에서는 모든 진술을 퍼지명제로 다루고 이치논리에서는 퍼지명제의 진리값이 0과 1일때만 명제로 취급한다. 위에서 정의된 퍼지명제들 사이의 논리 연산은 진리값이 0과 1인 경우는 이치논리의 연산과 일치하므로 퍼지논리는 이치논리를 확장하고 일반화시킨 논리라고 할 수 있다. 그리고 이치논리에서처럼 퍼지논리에서도 다음과 같은 논리 법칙이 성립한다.

[정리] p와 q를 퍼지명제라 할 때 아래의 퍼지합성 명제들은 퍼지논리적 항진명제이다.

1. $p \to p \vee q$ (합의 법칙)
2. $(p \wedge q) \to p$, $(p \wedge q) \to q$ (단순화 법칙)
3. $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ (대우 법칙)
4. $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ (이중부정)
5. $p \vee p \Leftrightarrow p$, $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ (멱등 법칙)

6. $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$, $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ (드 모르강 법칙)
7. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
8. $(\sim p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

[참고] 그러나 8의 역인 $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$는 퍼지논리적 항진명제가 아니다. 왜냐하면, 퍼지명제 p의 진리값이 0.7, q의 진리값이 0.4라 하면 $p \rightarrow q$의 진리값은 min(1, 1-0.7+0.4) = 0.7이고 $\sim p \vee q$의 진리값은 max(0.3, 0.4) = 0.4이다. 따라서 $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$의 진리값은 min(1, 1-0.7+0.4) = 0.7이다. 그러나 p와 q가 이치논리적 명제로써 진리값이 1이거나 혹은 0인 경우는 $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$은 아래 <표 1>에서 처럼 이치논리적 항진명제이다.

퍼지논리와 이치논리의 근본적인 차이점은 이치논리학에서 추론의 기초가 되는 배중률(排中律)이 성립하지 않는 것이다. 배중률이란 모든 명제는 참이나 거짓인가의 어느쪽이며, 참도 거짓도 아닌 중간적인 것이 되지는 않는다는 원리로 결국, 명제 p와 ~p와의 진리 집합은 전체집합이라는 것으로 퍼지논리의 근본 이념과는 위배될 수 밖에 없다.

[예] 퍼지 합성명제 $(p \vee \sim p)$와 $(p \wedge \sim p)$는 퍼지논리적 항진명제가 아니다. 왜냐하면, 퍼지명제 p의 진리값을 0.3이라 하면 부정 명제 ~p의 진리값은 0.7이므로 $p \vee \sim p$의 진리값은 max (0.3, 0.7) = 0.7이고 $p \wedge \sim p$의 진리값은 min (0.3, 0.7) = 0.3이다. 그러나 p의 진리값이 0이거나 혹은 1이면 $p \vee \sim p$의 진리값은 항상 1이 되어 이치논리적 항진 명제가 되고 $p \wedge \sim p$의 진리값은 항상 0이 되어 이치논리적 모순명제가 된다.

[예] $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$는 이치논리적 항진명제이나 퍼지논리적 항진명제는 아니다. 왜냐하면 p의 진리값이 0.7일 때 $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$의 진리값은 0.7이다.

[예] 삼단논법 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$는 이치논리적 항진명제이나 퍼지논리적 항진명제는 아니다. 퍼지명제 p, q, r의 진리값이 각각 0.8, 0.7, 0.6인 경우 이것의 진리값은 min(1-0.7+0.6, 1-0.8+0.7)=0.9이다.

[참고] 퍼지합의 $(p \rightarrow q)$는 p의 진리값이 q의 진리값보다 크면 퍼지논리적 항진 명제가 아니므로 퍼지합의가 포함된 퍼지 추론명제에서는 주의할 필요가 있다.

(3) 퍼지집합(fuzzy set)

지금까지 수학에서 사용하고 있는 집합은 칸토르(Cantor)가 정의한 엄밀한 의미의 집합으로, 조건과 범위가 확실한 것들의 모임만을 취급해왔다. 그래서 '큰 수들의 집합'이나 '부지런한 사람들의 집합'과 같이 경계가 명확하지 않은 집합은 수학에서 제외되었다 그러나 퍼지집합에서는 모든 종류의 모임을 대상으로 하되 소속정도에 따라 [0, 1] 사이의 수치를 주자는 것이 기본 개념이다.

