Historia Mathematica Vol. 10. No. 1, (1997), 46-55

기하학과 비선형 미분방정식의 현재 상태와 전망 *

Harvard University Shing - Tung Yau
서경대학교 이공대학 응용수학과 한찬욱

이 심포지엄에 연사로 초대받은 것은 영광이다. 수학의 미래에 대해 이야기하는 것은 분명히 어렵거나 심지어는 불가능한 일이다. 수학은 더 이상 과학의 고립된 분야가 아니다. 순수, 응용과학 양자의 다른 학문들과 수학의 상호작용은 점점 활기를 띠고 있다. 수학의 발전에 대한 논의가 과학의 다른 분야들에 대한 진지한 논의를 하지 않고 진행된다는 것은 상상하기 힘들다.

다른 한편으로는, 다른 학문들에 대한 충분한 感(feelings)을 우리가 갖고 있다고 감히 우리가 어떻게 말할 수 있겠는가? 수학의 여러 분야에서 전문가라고 말할 수 있는 수학자를 발견하는 것은 이미 어렵게 되었다. 따라서, 나는 내가 가장 친숙한 주제들을 논의해 볼 것이다. 나는 대수, 정수론, 논리학 등등에 관련된 문제들에 대해서는 말할 능력이 없다. 나는 기하학과 해석학에 관련된 발전에 대해 얘기해 보겠다.

순수 수학 내에서, 비선형 헤석학은 위상 수학, 기하학, 정수론, 군론 그리고 연산자 대수학과 상호 작용한다. 다른 한편으로, 비선형 해석학과 기하학은 입자 물리학, 일반 상대성이론, 양자 화학의 inverse problems, 생물학의 모델링, 날씨 예측, 정보 이론, computer graphics 그리고 로봇학 등의 다양한 분야에서 기본적인 도구가 되고 있다.

앞으로, 나는 현재의 발전 상태와 미래에 대한 개인적인 예상을 토론해 보겠다. 우리의 관찰과 미래 예상은 분명히 개인적인 취향에 의존한다. 비록 수학이 예술이기도 하고 과학이기도 하지만, 우리 문제의 해결과 선택은 역사적 과정의 발달에 의해 상당히 제약된다. 수학자들이 그것들의 응용 가능성에 개의치 않고 문제를 창조한다는 것은 사실이다 ; 동기는 보통 어떤 알려진 현상을 이해하려는 시도에서 나온다. 그러한 현상은 자연 또는 어떤 다른

* 이 글은 1991년 6월 Instiut d'Estudis Catalans, Barcelona, Spain에 있었던 강연을 번역 한 것이다.

수학자의 연구물에서 나온다. 정리는 그것이 우아하게 설명될 수 있든지 또는 물리학과 공학 포함한 다른 분야에서 나온 어떤 자연 현상을 설명하는 데 적용할 수 있으면 중요한 것이라고 종종 판단되고 있다. 나는 따라서 그러한 기준을 따르겠다.

무한 차원 다양체 상의 해석학

20세기 수학의 발전에 있어서, 다변수 함수 또는 고차원 다양체는 연구의 중심 주제였다. 이 주제들에 대한 연구는 많은 주제들의 많은 분야의 통일을 요청해 왔다. 점차로, 자연적 무한 차원 다양체들이 있다는 것이 인식되어지고 있다. 고전적이고 중요한 한 예는 Hamilton 역학과 Riemann 기하학에서 주기적 해를 발견하는 문제에 의해서 주어진다. 그러한 이론은 Poincare Birkoff, Morse 다른 사람에게로 기원을 찾을 수 있다. compact 다양체 상에서 닫힌 측지선을 발견할 때 그 이론은 가장 성공적이다. 무한차원 다양체 위에서 길이 함수의 임계점들을 연구하므로써, Morse, Bott, Klingenberg, Gromoll-Meyer, Sullivan 그리고 다른 사람들은 대부분이 콤팩트 단순 연결 다양체들이 무수히 많은 닫힌 측지선을 허용한다는 것을 증명할 수 있었다. 자유 루프 공간의 호모토피 형이 깊이 관련되어 있다. 동변적 Morse 이론과 degenerate 임계점에 대한 Morse 이론이 발전되었다.

