Historia Mathematica Vol. 10. No. 2, 1997, 82-88

직관주의

서경대학교 응용수학과 **박창균**

Abstract

수학 기초의 위기에 대한 직관주의적 대안은 파격적인 것이었다. 수학을 지나치게 축소시켰다고 비난을 받기도 하지만 역리의 제거라는 측면만 본다면 직관주의는 성공적이라고 할 수 있었다. 본고는 직관주의를 개관하고 직관주의가 가지는 보다 철학적이고 본질적인 측면을 직관주의의 창시자인 Brouwer의 수학관과 세계관에서 찾는다.

0. 들어가는 말

Cantor의 집합론이 제안된 후 이 개념을 사용하여 모든 수학을 정립할 수 있으리라는 기대는 20세기 시작을 전후하여 나타난 역리들에 의해 의심의 먹구름이 드리우게 된다. 잘 알려진 대로 이것은 수학의 기초에 대한 위기였다. 이 위기를 극복하고자 논리주의, 직관주의, 형식주의가 등장하였고, 이 학파들은 치열한 논의를 통해 흔들리는 수학을 그들의 프로그램에 의해 굳건한 토대 위에 세워놓으려고 했다. Russell을 중심으로 하는 논리주의자들은 유형론을 통해서 역리를 제거하려고 했고, Brouwer의 직관주의는 실무한의 개념 및 집합론 일반에 대해 강렬한 비판을 하며 직관적으로 주어진 것으로부터 수학전체를 안전하게 구성하려는 것을 목표로 했다. 이러한 제안은 전통적 수학의 입장에서 보면 '파괴적인' 대안이었다. 또한 Hilbert의 형식주의 프로그램은 바로 이 직관주의에 의해 대부분이 유실될지도 모를 수학을 구출해보려는 것을 과제로 삼았다고 할 수 있다.

넓은 의미에서 직관주의는 Descartes와 Pascal로 거슬러 올라간다[8, p.230]. Descartes는 그의 『정신지도의 규칙들』(*Rules for the Direction of the Mind*)에서 이해가 오류에 대한 두려움 없이 지식으로 될 수 있는 두 가지 방법이 직관과 연역이라고 하였다. Descartes는 직관에 대하여 다음과 같이 언급하며 강조하였다.

직관은 감각에 대한 변화하는 증거를 의미하거나 본질적으로 터무니없는 상상에

> 대한 잘못된 판단을 의미하는 것이 아니라, 주의 깊은 정신의 개념 작용으로서, 그것이 이해하는 것에 관하여 아무런 의심을 남기지 않을 정도로 아주 분명하고 확실한 개념 작용이다. 혹은 바꾸어 말하자면, 직관은 건전하고 주의 깊은 정신의 자명한 개념 작용, 즉 이성의 빛으로부터만 발생하는 개념 작용이며, 또한, 위에서 말한 대로 인간의 정신은 연역에 있어서도 오류를 범할 수 없기는 하지만, 연역 자체보다도 더 단순하기 때문에 연역보다도 더 확실한 개념 작용인 것이다. 그러므로 모든 사람은 직관에 의하여 자신이 존재한다는 것과, 자신이 생각한다는 것, 삼각형은 세 변으로만 둘러싸여 있다는 것, 구는 한 면으로 둘러싸여 있다는 것 등을 알 수 있다. [8, p.230]

그는 감각적 경험에 전혀 의존하지 않고서도 그 자체로 명증적인 직관을 토대 삼아 그 직관으로 단계적으로 연역함으로 새 진리에 이를 수 있다고 믿었다. Pascal도 직관에 큰 신뢰를 가지고 있었고 만년에 그는 모든 진리의 근원으로서 직관을 선호했다. 직관주의의 뿌리는 Kant, Kronecker, Baire, Lebesque, Borel 등에게서도 발견된다. 그러나 그들의 공헌은 단편적이었고 직관주의를 종합적이고 체계적으로 제시한 사람은 화란의 수학자 Brouwer였다.

본고는 직관주의 수리철학이 제시하는 본질적인 성격과 그것의 밑바탕이라고 여겨지는 Brouwer의 세계관을 탐구하는 것을 목표로 한다. 이를 위해 우선 직관주의의 주장을 정리하여 이 견해의 장· 단점을 따져 보고, 이러한 주장을 가능케 한 Browner의 수학관과 세계관을 살펴 보려고 한다.