우리가 보통 집합을 표현하는 방법은 주로

	p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$
진리값	1	1	min(1,1-1+1)=1	max(1-1,1)=1	min(1,1-1+1)=1
	1	0	min(1,1-1+0)=1	max(1-1,0)=0	min(1,1-0+0)=1
	0	1	min(1,1-1+1)=1	max(1-0,1)=1	min(1,1-1+1)=1
	0	0	min(1,1-0+0)=1	max(1-0,0)=1	min(1,1-1+1)=1

<표 1>

원소 나열법과 조건 제시법, 그리고 특성함수를 사용하는 것인데 특성함수를 이용한 방법은 다음과 같다. 전체 집합 E와 그것의 진부분 집합 A에 대해 E의 원소 x가 A의 원소일때 x의 값은 1, $x \notin A$일때 x의 값에 0을 매긴다면 E에서 $\{0,1\}$로 가는 특성함수 χ_A로서 A를 나타낼 수 있다. 이 때 특성함수 χ_A의 그래프는 $\{(x,a)|x\in A\}$로 $(x,1)$, $(x,0)$와 같이 순서쌍의 첫 부분에는 X의 원소를 뒷 부분에는 그 원소가 집합 A에 속하면 1인 값을, 속하지 않으면 0인 값을 주어 소속 정도(membership grade)를 순서쌍에 의해 나타낼 수 있다.

조건과 범위가 확실한 것들의 모임인 집합의 입장에서 볼 때 "젊은 노인들의 집합"이라는 말은 할 수 없으며 "젊은 노인들의 모임"이라는 말이 맞다. 그러나 이것을 집합의 범주에서 다루기 위해 60세에서 65세의 노인을 젊은 노인으로 부른다고하면 59세나 66세의 사람들은 어떻게 부를 것인가? 우리의 정서에 맞도록 표현한다면 이 들에게도 이 집합에의 소속 정도가 0.95쯤 되는 젊은 노인으로 부르는 것이 더 정확하고 객관적 표현이 될 것이다. 이와같이 애매한 집합을 표현할 때는 특성함수의 변역 $\{0,1\}$을 $[0,1]$로 확장한 함수로 나타내면 더 정확한 의미전달을 할 수 있다. 예를 들면, 40세 이하의 사람들에게는 "젊은 노인들의 집합"에 대한 소속정도를 0으로주고 40세에서 60세까지의 사람에게는 0에서 1까지의 차이 1을 40살에서 60살까지의 차 20년으로 나누어 41살의 사람에게는 소속 정도를 $\frac{1}{20}$, 42살의 사람에게는 $\frac{2}{20}$, x살의 사람에게는 $\frac{x-40}{20}$을 주자. 그리고 60세에서 65세의 사람들에게는 "젊은 노인들의 집합"에 대한 소속정도를 1이라 주고 65세에서 80세 까지의 사람에게는 소속 정도를 $1-\frac{(x-65)}{15}$로, 80세이상인 사람들에게는 0으로 주면 모든 사람들의 집합에서 $[0,1]$로 가는 함수가 정의한다. 이 함수로서 "젊은 노인들의 집합"을 표현하자는 것이다.

[정의1] 퍼지집합

함수 $\mu_A : E \to [0,1]$가 정의되어진 집합을 퍼지집합이라 하고. 퍼지집합을 $\underline{A}$라 표시하며 μ_A 를 $\underline{A}$의 소속정도함수라고 한다. 혹은 함수 자체를 퍼지집합이라 한다.

[예] 위에서 정의된 "젊은 노인들의 집합"은 소속정도함수가

$$\mu(x)=\begin{cases} 0 & 0\le x\le 40 \\ \frac{x-40}{20} & 40\le x\le 60 \\ 1 & 60\le x\le 65 \\ 1-\frac{x-65}{15} & 65\le x\le 80 \\ 0 & 80\le x \end{cases}$$

로 주어진 퍼지집합이다.