지난 15년간에, 산길 정리(the mountain pass lemma)는- 이것은 임계점 이론의 한 변형으로 간주될 수 있다.- Rabinowitz, Nirenberg 등등에 의해서 Hamilton 역학의 닫힌 궤적, 반선형 타원 방정식의 존재 정리, 쌍곡 방정식의 주기 해의 존재 등을 연구하는 데 성공적으로 적용되었다.

Hamilton 역학에 대해 같은 질문을 연구할 때, sympletic 기하학에 대한 임계점 이론이 자연스럽게 도입되었다. 함수들의 임계점과 관련해서 sympletic 사상에 대한 고정점의 가능한 개수에 대한 Arnold의 아름다운 예상이 있었다.

Conley와 Zehnder는 sympletic 다양체에 대한 임계점이론을 연구하는 이름다운 정리를 발전시켰다. Floer는 넓은 범위의 sympletic 다양체에 대한 Arnold 예상을 그 이론을 적용시켜서 증명했다. Floer는 또한 밀접한 관련이 있는 Lagrange 부분 다양체의 교차 이론(intersection theory)을 적용해서 Floer homology 를 만들었다. Morse 이론의 해석적 해석에 대한 Witten의 아이디어는 또한 Floer에 의해 쓰였다.

60년대에, Palais와 Smale는 Morse 이론이 무한 차원 다양체 위에서 성립할 적당한 조건을 정식화했다. 불행히도, 많은 중요한 응용들에서, 완전한 Morse 이론이 성립한다고, 루프 공간의 경우를 제외하고서는, 기대하지 않는다. 그러나 부분적인 Morse 이론이 많은 구체적인 상황에서 성립하고- 그것에는 종종 새로운 아이디어들이 개입된다. Morse-Tomkins와 Courant은 Mrose 이론의 특정부분이 최소면에 대해 적용된다는 것을 일찌기 알고 있었다. Morrey와 Sacks-Uhlenbeck의 심원한 성취는 분명히 이 부분적 Morse 이론에 대해 잘 이해할 수 있게 해준다.

비슷한 현상이 4차원 gauge 이론에 대한 Taubes와 Uhlenbeck의 나중의 중요한 연구와 sympletic 기하학에 있어서 의사 해석 곡선에 대한 Gromov의 연구에서도 나타난다. 이러한 이론들을 기본적으로 어떻게 "잃어버린(missing)" 임계점들이 사라지는가에 대해 말해준다. 이러한 종류의 현상을 파악하기 위해서 Palais-Smale 조건과 유사한 조건을 발전시킨다면 멋진 일이 될 것이다. 희망 사항으로 임계점 공간이 "compact화" 되고 이상적 임계점들의 역할이 계산될 수 있는 일반화된 Morse 이론을 가졌으면 한다. 미래에는, 특정의 무한차원 다양체들이 그 자체로서 연구될 것 같이 보인다. 이것은 그렇게 놀랄 일은 아닐 것이다. 왜냐하면 무한히 많은 상호작용 하는 입자를 가진 체계는 분명히 그 자체만으로 흥미롭기 때문이다. 사실상, 지난 10년동안에 이론물리학자들은 유한차원 다양체에 성립하는 많은 정리들이 또한 무한차원 다양체에 대해서도 사실이 되어야 된다고 주장해 왔다. 이러한 몇몇의 형식적 유비는 유한차원 다양체에 대해서도 시사하는 바가 있다. 이러한 시사점들이 많은 것이 사실상 참이고 간접적으로 증명될 수 있다는 것은 진정 놀랍다. 유명한 예로는 Casson 불변체를 정의하는 데 있어서의 Taubes의 연구 결과와 타원 genera의 고정성(rigidity)에 대한 Witten 예상의 증명이다. 명백히, 해석학과 기하학의 어떤 부분들은 무한차원 다양체로 엄밀하게 일반화될 수 있다.

