

수학과 목표지향형 고사 점수의 표준화에 관한 연구

홍 석 강 (동국대학교)

I. 서 론

수학교육에서 목표지향형 평가는 교육목표를 세분화시키고 목표한 평가 기준에 성취해야할 최저 수준에 입각해서 하는 평가이다. 일반적으로 수학교육의 목표에는 문제해결능력의 향상, 새로운 지도법의 개발, 교과과정의 개발 및 그 교과목의 시행과 추천하고자하는 평가법, 자력에 의한 발전적인 문제 해결지도와 수학적 사고력 향상에 있으며 그런 사고력 검정을 위한 문제 출제 및 문제 변별력 측정, 문제 해결 시도를 위한 효과적인 지도법의 개발 등은 모두 수학교육의 목표지향형 평가의 개선에 유익한 시도로 인정되고 있다. Glaser, R.(1963)가 이 평가형을 제안한 후 이 평가에 관한 주요 관심 대상은 고사점수의 최저합격점 산정을 위한 판정전략의 채택과 그 점수내의 고사 성적을 표준화시키는 것이 주된 연구였으며 그것은 수학교육의 학습내용범위와 행동영역의 상세한 학습단위를 평가하는 형성평가 과정에서 최상의 성취를 보이게 하는 즉 양적(Positively)으로 증가하는 경향의 성적을 도출하게 함을 강조한 나머지 성적의 규준화에 대한 관심은 상대적으로 적은 편이었다. 그러나 Hambleton, R.K.(1978)은 이 평가에서 평가원들이 학습내용의 범위와 그 내용의 깊이에 관한 이해 정도의 크기를 고려하여 그들의 학습능력을 평가하고자 할 때 그들의 성적을 합리적으로 표준화함이 필요하며 또 그렇게 하는 것이 객관적이고 타당한 일임을 강조하고 있다.

일반적으로 이 고사점수의 분포형은 편기(biased)형이고 그 점수를 표준화하는 방법과

그 표준화과정에서 오차를 최소화하는 기법에 관한 연구에는 많은 연구결과가 나오고 있으나 이 논문에서는 복잡하고 난해한 수치적 해법이 나 수학교과와 특정 학습내용에 관한 평가와 같은 특수한 평가형의 기술은 논하지 않고 조금 일반적인 목표지향형 평가에서 최저학습 평가 판정전략과 고사성적의 표준화 과정을 도표로 도시하고 그 프로그램을 제시함으로써 수학교육 현장에서 모든 평가원들이 널리 이 기법을 이용할 수 있게 하는데 도움이 되었으면 한다.

II. 주 연구 내용

1. 최저합격 점수 결정의 전략

Meskauskas J.A.(1976)은 이 고사에서 최저 합격점수를 결정하는 전략 모델인 상태모형(State Model)과 고사 성적을 득수 분포표로 나타낸 연속성 성취도에 관한 모형(Continuum Model)을 가정하고 그 모형상에서 고사성적을 표준화시키는 과정을 제시하였는데 전자에서는 학생들의 학업성취도를 테스트할 문항에서 난이도를 조정하여 그 성취도를 향상시킨후 최종 학습 목표에 부합되는 최저합격점 C를 결정할 때 C 이상의 점수를 가진 학생은 숙달자(Master), C 이하의 점수를 가진 학생은 비숙달자(Nonmaster)로 명명하고 그 두 군의 학생들의 실력 차이를 그래프로 도시하였으며 후자의 연속성 점수에 관하여는 총성적의 득수의 합계를 100%로 하던지 또는 그 수준이 만족할 만한 정도가 아니더라도 적어도 평가자가 수용할 수 있는 수준이면 그 총점수를 100% 수준으로 가중화시킨후 그 점수들을 표준화할 것을

주장하고 있다.