[예] E={민수, 영미, 선희, 태범, 경화, 명석}이라 하고 이들의 부지런한 정도에 따라 다음과 같이 값을 주면 E에서 $\underline{A}$= "부지런한 사람들의 모임"은 퍼지집합이라 할 수 있으며 아래의 함수로 표현된다. E에서 $\underline{B}$= "남자들의 집합"은 퍼지집합으로 {민수, 태범, 명석}으로 표현하거나 아래의 두 번째 함수로 나타낸다.

	민수	영미	선희	태범	경화	명석
$\underline{A}$=	0.5	0.2	0.9	0.3	0.7	0.8
$\underline{B}$=	1	0	0	1	0	1

[참고] 전체집합 E에서 "남자들의 집합"인 퍼지집합은 E의 부분 집합으로 표현할 수 있지만 "부지런한 사람들의 집합"은 E의 부분집합으로 표현할 수 없으며 단지 $E\to[0,1]$인 함수 μ_A로서만 나타내든지 함수의 그래프인 순

서쌍들의 집합으로 나타낼 수 있다.

이와같이 퍼지집합은 전체 집합 E의 원소에 대해 소속정도의 값을 단위구간 [0,1]의 임의의 한 값으로 매기는 함수이고 보통집합 A는 전체 집합 E의 원소에 대해 소속정도의 값을 단지 0과 1만 가지는 함수이다. 그러므로 보통집합 A는 소속정도 함수가 A의 특성함수로 표현되는 퍼지집합이다.

[정의2] 전체 집합 E는 모든 원소의 소속정도가 1인 퍼지집합으로생각할 수 있으므로 소속정도함수를 1인 상수함수로 가지는 퍼지집합으로 정의한다. 기호로는 $\underline{E}$ 로 나타낸다.

[정의3] 퍼지 공집합 $\underline{\phi}$ 는 소속함수 $\mu_{\underline{\phi}}$ 가 0인 값을 가지는 상수함수로 정의한다

[예] $E=${민수, 영미, 선희, 태범, 경화, 명석}이라 하면 $\underline{E}$와 $\underline{\phi}$는 아래와 같이 정의 되어진다.

	민수	영미	선희	태범	경화	명석
$\underline{E}=$	1	1	1	1	1	1
$\underline{\phi}=$	0	0	0	0	0	0

[정의4] $\underline{E}$ 가 전체 퍼지집합, $\underline{A}$ 와 $\underline{B}$ 가 $\underline{E}$ 의 부분 퍼지 집합일때,

$$\mu_{\underline{A}\cup\underline{B}}(x)=\max\{\mu_{\underline{A}}(x),\mu_{\underline{B}}(x)\}$$

로 정의된 함수를 소속정도 함수로 가지는 퍼지집합을 $\underline{A}$와 $\underline{B}$의 합집합이라 하고 $\underline{A}\cup\underline{B}$로 표현한다.

[정의5] 퍼지 집합 $\underline{A}$ 와 $\underline{B}$와 적집합 $\underline{A}\cap\underline{B}$ 은 소속함수 $\mu_{\underline{A}\cap\underline{B}}(x):E\to[0,1]$가 $\mu_{\underline{A}\cap\underline{B}}(x)=\min\{\mu_{\underline{A}}(x),\mu_{\underline{B}}(x)\}$ 로 정의된 퍼지집합을 말한다.

[정의6] 퍼지 집합 $\underline{A}$의 여집합 $\underline{A}^c$ 는 소속함수를 $\mu_{\underline{A}^c}(x)=1-\mu_{\underline{A}}(x)$로 가지는 퍼지집합으로 정의한다.

[예] $E=${민수, 영미, 선희, 태범, 경화, 명석}이고 앞의 예제와 같이 $\underline{A}=$"부지런한 사람들의 집합"이고 $\underline{B}=$"남자들의 집합" 으로 다음과 같이 주어져 있으면 $\underline{A}\cup\underline{B}=$"부지런하거나 남자들의 모임" 이고 $\underline{A}\cap\underline{B}=$"부지런한 남자들의 모임", $\underline{A}^c=$"게으른 사람들의 모임"으로 표현할 수 있으며 각각의 소속함수는 다음과 같다.