루프 공간상의 Dirac 연산자의 spectrum 이론이 이해될 수 있는가? 이러한 많은 문제들이 새로운 아이디어들을 필요로 한다는 것은 명확하다. 이것은 유한 차원 다양체에 대한 많은 새로운 흥미 있는 질문들을 낳는다. 위상 양자장 이론, 행렬 모델과 conformal 장 이론의 많은 양상들 때문에 3차원, 4차원 다양체에 대해 새로운 불변체를 도입하고, 모듈 공간의 Chern number에 대한 항등식에 대한 예상을 하고, 대수 기하에 새로운 질문들을 하게 되었다. Donaldson이 고전적 방식으로 그의 불변체를 도입한 후에, Witten은 그것들을 위상 양자장 이론의 관점에서 해석할 수 있었다. 장 이론에 기초한 이러한 해석은 눈부셨다. 그러나, 그것들은 고전적 의미에서의 증명이 되지는 못한다. 아마도 언젠가는 오래된 고전적 문제들마저도 이러한 무한 차원 이론들을 적용하므써 엄밀히 해결될 수 있을 것이다.

과거 20년간에, 이론 물리 학자들은, 기본 힘들을 통일하려는 그들의 시도에서 초기하학과 초대칭을 포함하는 많은 중요한 개념들을 도입해 왔다. Virasoro 대수, Kac-Moody 대수 그리고 양자군 등과 같은 여러 개의 무한 차원 대수 또는 Lie군이 도입되었다. 이러한 무한차원 대칭은 우리가 무한차원 대상을 다루고 있기 때문에 필요하다. 이러한 대수들의 표현론에 의해 비선형 미분방정식과 기하학에 광범위하고 심오한 결과(consequences)들이 나타난다. 그것들은 유체역학과 통계역학에서 여러 완전적분 가능 체계를 이해하는 데 근본적인 역할을 담당하고 있다. 초기하학과 초대칭 개념은 고전 기하학의 관점에서는 여전히 신비스럽다. 그러나 그것들은 많은 아름다운 발전을 낳게 했다.

예를 들면, 그것들은 Atiyah-Singer 지수 정리를 새롭게 증명할 수 있게 한다. 그것들은 또한 trivial cannonical bundle을 갖는 compact대수적 다양체의 풍부한 이론을 가능케 한다. conformal 장 이론에 의해서 제공된 대칭들 때문에 이러한 다양체들의 모듈 공간에서 전혀 기대하지 않았던 "거울 대칭" 이 생겨났다. 특히 그것들로써 3배수 quintics에 대한 유리 곡

선의 수를 세는 공식을 예상하게 되었다. 그 결과는 매우 활발한 연구의 일부이다. 현대 이론물리학은 기하학의 많은 활동 영역에서 대단한 지도력을 발휘해 왔다. 그러한 이론이 수학에서 심원한 직관을 제공하고, 그럼에도 그러한 직관들이 직접적인 엄밀한 증명으로 좀처럼 이끌지 않는다는 것은 신비스럽다. 아마도 무한 차원 다양체에 대한 더 깊은 이해가 이런 미스테리를 푸는데 도움이 될 것이다.

수학적으로 흥미 있는 양자장 이론의 대부분은 다양체의 위상을 고정시킨다. 예를 들면, 고정된vector 속에서의 connection 공간상의 Chern-Simons의 Lagrange 함수를 연구하는데 있어서, Donaldson다항식이 발견되었다. 그러나, 양자 중력에서는 다양체의 위상도 변하도록 해야 한다. 그럼에도 위상이 변하는 것을 허용하는 양자 중력의 이러한 양상들에서 의미 있는 수학적으로 흥미 있는 질문들이 나오질 않았다. 미래에는, 통일장 이론이 존재한다면, 위상이 변하는 것을 허용하는, 수학적으로 흥미 있는 기하학과 해석학 이론을 보게 될 것이다.

강한 상호작용과 중력의 이론에서는 비섭동 효과가 중요하다고 일반적으로 의견이 일치하고 있다. 다른 한편, 이러한 효과들은 측정하기가 힘들다. 광범위한 수치 계산이 필요하다. 차원이 무한대로 가기 때문에 정공적인 수치 계산은 가능하지 않다. 이론을 실험과 일치시키려는 욕구 때문에 이론가들은 계산에 더 주의를 해야겠다. 다른 한편, 좋은 이론이 없이는 수치 계산이 신빙성이 있는지를 분간하기가 힘들다. 희망하기를 물리적 현상을 믿을 수 있는 정도는 예측하는 데 쓰일 수 있을 정도의 무한 자유도 체계에 대한 수치 계산이 발전되었으면 한다. 무한 차원 다양체 위의 해석학이 그러한 발전에 결정적이 될 것이다.