이때 가중법의 이용은 판정전략에 있어서 면밀한 주의를 요하는데 학생들의 성취도 수준을 60% 또는 65%로 결정한다든지 아니면 성취도 수준을 100%로 가정함으로써 최종목표수준 판정에 틀린 결정을 내릴 수 있으므로, 즉한 예로써 작년 수험생의 성취도보다 올해 수험생의 성적이 더 낮다면 부득이 일정한 수의 학생들을 선발해야하는 결정으로 인하여 성취도가 낮은 수험생을 선발하는 것을 마치 성취

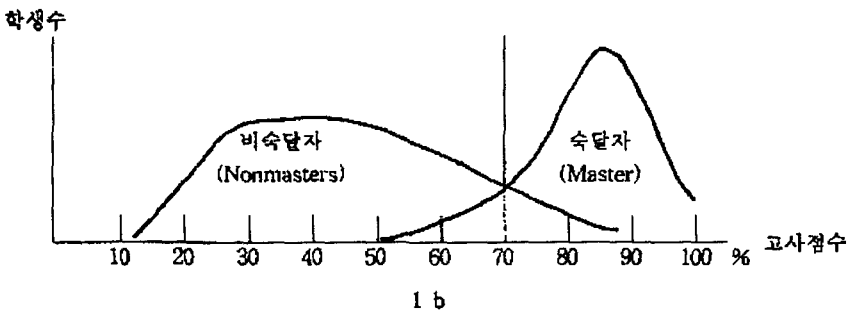
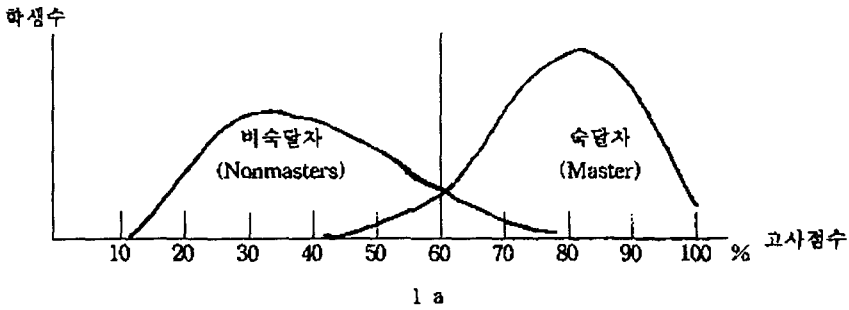
도의 목표가 달성된 것으로 오인하는 경우처럼 가중화와 최종 학습 목표 기준과의 관계를 조정 확인할 수 있는 바람직한 전략을 채택하여야 할 것이다.

이와같이 상태 모형상에서 최저 합격 점수의 판정 전략과 평가원이 범할 수 있는 오류를 표로 나타내면 <표 1>과 같다.

지금 <표 1>에서와 같이 일어나는 두 종류의 오차를 작게하기 위해서는 두 가지 전략이 시행되어야하는데 첫째는 수험자들 성적의 표

<표 1> 최저 합격 점수 판정에 따른 오류의 종류

		외형적 영역	
		비숙달자 ($\pi < \pi_0$)	숙달자 ($\pi \geq \pi_0$)
고사점수에 의한 판정	불합격 ($X < c$)	비숙달자를 불합격시킨 바른 판정	숙달자를 불합격시킨 오류
	합격 ($X \geq c$)	비숙달자를 합격시킨 오류	숙달자를 합격시킨 바른 판정



<그림 1> 최저 합격점 판정에 따른 오류의 크기와 표준화할 분포형의 변화

본을 크게하던지 또는 학업 성취도의 크기를 검정할 수 있는 난이도, 타당도, 신뢰도 등이 모두 구비된 양호한 검사 문항을 제작하여야 하며 또 학생들이 추측(guessing)하여 정답을 얻는 기회와 크기를 관리, 측정하는 문제들을 참고로 하여 적절한 점수 C를 결정하고 둘째는 목표지향형고사를 시행하는 각 검사군간의 성적 차이를 작게하여 각 검사군간에서 검정한 성취도 수준의 차이도 최소화시켜가며 평가원들의 지도법에 대한 공통적인 견해를 도출하면 더욱 좋은 효과를 거둘 수 있을 것이다.