	민수	영미	선희	태범	경화	명석
$\underline{A}=$	0.5	0.2	0.9	0.3	0.7	0.8
$\underline{B}=$	1	0	0	1	0	1
$\underline{A}\cup\underline{B}=$	1	0.2	0.9	1	0.7	1
$\underline{A}\cap\underline{B}=$	0.5	0	0	0.3	0	0.8
$\underline{A}^c=$	0.5	0.8	0.1	0.7	0.3	0.2

[예] $E=\{a,b,c,d,e,f,g\}$이고 A,B는 $A=\{a,b,c,f\}$, $B=\{a,c,e,g\}$인 보통 집합일때 A와 B의 특성함수 χ를 나타내면 다음과 같다.

	a	b	c	d	e	f	g
$A=$	1	1	1	0	0	1	0
$B=$	1	0	1	0	1	0	1

그리고, 이때 $A\cup B$, $A\cap B$, A^c의 퍼지집합으로서의 소속함수는 아래와 같이 이들의 특성함수와 일치한다.

① $A\cup B=\{a,b,d,e,f,g\}$ 이므로 $A\cup B=$

a	b	c	d	e	f	g
1	1	1	0	1	1	1

이고 $\chi_{A\cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$이다.

② $A\cap B=$

a	b	c	d	e	f	g
1	0	1	0	0	0	0

이므로 $\chi_{A\cup B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$이다

③ $A^c=$

a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	1	1	0	1

이므로 $\chi_{A^c}(x) = 1-\chi_A(x)$ 이다.

[참고] 위의 예에서와 같이 퍼지집합에서 소속정도 함수의 변역이 {0,1}인 경우에는 연산이 보통집합의 연산과 일치하므로 퍼지집합은 보통집합의 확장이라 할 수 있다. Bellmanand와 Giertz는 퍼지집합의 합집합과 공통집합에 대한 이 정의는 보통집합의 개념을 확장한 자연에서 합리적인 유일한 확장이라는 것을 제시했다. 그러나 보집합은 자연에서 합리적인 유일한 확장이라 볼 수는 없지만 실용적인 웅용면에서는 합리적인 것처럼 생각된다고 하였다[7].

[정리] 퍼지 집합족에서도 다음과 같은 여러 가지 성질을 구할 수 있다.

(1) Involution : $(\underline{A}^c)^c = \underline{A}$

(2) 교환법칙(commutativity) :

$\underline{A}\cup\underline{B}=\underline{B}\cup\underline{A}$, $\underline{A}\cap\underline{B}=\underline{B}\cap\underline{A}$

(3) 결합법칙(associativity) :

$\underline{A}\cup(\underline{B}\cup\underline{C})=(\underline{A}\cup\underline{B})\cup\underline{C}$

$\underline{A}\cap(\underline{B}\cap\underline{C})=(\underline{A}\cap\underline{B})\cap\underline{C}$

(4) 분배법칙(distributivity) :

$\underline{A}\cup(\underline{B}\cap\underline{C})=(\underline{A}\cup\underline{B})\cap(\underline{A}\cup\underline{C})$

$\underline{A}\cap(\underline{B}\cup\underline{C})=(\underline{A}\cap\underline{B})\cup(\underline{A}\cap\underline{C})$

(5) 멱등법칙(idempotency) :

$\underline{A}\cup\underline{A}=\underline{A}$, $\underline{A}\cap\underline{A}=\underline{A}$

(6) 흡수법칙(absorption) :

$\underline{A}\cup(\underline{A}\cap\underline{B})=\underline{A}$

$\underline{A}\cap(\underline{A}\cup\underline{B})=\underline{A}$

(7) Absorption by ϕ and E :

$\underline{A}\cap\underline{\phi}=\underline{\phi}$, $\underline{A}\cup\underline{E}=\underline{E}$

(8) 항등(identity) :

$\underline{A}\cup\underline{\phi}=\underline{A}$, $\underline{A}\cap\underline{E}=\underline{A}$