1. 직관주의의 내용

직관주의에서는 수학을 직관을 근거로 한 인간의 심적 구성 활동으로 본다. 이러한 입장은 불변적, 객관적 진리 탐구를 지향하는 플라톤 주의와는 거리가 멀다. 직관주의자는 진리에 대해 주관주의적인 입장을 취한다. 따라서 수학은 수학자의 수만큼이나 존재한다고 공공연히 이야기한다. 그리고 직관이야말로 수학적 개념이나 결론을 명증적으로 부여하는 유일한 원천이라고 여긴다. 또한 직관주의는 관념론을 표방한다. 직관주의자 Weyl은 수학은 의심할 것도 없이 선험적이라고 지적한다[11]. 그리고 Brouwer의 지도를 받은 Heyting은 수학적 대상은 사고하는 정신에 의해서 직접적으로 식별되므로 수학적 인식은 경험으로부터 독립되었다고 주장한다.

이상의 견해를 종합하면 직관주의는 주관주의적 관념론의 성격을 가지고 있다고 말할 수 있다. 수학적 대상이나 존재에 관해서 직관주의자는 인간 사유에 의해서 구성될 수 있는 것만을 수학적 존재자로 인정하는 태도를 취한다. 직관주의자가 의미하는 지적 구성은 현실세계에는 관계하지 않고 오로지 두뇌적 구성과 관련되어 있다. 수를 비롯한 모든 수학적 대상은 그것들을 산출하는 또는 구성하는 방법이 존재하는 경우에만 그들은 정의되었다고 간

주된다. 즉 '존재함'과 '구성함'은 직관주의에서는 일치하는 것이다. 이러한 태도는 수학적 정리에 대해서도 가치 있는 것은 정리 자체가 아니라 증명 속에서 성취된 구성이라고 일관적으로 유지된다. 수학기초에 대한 위기를 직관주의자는 무한 개념이 잘못 되었기 때문이라고 진단한다. 즉 무한을 유한과 비슷한 방법으로 논의한 데서 문제가 발생했다고 본 것이다. 따라서 직관주의는 완결된 무한을 거부하고 계속 형성되어 가는 가능 무한(potential infinity)만을 인정한다. 직관주의자들은 시간의 영역 속에 지배받고 있는 개인의 유한한 지성의 힘에만 의존하고 그것을 넘어서는 '확실치 않은' 영역을 배제하려는 자세를 취한다. 이렇게 하여 확실성을 담보하려고 하는 것이다.

전술한 내용들이 직관주의의 기본적인 입장이다. 그러면 이러한 직관주의의 철학은 수학과 논리에 구체적으로 어떻게 반영되었는가? 그것은 '유한한 지성'을 근거로 하여 고전수학을 매우 엄격하게 제한하는 다음과 같은 형태로 나타났다.

첫째, 집합이나 실수와 같은 개념은 전체가 이미 존재하는 전제에 근거해서는 안된다. 전체가 이미 존재한다는 것은 이미 사고로부터 구성되는 단계를 초월한 것이다. 수학적 대상은 구성의 결과로만 오직 존재한다. 따라서 Cantor의 초한수론은 무한집합이 존재한다는 가정에 근거해 있으므로 타당하지 않다고 본다.

둘째, 정의나 증명도 구성적이어야 한다. 귀류법에 의한 존재 증명은 받아들일 수 없다. 따라서 귀류법에 의한 대수학의 기본정리 증명은 해를 찾는 구체적인 규칙이 제시되어 있지 않기 때문에 거부한다. 즉 논리적 모순이 존재성을 함축하지는 않는다는 것이다. 이와 같은 원칙은 Lindemann이 1882년에 π가 초월수라는 것을 증명했다는 소식을 들은 Kronecker가 "그것은 흥미 있군. π가 존재하지 않는다는 사실을 제외하곤 말이야"라고 했다는 일화에서도 엿볼 수 있다. 이와 같이 구성 가능성을 존재성과 반드시 일치시키기 때문에 선택 공리에 의한 존재 증명은 모두 거부된다.

셋째, 존재가 허용되어지려면, 유한한 단계에서 구성 가능해야 한다. 따라서 Cantor의 대각선 논법에서 구성되는 수는 무한 단계를 거치기 때문에 받아들이지 않는다.
즉, 실수의 기수가 자연수보다 크다는 것을 보이기 위해 자연수와 (0,1)이 1-1 대응한다고 가정하고 그것을 $r_1, r_2, \cdots$로 하여 무한 소수 형태로 다음과 같이 표시했을 때,

$r_1 = 0.a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14} \cdots$

$r_2 = 0.a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24} \cdots$

$r_3 = 0.a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34} \cdots$

$\vdots$

r_0를 다음과 같이 정의하면 모든 자연수 i에 대해 $r_0 \neq r_i$가 된다.