그림 1a와 1b에서는 숙달자군과 비숙달자군의 성취도수준의 크기에 따라 최저 합격점의 점수 차이와 평가원이 범할 수 있는 두 가지 오류의 크기에 대한 변동을 도시하고 있으며 그 판정결과로 인한 분포형의 변화로 기준 점수내의 고사성적에서 각각 다른 분포함수형과 표준정규분포형을 갖게 될 것임을 알 수 있다. 여기서 결정 기준점 C는 숙달자의 최대점수와 최소점수를 각각 K_{max} , K_{min} 이라하고 비숙달자의 최대점수와 최소점수를 각 f_{max} , f_{min} 이라 하면

$$C = \frac{K_{min} + f_{max}}{2}$$

로 정해진다.

2. 목표지향형고사점수의 표준화 과정

앞절에서 논한바와 같이 최저 합격점 C를 결정후 그 평가결정이 만족스러운 성취도 기준에 부합된다면 다음에는 이 기준 점수들을 표준점수로 변환시켜야 한다. 표준점수에는 이미 잘 알려진대로 Z점수 외에 백분위점수, H점수, T점수, 스태나인(stanine) 등이 있는데 그 가운데서 원하는 표준화점수를 선정한 후 다음과 같이 표준화 과정을 시행한다.

첫째, 최저합격점 점수내 성적의 dots분포표와 누적도수분포표를 작성한다.

둘째, 누적도수 분포표를 백분위 분포로 도시한후 도수분포표의 변량을 표준화할 점수로 변환시킨후 정규분포로 적합시킨다.

셋째, 목표지향형 고사 점수 분포, 누적도수 분포, 정규분포의 세 분포형을 동시에 도시하고 각각의 확률밀도함수와 분포함수의 밀도를 해석학적으로 분해하여 그 비율대로 각 함수의 확률밀도크기 별로 투사시켜 도시한다.

이 세 가지 분포형을 동시에 도시하는 기법은 Lord F.M.(1968)이 수험자들의 진능력 점수와 그들의 능력의 크기와의 관계를 세 가지 분포형으로 동시에 적합시켜 도시한후 여러형의 검사 점수를 다른 분포형으로 적합시키는데에도 많이 응용되고 있으며 위의 표준화 과정에서의 적합과정을 그림으로 나타내면 <그림 2>와 같다.

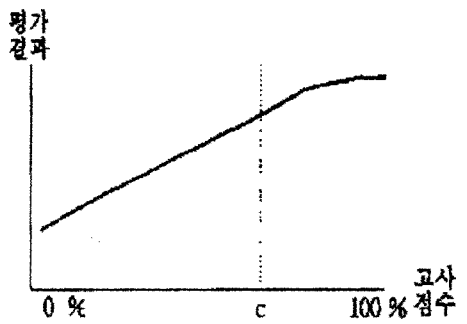
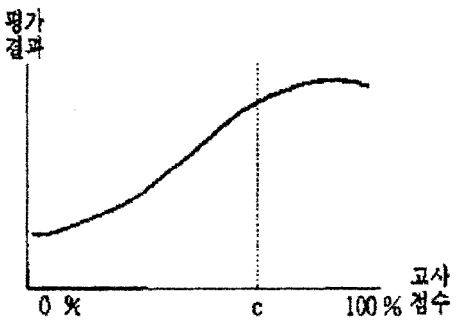
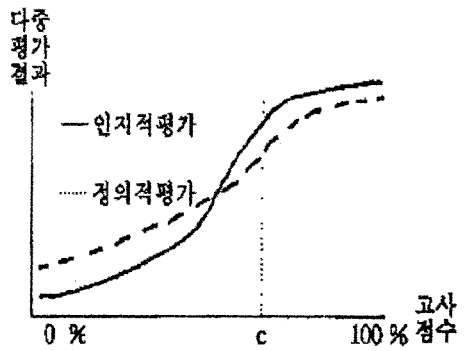
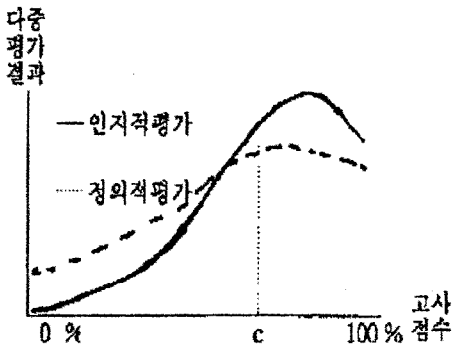
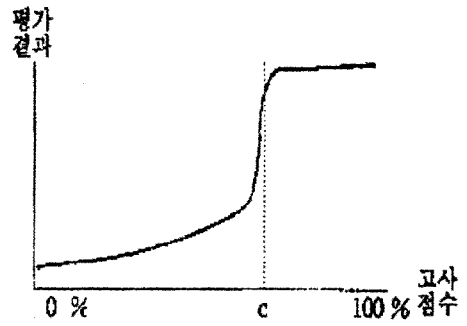
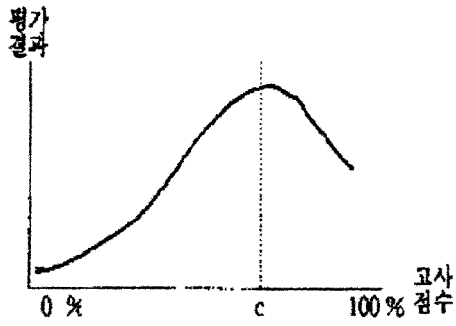
여기서 그림 3a의 경우에는 히스토그램을 그린후 위의 표준화시행 과정을 그린 것이고 그림 3b의 경우는 확률밀도함수를 정규분포로 적합시켜가는 과정을 그린 것인데 이때 x축과 y축의 변환은 다음과 같이 시행한다.