특이점

특이점의 개념은 실제적으로 모든 분야에서 발생한다. 보통의 경우, 구조가 매끄럽지 않든지 또는 "nongeneric" 인 경우에 특이점이 존재한다. 특이점이라고 반드시 나쁜 것은 아니다. 사실상, 그것들은 대역적 구조에 대한 가치 있는 정보를 제공한다. 최선의 예는 Morse 이론이다. 그러나, 기하학의 완전한 특이점 이론은 아직도 요원하다. 비특이공간에 구현된(imbedded) 기하적 대상들을 중심으로 대부분의 성과가 이루어지고 있다. 유클리드 공간의 다항식들의 집합에 의해 정의된 폐집합은 자연스럽게 근방이 멋지게 매개변수화 될 수 없는 그러한 점들에서 특이점을 나타내 보인다. Hironaka의 근본적인 정리는 이러한 경우에 특이점이 항상 해소될 수 있다는 것을 말해 준다. 다른 말로, 특이점을 적당한 저차원의 부분다양체(subvarieties)로 추상적으로 대체하므로 써 그 닫힌 집합은 비특이적이 된다. 이 정리는 분명히 근본적이고 여러 가지의 응용을 가진다. 그러나 그것의 미분기하학과의 관계는 지금까지는 대단한 성과가 없었는데 부분적으로는 Hironaka에 의해 만들어진 저차원 부분다양체가 그렇게 "표준적"이지는 않기 때문이다.

오랫동안, 특히 대수적 다양체를 묘사할 좋은 cohomology이론이나 homotopy이론이 없었

다. 10년전에, Goresky와 Macpherson는 그들의 intersection cohomology의 개념을 도입했다. intersection cohomology 가 특이 공간에 대한 적당한 cohomology 이론이라는 많은 증거가 있다. Looijenga와 Saper-Stern에 의한 Zucker 예상의 해결은 분명히 중요한 한 실례이다. Saper는 또한 특이집합의 여집합 위에 완비 Kähler metrics을 만들어서 L^2-cohomology가 intersection cohomology와 같게끔 하였다. Stern은 국소 Hermite 대칭 공간에서 L^2-지수 정리를 발전시켰다. 광범위한 특이공간에 대해서 Tian 과 저자는 표준 완비 Kähler-Einstein metric을 만들었다. 희망컨대, 이 metric 들은 좋은 성질을 가져서 L^2-cohomology 와 L^2-지수에 대해 마치 그 공간들이 국소대칭공간 인 듯 행동하지 않을까 한다.

완비 Kähler-metric들 이외에도 특이점들의 기하학적 성질을 반영하는 Kähler-metric들이 있다. 이것들은 복소 사영 공간에서 유도된 metric들이다. 이 metric들에 대해서 심오한 성질들이 그렇게 많이 알려지지 않고 있다. 그것들이 상당히 자연스럽기 때문에 그 metric들의 spectrum 성질을 이해하는데 더 연구를 해야 될 것이다. 예를 들면 이 metric들의 자연 연산자들에 대한 L^2-지수는 무엇인가?

대수 기하에서 다양한 구조를 가진 모듈 공간을 고려할 때 자연스럽게 특이 공간이 나오고 이것들은 Weil-Peterson metric 이라고 부르는 자연스런 metric을 보통은 갖고 있다. 이 metric의 기하는 매우 흥미롭고 이 metric의 특이점들은 구조의 degeneration 성질을 반영할 것이다.

다른 종류의 특이점들이 변분법에서 나타난다. 편미분 방정식에서 존재를 증명하기 위해서 우리는 함수류를 확대하고 그래서 compactness 정리가 사용될 수 있게 한다. 주임무는 이 일반화된 해들의 특이 집합이 아예 없거나 작다는 것을 증명하는 것이다. 매우 중요한 예로는 최소 부분 다양체의 연구이다.

최소 부분다양체(subvarieties)의 특이점 이론은 매우 심오하고 오랜 역사를 갖고 있다. 부분 다양체가 2차원일 때는 우리는 특이점을 잘 이해하고 있다. 더 해야 할 일이 남아 있긴 하지만, 곡면의 면적을 최소화시킬 때 위상이 어떻게 변하는 지에 대해 우리는 대강은 알고 있다. 비안정적인 최소 곡면과 연관한 훨씬 더 깊은 의문들이 남아 있다.