$r_0 = 0.a_{01}\ a_{02}\ a_{03}\ a_{04} \cdots$, 여기서, $a_{0n} = \begin{cases} 1, & \text{if } a_{nn} \neq 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$

이 때 이 r_0의 구성에 무한히 많은 단계가 요구된다는 것을 직관주의는 불편해하고 못마땅해하는 것이다.

넷째로, 비서술적 정의(impredicative definition)는 생성되리라고 추정되는 존재를 미리 가정하므로 거부된다. 예컨대 A가 모든 집합의 집합이라고 하자. A가 잘 정의되려면 그것의 모든 원소들이 알려져야 하는데 A∈A되므로 정의가 순환된다. 따라서 A와 같은 집합은 수용할 수 없다. 또 다른 예는 최소상계(least upper bound)에 대한 정의가 정의되고 있는 자신을 포함하는 상계(upper bound)들의 모임을 사용하여 정의되는 것이다.

다섯째로, 어떤 진술도 참이거나 거짓이라는 배중률은 명백한 경우를 제외하고는 사용이 제한된다. 이 점은 직관주의 논리의 가장 뚜렷한 특징으로 거론되는 것이다. 물론 그렇다고 해서 고전 논리 법칙을 모두 포기하는 것은 아니다. 동일률이나 모순율 등은 허용한다. 배중률 사용에 대한 제한의 예로서 흔히 이야기되는 것 중 하나는 쌍둥이 소수 추측(Twin Prime Conjecture)이다. 그러나 명제는 직관 주의자에게는 참도 거짓도 아닌 배중률을 적용할 수 없는 것이다. 또한 배중률의 결과로서 이중부정은 긍정으로 취급하지 않는다. 예컨대 $\sqrt{2}$가 무리수라는 명제를 p라 하자. 증명은 p가 아님(~p)을 가정하고 시작하여 모순을 이끌어 낸다. 즉 ~p는 거짓이 되므로 ~(~p)는 참이 된다고 결론을 얻는데, 직관주의는 여기서 p가 참이라고 나아가지 않는다. 즉, ~(~p)가 p를 함축하지 않고 제 삼의 가능성일 수 있다고 주장한다.

직관주의의 이러한 성질들은 다른 학파와의 갈등을 야기했고, 치열한 논쟁이 이루어졌다. 논리주의는 수학을 논리로 환원하려 했지만 직관주의는 논리가 오히려 수학에 의존한다고 보았다. 그리고 논리는 언어에 속하기 때문에 언어가 가지는 결함과 똑같은 결함을 가져서 논리적 결과를 신뢰할 수 없다는 것이다. 논리에 대한 직관주의의 이러한 성격 규정은 논리가 절대적이고 영원히 타당한 것이 아니고 시공을 초월하여 모든 사람에게 적용되지 않는다

는 인식에서 비롯되었다. 직관주의자들은 수학적 활동은 언어보다도 더 깊고 포괄적인 정신 속에서 이루어 진다고 본다. 또한 형식주의는 수학을 형식화된 체계에 불과한 것으로 파악한다. 일련의 부호들이 어떤 방식으로 결합하여 그 체계의 정리를 만들어 내는가에 주목하지 그 부호들이 가지는 의미와 표현하는 내용에는 관심이 없다[13, p.74]. 그러나 직관주의는 Heyting이 표명한 대로 수학은 내용적인 의미를 갖는다고 주장한다. 직관주의와 형식주의는 배중률의 사용을 놓고도 첨예하게 대립하여 Hilbert는 수학자로부터 배중률을 사용하지 못하게 하는 것은 천문학자에게서 망원경을 빼앗고 권투 선수에게서는 주먹 사용을 금하는 것 같다면서 직관주의를 공격했다. 이에 대해 Brouwer는 수학적 엄밀성이 직관주의자는 인간 지성에 있다고 하고 형식주의자는 종이 위에 있다고 한다고 힐난하였다.