① y축의 목표지향형평가 점수를 단위구간 [0, 1]로 변환하고

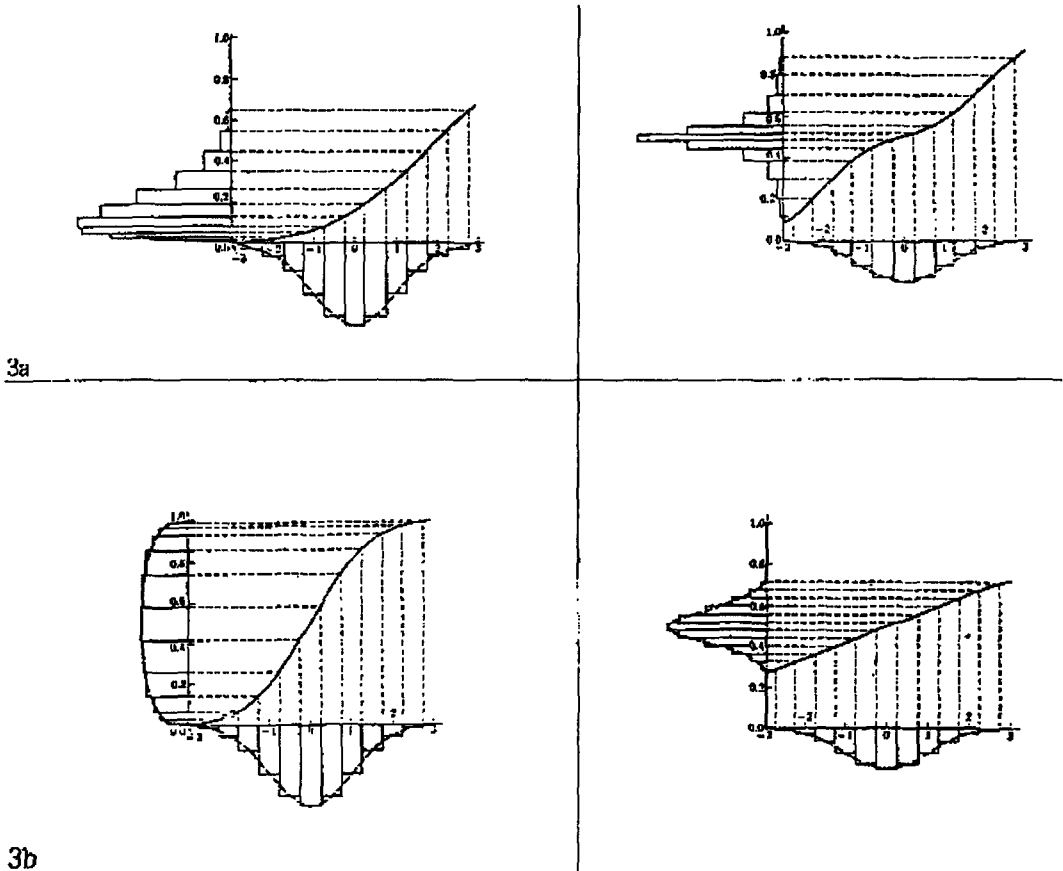
② x축도 y축과 같은 단위구간 [0, 1]상에서 누적 분포함수를 그리고