(9) 드모르강 법칙(De Morgan's law) :

$(\underline{A}\cap\underline{B})^c=\underline{A}^c\cup\underline{B}^c$

$(\underline{A}\cup\underline{B})^c=\underline{A}^c\cap\underline{B}^c$

(10) Equivalence formula :

$(\underline{A}^c\cup\underline{B})\cap(\underline{A}\cup\underline{B}^c)=(\underline{A}^c\cap\underline{B}^c)\cup(\underline{A}\cap\underline{B})$

(11) Symmetrical difference formula :

$(\underline{A}^c\cup\underline{B})\cap(\underline{A}\cup\underline{B}^c)=(\underline{A}^c\cap\underline{B}^c)\cup(\underline{A}\cap\underline{B})$

[참고) Cantor의 집합론은 이치 논리를 따르므로 보통집합 A와 보통 공집합 ϕ에서는 $A\cap A^c=\phi$(모순율)이고 $A\cup A^c=E$(배중률)이 성립한다. 그러나 퍼지집합 $\underline{A}$와 $\underline{\phi}$에 대해서는 $\underline{A}\cap\underline{A}^c=\underline{\phi}$, $\underline{A}\cup\underline{A}^c=\underline{E}$ 가 성립하지 않는다.

[예]

	a	b	c	d	e	f
$\underline{A}=$	0.5	0.6	0.2	0.9	0.3	0.4
$\underline{A}^c=$	0.5	0.4	0.8	0.1	0.7	0.6
$\underline{A}\cap\underline{A}^c=$	0.5	0.4	0.2	0.1	0.3	0.4
$\underline{A}\cup\underline{A}^c=$	0.5	0.6	0.8	0.9	0.7	0.6

[예] 김철수 변호사가 0.5 노인이라고 하자. 그러면, 그는 0.5 노인이 아니기도 하다. 따라서 "김철수 변호사가 0.5 노인이다"라는 퍼지명제를 p로 나타내면 (p ∧ ~p)의 진리값은 0.5 로써 김철수 변호사는 0.5 노인이기도 하고 0.5 노인이 아니기도 하다. 그의 노인 소속정도는 0.5로써 0 이 아니다.

IV. 수학 교육에서 퍼지 개념지도의 필요성과 정당성

수학은 인간의 목표와 의사 그리고 목적의 영역에서 도출된 다양한 인간활동의 소산이므로 수학을 인간적, 역사적 관계에서 취급해야 하며, 인간적 활동이나 의사는 수학의 창조, 사용 그리고 변환에 중점을 두어야 한다[1]. 그리고 수학 교육은 수학, 심리학, 사회학, 인식론 등과 연관되어 있고 이러한 학문들은 우리 인간의 본성과 생활을 바탕으로 이루어지기 때문에 인간의 주관성이나 애매성을 인정해 주는 퍼지이론을 수학교육에서 다루는 것은 바람직하다.

또한 수학은 인간에 의해 만들어진 일종의 인간적 표현물이자 인간의 창조물이기 때문에 언제라도 새롭게 태어나고 변화할 수 있으며 [2], 수학은 역사적인 면, 철학적인 면, 심리학적인 면을 포함하는 문화적인 현상으로 다른 여타 과학에서와 같이 엄밀성이 선험적으로 거의 필요하지 않다[4]. 수학의 본성은 그 자유성에 있다라는 칸토르의 말로도 뒷받침 되듯이 굳이 이치논리만을 고집할 필요는 없으며 퍼지수학을 전개시킬 때 정당함을 보이는 도구는 논리적이고 과학적 방법으로 학문 구조로써도 손색이 없다. 오히려 애매함조차 수치적으로 나타내는 엄밀성을 가지고 전개시키기 때문에 이치논리와 상반된 관점이 아니라 이를 수용하고 확장시킨 것이 퍼지논리이다.