고차원 부분 다양체에 대해서, 문제는 훨씬 더 복잡하다. 특이점 집합들에 대해 말할 수 있는 최선의 것은 그것들이 특정의 여차원(codimension)을 가진 닫힌 집합이라는 것이다. Almgren은 그 집합이 측도가 0이고 닫혀 있다는(지금까지는) 최선의 정리를 증명했다. 특이점 집합의 구조를 연구하는 것은 중요하고 어려운 문제이다. 특이점 집합이 삼각 분할 될 수 있을까? 매우 비슷한 문제가 다양체들 사이에서의 조화 사상들에 대해 일어난다. 조화 사상이 특이점들에 대한 최선의 업적은 Schoen-Uhlenbeck에 의한 것이다. 그러나, 그 결과는 존재 정리를 증명할 수 있을 정도로 강력하지는 못하다. 이것은 우리가 그 사상의 에너지를 최소화할 때 위상이 어떻게 변하는지 알지 못하기 때문에 발생한다.

변분법에서 임계점들에 대한 존재 정리를 증명하는데 있어서, 우리는 자주 경도류(gradient flow)를 연구한다. 결과적으로 우리는 종종 포물방정식을 연구한다. 비록 우리가

단지 타원 방정식에만 관심이 있다 하더라도. 만약 Morse이론의 어떤 부분이 성립한다면, 포물방정식은 자주 더 많은 정보를 준다. 그러나, 특이점들은 비선형 포물방정식에 대해 더 빈번하게 나타난다. 사실상, 특이점들에 봉착하게 되면 특이점들은 진화 방정식(evolution equation)의 의미에 대한 심각한 의문을 제기한다.

scalar 포물방정식들은 더 잘 이해되고 있다. 그러나 벡터 값을 갖는 진화 방정식에 대해서는, 상황은 훨씬 더 복잡하다. 만일 비선형이 최저계항에만 나타나면, 그것에 대해서는 방대한 저작들이 있고 해에 대해서 더 많은 것을 이야기할 수 있다. 그러나, 자연과 기하학에 나타나는 대부분의 진화방정식들은 고계 비선형 항을 포함한다. 이 진화방정식들의 많은 것들이 포물적이고 쌍곡선적 성질을 나타낸다. 이론적으로, 근본적인 의문은 초기 데이터가 비특이적이고 점근적으로 정연하게 행동할 때 과연 특이점이 발달할 수 있는가 하는 것이다. 수학의 유명한 문제 중의 하나는 Navier-Stokes 방정식에서 특이점이 발견될 수 있는가 하는 것이다. Euler 방정식에 대해서 그 질문에 대한 답은 아직 알려지지 않고 있다. 비록 대부분의 사람이 특이점이 형성된다고 믿고 있지만.

특이점을 발달시키는 진화 방정식들 중에서, 공간 차원이 1인 가스 역학에 대한 방정식들이 아마도 가장 잘 이해되고 있을 것이다. Glimm, Lax, Liu, Diperna와 다른 사람들이 심오한 공헌을 했다. 그러나 공간 차원이 1 이상일 때는, 실제적으로 이론적 결과가 알려지지 않고 있다.

지난 10년간에, 비선형 Schrödinger 방정식이 광범위하게 연구되어 왔다. Papanicov와 다른 사람들이 이 방정식의 특이점에 대한 이론적이고 수치적인 연구를 수행해 왔다. 그것은 다른 비선형 진화 방정식에 대한 유용한 모델이 될 것이다.

기하학에는 많은 비선형 쌍곡방정식들이 있다. 그것들 대부분은 연구되고 있지 않다. 공간 차원이 1인 경우조차 문제가 매우 어려워지는 경향이 있는데 이는 특성 곡선들이 이해하기가 힘든 곡선들이기 때문이다. 이것은 벌써 음곡률 곡면을 R^3에 등거리 구현하는 문제에 나타난다. 곡률이 sign을 바꿀 때, 그 방정식은 혼합형이 된다. 특이점들의 구조는 아주 복잡하게 되어서 무엇이 발생할까 에 대해서 짐작 조차할 수 없게 된다.