③ x축의 [0, 1]의 구간은 표준정규분포 (-3. +3)으로 변환하여 그린다.

그리고 대응하는 점의 선정 방법은 먼저 목표지향형 평가의 점수에 대응하는 좌표축과의 교점을 중심으로 분포함수에 대응하는 점을 찾고 그 점에서 정규분포의 좌표축에 수선을 그어 각 함수의 밀도의 크기를 측정해 나간다. 일반적으로 표본의 크기가 작은 경우는 히스토그램의 변량 좌표에의한 분해법을 많이 이용하고 표본의 크기가 큰 경우에는 확률밀도함수를 그림 3b와 같이 누적분포함수를 중심으로 두 확률분포의 밀도를 분해하면 편리한 경우가 많다.



<그림 2> 목표지향형평가의 분포형과 분포함수형



<그림 3> 세분포형을 동시에 적합시키는 과정의 도식

다음 예는 어느 대학 입시 학원의 총 111명의 학생으로 구성된 종합반에서 수학 II 과목의 1차 기초 고사를 시행하여 우수반과 보통반으로 분반하고 그 후에 심화학습과정을 거쳐 목표한 성취도 기준에 맞는 학생들을 선발하기 위하여 시행한 2차 모의고사 점수인데 이 자료로 앞절에서 논한 목표지향형 평가 점수의 최저 합격점수 산정법과 표준화 과정의 프로그램 및 그 과정을 도표로 제시하면 다음과 같다.

[예]

(I) 도수분포표

1) 우수반

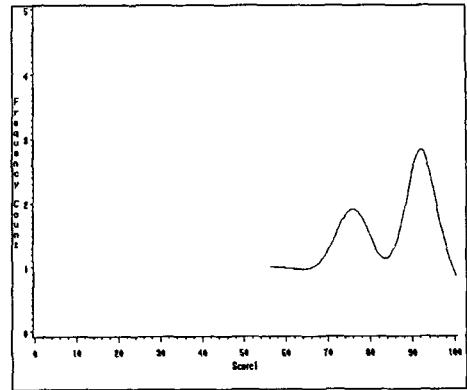
Score	Frequency	Percent	Cumulative Frequency	Cumulative Percent
56	1	1.8	1	1.8
60	1	1.8	2	3.6
62	3	5.4	5	8.9
66	1	1.8	6	10.7
70	1	1.8	7	12.5
74	5	8.9	12	21.4
76	3	5.4	15	26.8
78	1	1.8	16	28.6
82	6	10.7	22	39.3
84	2	3.6	24	42.9
88	4	7.1	28	50.0
90	7	12.5	35	62.5
92	4	7.1	39	69.6
96	13	23.2	52	92.9
100	4	7.1	56	100.0