2. 직관주의의 장단점과 철학적 배경

직관주의를 받아들이면 다음과 같은 장점이 따라오게 된다. 우선 많은 역리들을 쉽게 제거할 수 있다는 점이다. Russell의 역리의 경우처럼 자기 자신을 포함하지 않는 모든 집합의 집합과 같은 집합은 그 정의가 비 구성적이고 모순의 원인이 되기 때문에 존재하지 않는다. 또한 모든 크레타 사람은 항상 거짓말을 한다는 크레타 사람 에피메니데스의 진술이 참인가 거짓인가 하는 문제도 그 진술이 참도 거짓도 아닌 것이 된다. 직관주의의 제한들과 구성적 방법들은 모순을 야기하지 않는다. 그리고 Goldbach의 추측이나 쌍둥이소수 추측 등은 배중률의 사용을 제한하는 것을 지지해주는 듯하다. 이에 반하여 직관주의를 채택할 때 오는 어려움 또한 적지 않다. 우선 수학적 활동을 인간 정신 내로 한정할 때 어떻게 수학자들이 주관적인 입장을 넘어서서 애매함 없이 서로 의사소통 할 수 있는가? 하는 질문에 직관주의는 대답을 하기가 곤란하다. 이러한 주관주의의 부당성을 일찍이 논리학의 창시자라고 하는 독일의 Frege는 만일 직각 삼각형이 우리의 마음속에만 존재한다면 나의 직각 삼각형에 대한 나의 피타고라스 정리와 너의 직각 삼각형에 대한 너의 피타고라스의 정리를 언급해야 하는가 하고 반문했다. 이와 함께 수학이 실제로 응용되고 있는 현실에 대해서도 직관주의로는 설명하기가 쉽지 않다. 그리고 전술한 바와 같이 직관주의가 제시한 제약으로 인해 전통적인 수학의 많은 내용을 포기해야 하는 것도 직관주의를 받아들이려는 사람에게는 큰 부담이 된다. 비록 건전한 기초를 얻는다 해도 너무 많은 희생을 강요당하는 것이 아닌가 하는 것이다.

그러면 이러한 직관주의는 어떻게 형성되었는가? 직관주의의 제창자라고 할 수 있는 Brouwer의 수학관이 바로 직관주의의 근거가 됨은 두 말할 나위가 없다. Brouwer가 그러한 수학관을 가지게 된 보다 근원적인 철학 내지 세계관은 존재했는가? Brouwer의 수학관이 지닌 포괄적인 철학적 입장은 1907년 Brouwer가 지도 교수의 허락을 받아 자신의 박사학위 논문에 삽입한 1905년의 소논문 “Leven, Kunst en mystiek”에서 발견 할 수 있다. 이 소논문의 주요한 생각은 인간은 오직 내적 자아에 의해 행복에 도달할 수 있다는 것이다[4]. 그리고 Brouwer는 외부 세계로 향하여 움직이는 모든 시도를 인간의 고통의 근원으로 비난

받아야 마땅하다고 생각했다. Brouwer가 외부 세계로 향하는 시도라고 지적한 것 중에는 외부 세계와 접촉할 때 맨 처음 사용하는 시공에 대한 지각(이것은 1907년부터는 단지 시간에 대한 지각으로 분류), 자연에 대한 지배를 위한 형태로서 과학(science), 다른 사람에 대한 지배의 형태로서 언어(language) 등이 포함되었다. Brouwer의 눈에는 수학은 그것의 응용 가능성 때문에 과학으로, 계산(calculus)에 의해 타인을 설득하는 것으로 인해 언어로 여겨졌고 이는 비난 받아야 할 대상들이었던 것이다. 따라서 그는 수학에 대한 새로운 정의를 시도했고 이는 어쩌면 그의 입장에서 보면 외부 세계로 향하지 않아서 비난 받을 필요가 없는 아주 '윤리적인' 것이었다. 즉 수학은 응용을 목적으로 하지 않는, 외부 세계와 관계없는 그리고 언어 없이 수행될 수 있는 정신적 활동이라는 것이다. 따라서 수학은 한 조각의 증거로부터 다음으로 연결되는 규칙이 필요 없고 오직 "보고" "받아 적는" 것만이 요구되는 그러한 학문이 되어야 한다는 것이다. 사실 19세기에 있어서 유행했던 수학에 대한 견해는 수학이 내적인 빛에 의해 조명되어지는 정신적 대상들에 관한 학문이라는 것이다. 즉, 직선, 원, 초월수, 힐버트 공간 등 수학적 대상들은 모두 심리적인 의미에서 이상적인 존재자들이고 그들은 수학자들의 마음속에만 존재하는 것들이라고 생각했다. 이러한 생각은, 비유클리드 기하와 사원수의 발견 이후 현실 세계와 연관지어 수학적 진리의 근거를 논의할 수 없게 된 것과, 19세기에 수학이 매우 추상화되어 가는 과정에서 더욱 입지를 넓혀온 것 같다.