기하학에서 가장 잘 알려진 진화 방정식은 mean curvature에 의해 규정되는 곡면의 진화의 연구이다. 공간차원이 1이거나, 또는 초기 데이터가 R^n 에서의 볼록 곡면이면, Grayson과 Huisken 등이 보였듯이, 특이점이 발달하지 않는다. 그러나, 다른 경우에는, 특이점이 물론 발전한다. 그것이 어떻게 발전하는가를 아는 것은 흥미있겠다. 현재로는, 이 진화방정식의 잘 받아들여지고 있는일반화된 해 이론은 없다. Osher와 Setrian은 화염 이동의 관점에서 수치적으로 이 방정식을 연구해 왔다. Evans와 Spruck은 고차원 유클리드 공간의 어떤 함수의 등위면으로써 그 곡면을 대치해서 그 방정식을 이론적으로 연구했다. 특이점이 발달한 후에 해의 정의가 우리가 모델링하는 물리적 또는 기하적문제에 의존한다는 것이 가능하다. 어쨌든, 이것은 연구되어야 할 주요한 문제이다. 다른 중요한 진화방정식이 Hamilton에 의해 도입되었다. 이것은 Riemann metric을 변형시키는데 대한 최초의 포물방정식인데, 그것은 지난 10년간 아주 성공적이었다. 이 방정식에 대한 활발한 연구가 있을 것이다. 주요 의

문은 어떻게 특이점이 발달하는가 하는 것이다. 그것은 명백히 다양체의 위상적 변화에 연관되어 있다. 위상 수학에서의 문제를 해결하는 잠재적 응용가능성을 차치하고서라도, 그것은 compact 다양체 위의 표준 metric을 만드는 문제를 더 잘 이해할 수 있게 해 줄 것이다.

매우 미묘한 특이점 문제가 일반 상대성 이론에서 나타난다. 공간과 시간이 위상을 변화시킬 수 있기 때문에 심각한 문제가 발생한다. 확연한(apparent) 특이점은 Kruskal이 Schwarzschild 해의 경우에서 보듯이 좌표계를 바꾸므로써 "치유"될 수 있다. 시간과 공간이 유한한 경우 특이점을 조사하는 문제 이외에도, 무한대의 특이점을 이해하는 것은, 그것이 시공의 역학을 이해하게 하기 때문에, 또한 중요하다. 불행히도, 운동(dynamics)을 나타내 보이는 Einstein 방정식의 양해(explicit solution)가 알려져 있지 않다. 이것은 중력 방사에 대해 부분적이라도 무엇이 사실인지를 확인하기 어렵게 만든다. 다른 한편, 우주 검열이라고 불리는 유명한 Penrose 예상이 있다. 그것은 generic 시공의 특이점이 발가벗을 수 없다고 말한다. 그러한 예상은 철학적으로 그리고 수학적으로 중요하다. 그것은 매우 심오하고 또한 전혀 풀리지 않고 있다. 과거에 Lorentz metric을 해석적으로 Riemann metric으로 확장(continue) 하려는 시도가 있었다. 특이점을 갖는 고전적인 많은 해들에 대해, 그것과 연관한 Riemann metric들이 비특이적이라는 것은 기적이다. 아마도 이것이 일반 상대성에서 특이점을 이해하는 좋은 방법일 것이다.

현재로선, 고전적 상대론에서 가장 중요한 의문은 중력 방사를 갖는 시공의 구체적인 예를 드는 것이다. 유한과 무한 거리에서의 특이점들의 구조도 똑같이 중요하다. 끈 이론과 양립 가능한 10차원 비특이 진공해를 발견하는 것도 흥미로울 것이다.

마지막으로, R^2 상에서 비선형 사상의 반복에 의해 만들어진 특이점들의 아름다운 그림을 이야기해야 겠다. 이 주제는 많은 뛰어난 수학자들이 연구하고 있다. 이 그림들이 자연에서 일어나는 특이점들을 밝혀 주리라고 희망해 본다. 보기에는 그것들이 성공적으로 양식 인식(pattern recognition)에 적용되고 있다. 멋진 그림을 그릴 줄 아는 능력은 기하학에서 분명히 중요하다. 그러나, 이 그림들에 대해 부분적으로 이해만을 하고 있을 뿐이다. 훨씬 더 조직적인 연구가 아직도 필요하다.