2) 보통반

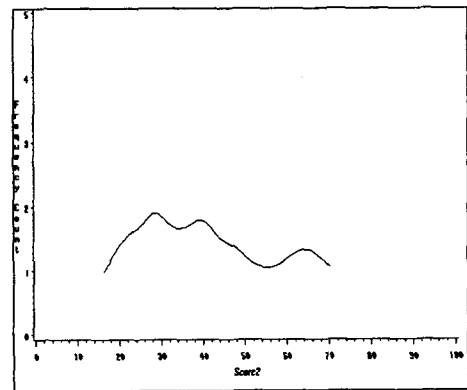
Score 2	Frequency	Cumulative Percent	Frequency	Cumulative Percent
16	1	1.8	1	1.8
17	1	1.8	2	3.6
18	1	1.8	3	5.5
19	1	1.8	4	7.3
20	2	3.6	6	10.9
22	2	3.6	8	14.5
23	2	3.6	10	18.2
24	1	1.8	11	20.0
25	1	1.8	12	21.8
26	1	1.8	13	23.6
28	3	5.5	16	29.1
29	4	7.3	20	36.4
30	1	1.8	21	38.2
31	1	1.8	22	40.0
33	1	1.8	23	41.8
34	2	3.6	25	45.5
36	1	1.8	26	47.3
37	2	3.6	28	50.9
38	1	1.8	29	52.7
39	3	5.5	32	58.2
40	2	3.6	34	61.8
41	3	5.5	37	67.3
42	1	1.8	38	69.1
43	1	1.8	39	70.9
44	1	1.8	40	72.7
45	1	1.8	41	74.5
47	2	3.6	43	78.2
48	2	3.6	45	81.8
50	1	1.8	46	83.6
51	1	1.8	47	85.5
52	1	1.8	48	87.3
55	1	1.8	49	89.1
57	1	1.8	50	90.9
62	1	1.8	51	92.7
64	2	3.6	53	96.4
69	1	1.8	54	98.2
70	1	1.8	55	100.0

Frequency Missing = 1

(II) 곡선으로 적합

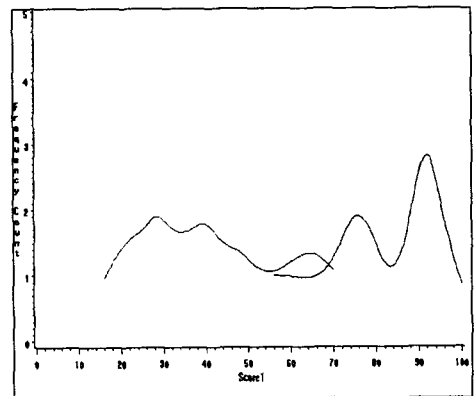


1) 우수반



2) 보통반

(III) 교차점

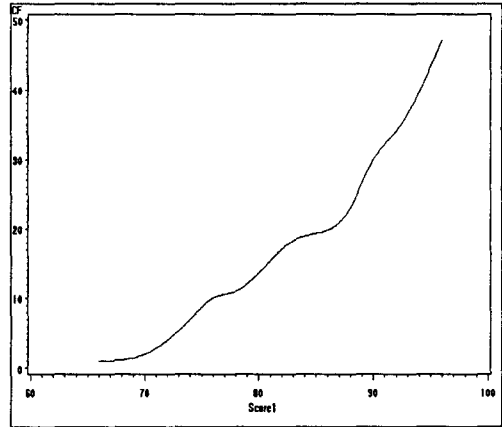


$$C = \frac{\text{우수반}(\text{Min}) + \text{보통반}(\text{Max})}{2}$$

$$= \frac{56 + 70}{2} = 63$$

(IV) 우수반에 남은 학생들의 누적 도수분포표

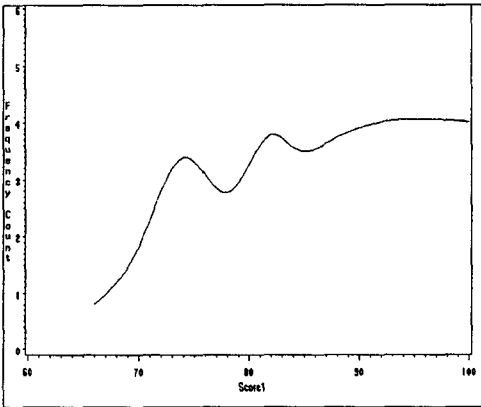
Score	Cumulative Frequency	Cumulative Percent	Score	Cumulative Frequency	Cumulative Percent
66	1	2.0	1	1	2.0
70	1	2.0	2	2	3.9
74	5	9.8	7	7	13.7
76	3	5.9	10	10	19.6
78	1	2.0	11	11	21.6
82	6	11.8	17	17	33.3
84	2	3.9	19	19	37.3
88	4	7.8	23	23	45.1
90	7	13.7	30	30	58.8
92	4	7.8	34	34	66.7
96	13	25.5	47	47	92.2
100	4	7.8	51	51	100.0