3. 맺는 말

수학 기초에 위기가 왔을 때 직관주의는 수학의 확실성을 직관에서 찾았다. 다른 어떤 학자의 제안과 해결 방법에 비해서 파격적이고 혁신적이었지만 기존 수학의 많은 부분을 포기해야 한다는 점에서 일부 수학자들을 제외한 대부분의 수학자들로부터 외면 받았다. 직관주의는 오늘날 소위 말하는 지배적인 패러다임은 아니다. 그러나 역리를 제거하고 기초의 위기를 해소한 대안적 측면에서 본다면 직관주의는 가장 '성공한' 셈이다. 직관주의는 플라톤주의와 함께 비판하거나 부정하기가 쉽지 않다. 왜냐하면 여기에는 보다 더 근원적인 철학적인 배경과 세계관이 자리잡고 있기 때문이다. 사실 이러한 형이상학들을 경험적 증거에 의해 반박하기란 거의 불가능하기 때문이다. 직관주의는 철학적으로 Kant의 개념주의(conceptualism)로부터 왔다고 볼 수 있다. 이에 따르면 수학적 지식의 대상들은 마음속에서만 그 존재를 가지며, 인식 주관과 독립적인 어떠한 수학적 존재는 인정되지 않는다. 이러한 전통을 이어받은 Brouwer의 직관주의는, "Leven, Kunst en mystiek"에 나타나 있듯이, 오직 내적 자아에 의해서만 인간은 행복에 도달할 수 있다는 생각에 근거하고 있다고 볼 수 있다. 이러한 생각으로부터 파생된 직관주의에 Kitcher의 수학적 실천의 패턴을 적용해본다면 직관주의를 채택하는 것은 초수학적 견해의 변화이기 때문에, 수학적 언어,, 질문, 추론 방법 그리고 진술 등 수학적 실천의 구성 요소에 전반적이고 총체적인 변화를 야기한다. 과학 철학자인 Polanyi는 매우 치밀한 연구를 통해 과학적 지식을 추구하는 활동이란 삶의 현실, 우리가 살고 있는 사회, 그리고 우리의 신체적 조건과 지적 열망 등과 동떨어진 것이 아

니라 이 모든 것을 포함한 '인격적 참여(personal commitment)'의 행위임을 보였다[12, p.46]. 형이상학적 믿음은 과학과 구별되는 것이 아니라 과학 자체의 구조를 이루고 있다는 Polanyi의 지적처럼, Brouwer의 인간 행복이 내적 자아에 의해서만 이루어진다는 신념이 그의 수학과 논리에 참여(commitment)되고 용해되어 직관주의라는 꽃을 피우게 되었던 것이다.

참고문헌

1. M. Beeson, Continuity in Intuitionistic Set Theories, *Logic Colloquium* 1978. Amsterdam: North-Holland, 1980.
2. L. Brouwer, Over de grondslagen der wiskunde, *Akademisch proefschrift,* Amsterdam: Mass & van Suchtelen, 1907.
3. L. Brouwer, Consciousness, Philosophy and Mathematics, *Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy*, Amsterdam 1948 III, 1235-1249.
4. L. Brouwer, *Collected Works*, Vol. 1, Philosophy and the Foundations of Mathematics, ed. Arend Heyting. Amsterdam: North-Holland, 1975, 11-101.
5. G. Frege, *The Foundations of Arithmetic*, 2nd ed. J. L. Austin (trans.). Oxford: Oxford University Press, 1959.
6. A. Heyting, Intuitionism in Mathematics, *Philosophy in the Mid-century; A Survey*. ed. Raymond Klibansky. Firenze: La Nuova Italia, 1958, 101-115.
7. A. Heyting, *Intuitionism:An Introduction*, 3rd rev. ed. Amsterdam: North-Holland, 1971.
8. Morris Kline, *Mathematics, The Loss of Certainty*. New York: Oxford University Press, 1980.
9. Michael Polanyi, *Personal Knowledge: Towards a Post-Critical Philosophy*. London: Routledge & Kegan Paul, 1958.
10. Anne Sjerp Troelstra, Logic in the Writings of Brouwer and Heyting, *Atti del convegno internazionale di storia della logica, S. Gimignano, 4-8 dicembre 1982.* eds. Vito Michele Abrusci, Ettore Casaari, and Massimo Mugnai, Bologna: CLUEB, 1983, 193-210.
11. H. Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton: Princeton University Press, 1949.
12. 강영안, *주체는 죽었는가*. 서울: 문예출판사, 1996.
13. 박창균, 현대 수리철학의 특징과 수리철학을 위한 대학교육과정의 한 예, *대한수학교육학회 논문집* 5(1) (1995).