기하학 구조의 분류

고정된 매끄러운 다양체 위에서 기하적 구조들을 만들고 분류하는 것은 언제나 기하학에서 중심 문제 였다. 대부분의 경우에, 좌표 변환이 어떤 의사군이나 Lie군에 의해서 주어지는 좌표 차트들에 의해서 다양체를 덮을 수 있을 때가 언제나 관심이 있다. 가장 친숙한 의사군으로는 해석적 변환들의 의사군이 있고, 두 개의 가장 인기 있는 Lie군으로는 동형변환군과 사영변환군이 있다. 다른 분야에 대한 잠재적 응용 가능성 때문에, 많은 다른 의사군이나 Lie군에 대한 연구가 있다. 예를 들면, 실 대수적 다양체를 이해하는데는, 대수적 변환들의 의사군이 중요한 역할을 담당할 것이다. (대수적 변환들의 degree는 다양체의 기하적 양

(量)들을 측정하는데 필수적이 될 것이다.)

의사군이나 Lie군 구조의 존재의 즉각적인 결과의 하나는 접속(tangent bundle)의 구조군(structure group)의 어떤 부분군으로의 축소이다. 구조군이 부분군으로 축소될 수 있는가 하는 것은 의사군 구조의 존재보다 훨씬 쉬운 질문이다. 예를 들어, 다양체가 준(almost)복소 구조를 갖느냐를 확인하는 것은 어렵지 않다. 그러나 주어진 다양체 위에서의 복소 구조를 발견하는 것은 훨씬 더 어렵다.

근본적인 의문점은 차원이 3이상인 대부분의 복소 다양체가 적분 가능 복소구조를 허용하느냐 안하느냐 하는 것이다. 중요한 다른 2개의 고전적 의문이 남아 있다. 복소구조가 Kähler구조를 허용하는지를 우리가 어떻게 결정할 수 있나? 모든 Kähler 다양체는 대수적 다양체로 변형될 수 있나?

Mori의 근본적인 결과 때문에 대수 기하학자들이 대수 곡면의 분류 이론을 고차원 대수 다양체로 일반화할 수 있게 되었다. 그러나, 해결 되야 할, 대수 곡면에 대한 많은 기본적인 의문들이 남아 있다. 기초적인 의문 중의 하나는 어떤 매끈한 4차원 다양체가 대수적 구조를 허용하느냐 하는 것이다. 이 다양체 위의 대수적 구조의 모듈 공간의 묘사 또한 기초적 의문 중의 하나이다. Donaldson의 아름다운 연구는 안정 속(bundle)의 모듈위상을 사용하여 위상에서의 유일성 정리를 얻었다. Donaldson의 결과가 자기 쌍대적 connection에 대한 Taubes의 근본적인 존재 정리에 의존한다는 것을 주목하자.

존재 정리는 기하학에서 아주 중요하다. 존재 정리를 증명하는 한가지 방법은 편미분방정식을 쓰거나 변분법을 쓰는 것이다. Hodge 이론은 그러한 한 예이다. 다른 접근 방법은 대수적 해석(algebraic analysis)을 사용하는 것이다. Mori의 유리 곡선의 존재 증명은 그러한 예이다. 이 접근 방식들을 결합하는 것은 아주 중요하다. 그러한 통일의 중요한 한 예로는 Hirzebruch, Grothendieck과 Atiyah-Singer에 의한 Riemann-Roch 공식의 발전을 들 수 있다.

대수적 다양체의 상당 부분에 대해, 저자는 표준적인 Kähler-Einstien metric을 만들 수 있었다. 그러면 metric으로부터 만들어진 어떠한 기하적 불변체도 대수적 구조의 불변체가 된다. metric의 스펙트럼은 재미있는 실례가 되겠다. Donaldson과 Uhlenbeck-Yau의 연구 결과에 의하면 안정 속(bundles) 위에 표준적 Hermite metric을 만들 수 있다. 이 metric들에 의해 생긴 metric 불변체들을 연구할 수도 있는데, 그것들에 의해 Hermite 대칭 영역의 상(quotients)을 특징 짓는 방법을 얻게 된다. 이 단형화 정리(uniformization theorem)들에 대한 대수적 증명을 할 수 있다면 상당히 바람직 할 것이다. 왜냐하면 그것은 대수적 다양체의 대수적 Poincare군을 더 잘 이해할 수 있게 하니까.