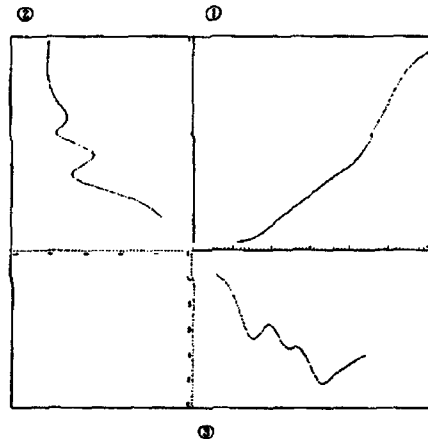
*우수반에 남은 학생들의 누적도수분포다각형

(V) 단위구간에 대한 그래프와 표준화된 그래프

- ① [60~100] ⇒ 단위구간 [0, 1] 누적도수분포다각형 (Y좌표)
- ② [60~100] ⇒ 단위구간 [0, 1] 도수분포다각형 (X좌표)
- ③ [60~100] ⇒ [-3, 3] 표준화점수(Z분포)



* 우수반에 남은 학생들의 도수분포다각형



* 우수반에 남은 학생들의 표준화된 값

OBS	Score1	OBS	Score1	OBS	Score1
1	-1.29226	18	0.03916	35	0.48297
2	-0.62655	19	-1.51416	36	-0.62655
3	0.92677	20	-0.40465	37	0.03916
4	-0.62655	21	-1.29226	38	-0.62655
5	0.92677	22	-0.62655	39	0.92677
6	-1.95797	23	0.03916	40	0.26106
7	0.92677	24	-0.40465	41	0.03916
8	-1.51416	25	0.92677	42	0.92677
9	-1.51416	26	0.92677	43	0.26106
10	0.92677	27	-1.29226	44	0.92677
11	0.92677	28	-1.51416	45	0.26106
12	0.26106	29	0.26106	46	-1.51416
13	0.48297	30	0.26106	47	0.92677
14	-0.62655	31	0.92677	48	1.37058
15	1.37058	32	0.92677	49	-1.07036
16	1.37058	33	0.48297	50	0.48297
17	1.37058	34	0.26106	51	-2.40178

* 우수반에 남은 학생들의 표준화된 값의 도
수분포표

Score 1	Frequency	Percent	Cumulative Frequency (누적도수)	Cumulative Percent
-2.401777701	1	2.0	1	2.0
-1.957970952	1	2.0	2	3.9
-1.514164203	5	9.8	7	13.7
-1.292260828	3	5.9	10	19.6
-1.070357454	1	2.0	11	21.6
-0.626550705	6	11.8	17	33.3
-0.40464733	2	3.9	19	37.3
0.039159419	4	7.8	23	45.1
0.2610627936	7	13.7	30	58.8
0.4829661681	4	7.8	34	66.7
0.9267729172	13	25.5	47	92.2
1.3705796663	4	7.8	51	100.0

< SAS PROGRAM >

```
data a;
infile 'b:data.dat';
input score1 score2;
run;
```

```
proc freq data=a;
table score1/out=ra;
table score2/out=rb;
run;

proc print data=ra;run;
proc print data=rb;run;

data rc;merge ra rb;
run;

symbol1 i=sm50;
proc gplot data=rc;
plot count*score1/ vaxis=0 to 5 haxis=0 to
100 by 10;
plot count*score2/ vaxis=0 to 5 haxis=0 to
100 by 10;
run;
```

```
symbol1 i=sm50;
proc gplot data=rc;
plot count*score1 count*score2/overlay vaxis
=0 to 5 haxis=0 to 100 by 10;
run;
```

```
data ho;set a;
if a<63 then delete;
run;
```

```
proc freq data=ho;
table score1/out=ff;
run;
```

```
proc print data=ff;run;
```

```
symbol1 i=sm55;
proc gplot data=ff;
plot count*score1/frame vaxis=0 to 6 haxis
```



```

=60 to 100 by 10;
run;

data v;
infile 'b:a.dat';
input score1 f cf cper;
run;

symbol1 i=sm20;
proc gplot data=v;
plot cf*score1/frame vaxis=0 to 55 by 10
haxis=60 to 100 by 10;
run;

data c;set v;
score=(score1-60)/40;
scf=cf/55;
run;

symbol1 i=sm50;
proc gplot data=c;
plot scf*score/frame vaxis=0 to 1 haxis=0
to 1 ;
run;

proc standard data=ho mean=0 std=1 out
=qq;
var score1;run;

proc print data=qq;run;

proc freq data=qq;
table score1/out=gra ;
run;

symbol1 i=sm55;
proc gplot data=gra;
plot count*score1 / vaxis=0 to 10 haxis
=-3 to 3 ;