수학 교육의 목적중 하나는 각 개인이 민주사회에서의 불이익을 줄이고 사회에 적응할 수 있는 능력을 갖추게 하는 것이다. 앞에서 보았듯이 현대 사회의 각 분야에서 불확실성에 대한 시각이 바뀜에 따라 앞으로의 시대에 적응하기 위해서는 부정확함이나 애매모호함을 과학적으로 처리하는 수학적 기술이 절대적으로 필요하다. 그리고 수학교육은 인간활동을 바탕으로 하는 인간교육 내용이어야 하는데 지금까지의 이치논리만으로는 우리의 생활이나 마음을 정확히 표현하고 해결할 수 없다. 그러므로 우리의 언어와 마음의 애매모호한 것까지도 정확히 표현하고 다룰 수 있는 퍼지논리를 받아들인다면 인생을 보다 풍부하고, 이 시대를 보다 합리적으로 살아갈 수 있을 것이다.

더욱이 앞으로의 21세기는 정보화 시대이다. 정보를 효율적으로 다루기 위해서는 어느 때보다도 인간의 상상력과 창의력이 절실히 요구되는데 만약 기존의 사고 방식인 이치논리를 바탕으로 한 형식주의 철학만을 고집한다면 인간의 사고력은 멀지 않은 장래에 한계에 부딪칠 것이다. 특히, 초·중등 학교에서는 피 교육자들의 상상력과 직관력을 최대한 신장시킬 수 있도록 지도되어야 하는데, 이러한 상상력과 직관력은 다른 어떤 분야보다도 과학 특히 수학교육의 현장에서 크게 신장되어야 한다. 그러기 위해서는 수학교육은 의미와 과정 그리고 비형식적 표현에 중점을 두는 연구 내용을 포함해야 하며 수학은 단순한 수학적 형태가 아니라 역사, 사회, 철학 그리고 심리 등의 바탕 위에서 다루어져야 한다. 그러므로 우리의 문화적, 심리적 상태의 애매모호성을 반영하고 있는 퍼지논리는 이러한 연구 내용에 적합한, 훌륭한 학습제재가 될 수 있다.

또한 퍼지수학에서는 우리의 실생활계를 잘 반영하고 우리의 정서에 부합되도록 논리를 전개시키므로 수학에 대해 딱딱하고 거리감을 느끼는 사회의 부정적인 인식을 바꾸는데도 한 몫을 하리라 기대되어진다.

이와같이 퍼지수학을 수학 교육의 교과과정에 도입하는 것은 수학교육의 목적에도 부합될 뿐 아니라 수학이나 수학교육의 본성에 비추어도 손색이 없으므로 우리의 사고 전환이 필요한 때이다.

V. 결 론

실 생활계가 점차 복잡해짐에 따라 그것을 정확하고, 의미있는 문장으로 표현하는 능력이

더욱 필요함에도 불구하고 어떤 경우에는 명확성을 강조한 나머지 오히려 정확성과 의미성이 거의 서로 배타적인 관계에 놓이기도 한다. 그럼에도 불구하고 우리는 아직도 이치논리를 바탕으로 현상이나 과정을 묘사하고 그것을 특정화 시키지만 실제로 이를 정확히 표현하거나 평가 하는데에는 어려움이 있다.

집합론에서 원소가 어떤 집합에 속하느냐, 속하지 않느냐 또는 최적화이론(optimization theory)에서 해의 영역에 들어가느냐, 들어가지 않는냐 그리고 명제이론에서 참이냐, 거짓이냐와 같은 이치개념이 우리의 모든 생활현상을 다 설명하지는 못한다. 실생활계를 잘 묘사하는 것은 인간이 인지하고 동시에 과정화하고 이해하는 것보다 훨씬 많은 정교한 자료를 필요로 한다. 전통적으로 사용해 왔던 모든 이론들은 정확한 기호의 사용을 가정하므로 그것들은 우리의 일상생활의, 또는 우리가 상상하는 미래 생활의 어떤 것에도 적용될 수 없다[7]. 그러나, 다행스럽게도 인간의 지식 발달에 관한 역사는 지식 그 자체와 그것을 완벽히 추구하려는 인간의 마음은 모호성에서 정확성으로 그리고 다시 모호성으로 속적으로 끊임없이 변화하고 있음을 보여준다[4].

실제로 우리가 살아가는 세상은 그 본질을 정확히 표현하지 못하는 현상이나 과정으로 가득차 있다고 해도 과언이 아니다. 그러나 우리의 실생활에서 잘 표현할 수 없거나 애매한 부분을 애매모호성을 인정하는 퍼지논리를 받아들여 잘 활용한다면 보다 더 정확하게 표현할 수 있다.그래서 이 시대를 보다 풍부하고, 보다 정확하게 살아가기 위해서는 이치논리적 보다는 애매모호함도 과학적으로 처리하는 퍼지논리적 입장이 더욱 더 바람직하다. 그러므로 우리의 언어와 마음의 애매모호한 것을 더욱 정확히 표현하고 다룰 수 있도록 퍼지수학에 관한 교육의 필요성이 대두된다.

수학의 본성에 대한 견해에 따라 거의 전적으로 수학 교육에 관한 견해가 결정되는데[8], 수학 교육과정은 수학을 비인간적인 지식의 실체로써 보는 실증론적 입장보다는 다양한 인간적 활동의 결과에서 나온 인간적 산물이라는 사실속에 이루어져야 한다. 그러므로 학습자가 지식을 수동적으로 얻기보다는 오히려 적극적으로 문제를 인식하여 능동적으로 해결해야 하며[6], 인지하는 과정은 사회적, 심리적인 것을 바탕으로 해야 한다. 그런데 우리의 문화적, 심리적 상태는 원래 애매모호하므로 이 애매모호성을 반영하는 퍼지논리를 잘 이용한다면 학습자의 직관력과 상상력을 최대한으로 발전시킬 수 있다.

지금 우리는 소위 정보화 시대라고 일컬어지는 20세기에 살고 있다. 그러나 기존의 수학적 용어인 이치논리적 용어를 가지고 우리의 상상력과 모델을 바탕으로한 문제나 체계에 확실한 해결책을 보장할 수 없다. 그러므로 21세기의 정보화 시대에 대비하여 우리의 언어와 마음의 애매모호한 것을 더욱 정확히 표현하고 다룰 수 있는 내용인 퍼지수학에 관한 교육의 필요성이 대두된다.

현재 수학교육계를 점차 지배하고 있는 교육철학은 학습(learning)이란 지식의 전수가 아니라 학습자 자신이 구성해 나가는 활동으로 보는 구성주의(constructivism) 이론이다[6]. 구성주의가 현장에서 실천되기 위해선 무엇보다도 인간 혁신과 인간 활동을 중심으로 하는 교육내용이 마련되어야 한다. 이를 위해서는 이치논리를 바탕으로 한 수학 교육보다는 퍼지논리를 바탕으로 한 수학 교육으로 방향이 전환되어야 하며, 그렇게 함으로서 퍼지수학은 구성주의 교육철학과 더불어 우리의 수학 교육에 바람직한 영향을 끼칠 수 있을 것이다.

이러한 변혁은 우리의 사고 전환을 필요로 하며, 지금은 다가오고 시대에 대비한 수학 교육의 한 방법으로써 퍼지수학에 관한 교육이 절실히 필요한 시기이다.

참 고 문 헌

[1] 김응태, 박한식, 우정호 (1985). 증보 수학 교육학개론, 서울대학교 출판부.

[2] 박세희 역 (M. Cline 원저) (1986). 수학의 확실성, 민음사.

[3] 전일동 역 (D. Bohm 저) (1991). 현대 물리학의 철학적 테두리, 민음사.

[4] V. Dimitrov (1983). Group choice under fuzzy information, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 9.

[5] G. Klir and B. Yuan (1995). Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Prentice-Hall International, Inc.

[6] L. Moreno-Armella and G. Waldegg (1993). constructism and mathematical education, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol. 24, No. 5.

[7] B. Russell (1923). Vaguenes, Australisian J. Psychol. Philos. 1. pp.84-92.(cf: H. J. Zimmermann, Fuzzy Set Theory and its Applications, Second Edition, Kluwer Academic Publishers, 1991, p.3)

[8] R. Thom (1973). Modern Mathematics, Does it exist?, Geoffrey Howson, Developments in Mathematical Education, Cambridge University Press, pp. 194-212.