```

```

run;

symbol1 i=sm55;
proc gplot data=c;
plot f*score/frame vaxis=0 to 6 haxis=0 to
1 ;
run;

```

III. 결론 및 제언

본 연구에서는 수학과 목표지향형 평가고사의 목표한 성취도 기준에 부합되는 점수대의 숙달자군과 그 수준에 미달되는 비숙달자군의 성적분포에서 최저 합격 점수를 결정할 수 있는 최적 평가 전략과 그 점수내의 고사성적을 표준화하는 해석법을 도표로 제시하였는데 주요 연구 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 숙달자군과 비숙달자군의 성적에서 최저 합격점 C를 결정하는 판정과 그로 인하여 발생하는 두 가지 오류에 대하여 논하였다.

(2) (1)의 판정결과로 인한 분포형의 변화와 표준화하고자하는 점수 분포형의 변화에 관하여 논하였다.

(3) 목표지향형평가 분포점수의 표준화 과정에서 적합에 요하는 확률밀도분해법과 누적도수 분포, 정규분포를 동시에 그래프로 도시하는 과정과 프로그램을 기술하였다.

끝으로 제안으로써 이 평가형의 표준화기법의 개선을 위하여 다음과 같은 점들이 더 연구되어져야 할 것이다.

첫째, II-1 절에서 논한바와 같이 숙달자군의 성적의 변이와 평가원들의 지도법의 차이와의 관계를 규명하고 또 평가원들의 각각 다른 평가관을 조정하는 방법과 종합적인 성취도 기준의 설정에 관한 연구가 있어야 한다.

둘째, 표준화 자료를 제시하고자 할 때 가장 바람직한 분포형의 결정과 그 표준화과정을 성취도 결정 시행의 어떤 단계에 적용할 것인가 하는 연구가 있어야 한다.

셋째, 이 평가 시행의 성취목표 점수를 목표한 바의 절대기준에 맞추었을 때 고사의 타당도를 조절하는 연구가 있어야한다.

이와같이 위의 여러 가지 제약조건을 충족하며 평가원이 택하는 최적의 판정전략과 그에 대응하는 평가결과에 따라 적절한 표준화 과정이 앞으로 더 연구되어질 것으로 예상된다.

참 고 문 헌

- 홍석강 (1990), 신구 두고사 평가치 변환에 의한 진분포와 모수추정에 관한 연구, 수학교육, 제 29권, 제 2호, 79-93.
- 홍석강 (1994), 결측치를 가진 목표지향형 평가 모델에서 수학학습능력의 평가에 관한 연구, 수학교육, 제 33권, 제2호, 167-175.
- Glaser, R. (1963), Instructional technology and measurement of learning outcomes, American Psychologist, 18, 519-521.
- Hambleton P.K. Swaminathan, H. Algina J. and Coulson, D.B. (1978), Criterion - referenced testing and measurement, A review of technical issues and developments, Review of Educational Research 48, 1-47.
- Jaeger, R.M. (1979), Measurement consequences of selected standard-setting models, In M.A. Bunda and J.R. Sanders (Eds) Practices and problems in competency-based measurement, N.C.M.E.
- Koffler, S.L. (1980) A comparison of approaches for setting proficiency standards. Journ. of Educational Measurement 17, 167-178
- Lord F.M. (1968), Statistical theories of mental test scores, N.Y.: Addison-Wesley.