다양체가 그것에 의해 불변적인 부분 다양체를 갖는 그러한 의사군 구조를 갖으면, 주어진 의사군 구조를 갖는 그 다양체로부터 유도된 그 부분 다양체위의 구조들을 논할 수 있다. 이런 타입의 compact 부분 다양체들은 원래 다양체의 구조들을 이해하는데 중요하다. homology류가 이런류의 부분다양체에 의해 표현될 수 있는가를 이해하는 것은 항상 아주 바람직하다. 그것들이 어떻게 교차하는가(intersect)를 조사하고 (그 교차 수를) 세어 보는

것 또한 중요하다. 유명한 Hodge 예상은 대수적 cycles들에 의해 표현될 수 있는 homology 류들을 특징화하려는 시도이다. 당연한 표준 속을 갖고 있는 대수적 3겹(threefolds)공간 위의 "거울 대칭"의 가장 최근의 발전은 유리 곡선을 셀 수 있는 방법을 제공한다. 그것은 초대칭의 존재에 의존하는 데, 그것은 다시 Ricci곡률이 0인 Kähler metric의 존재에 의존한다.

주어진 다양체로부터 유도된 구조를 갖는 부분다양체들을 조사하는 데 있어, 우리는 자연스럽게 모종의 구조를 갖는 속을 조사하게 된다. 그러면 어떤 성질들을 갖는 sections들에서 cycle들이 생긴다. 근본적인 의문 중의 하나는 주어진 위상 속 위의 특정 구조의 존재 유무이다. 구조가 해석적(holomorphic)이면, Chern류가 (p,p) type이라는 것이 필요조건이다. 만일 위상 속이 이 성질을 갖는 다면, 해석적 속을 더하면, 전체 공간이 해석적 구조를 갖게 될 것이라고 기대할 수 있다. 우리는 이 명제를 일반화된 Hodge 예상이라고 간주할 수 있겠다.

구조가 noncompact Lie군을 따라 모델링되어 있으면, 그것은 다양체 위의 noncompact Lie군 action과 아주 밀접하게 연관되어 있다. 그러한 이론은 또한 그것의 holonomy군이 noncompact Lie군의 부분군인 connection을 갖는 속의 연구와 관련된다. 이 이론 둘 다 활발히 연구되고 있다,

Margulis의 유명한 연구는 대부분의 현대의 발전의 핵심을 이룬다. 그의 방법은 지난 15년간에 음곡률을 갖는 다양체위의 이산군 action이론에 있어서 기본도구였다.

3차원 다양체에 대한 Thurston의 단형화(uniformization)는 다양체위의 SO(n,1) 구조의 존재에 대한 정리이다. 이것은 주어진 위상 데이터를 갖는 G -구조에 대한 최선의 존재 정리이다. 가장을 약화시킨다든지 고차원으로 일반화하는 것이 매우 중요하다. Thurston의 접근방식은 위상적 데이터를 갖는 존재 정리의 미래 발전에 있어 안내서가 될 것이다.

수년 전에, 저자는 조화 사상을 써서 이산군 action의 고정성(rigidity)과 다양체의 복소구조를 연구하기 시작했다. 이런 방식의 연구는 Siu, Sanpson, Eells, Corlette, Gromov, Jost, Schoen, Carlson-Toledo 등에 의해 성공적으로 수행되었다. 다른 방식의 연구는 Yang-Mills connection의 연구로부터 나온다. Donaldson, Uhlenbeck-Yau와 Simpson이 이 방식에 공헌을 했다. 이산군 이론에 더 많은 해석적 접근 방식을 썼으면 한다.

마지막으로, 기하학에서 가장 매혹적인 구조의 하나로는 Einstein metric의 존재라는 것을 이야기해야겠다. homogeneous Einstein metrics나 Kähler-Einstein metric들의 특별한 류들의 구성 이외에는 다른 일반적인 접근 방법이 없다. 이것은 매우 불만족스런 상황인데, 왜냐하면 그 문제에 대해 어떻게 접근해야 할지 짐작조차도 할 수 없기 때문이다. 이것은 Einstein metric의, 특히 스칼라 곡률이 음이 될 때, 기하학적 성질에 대해서 거의 모르기 때문이다.

두 상수 사이에 제한된 곡률을 가지는 metric들의 공간에 대해 방대한 저작들이 있다. 이것들이 종국적으로 존재 정리에 대한 통찰로 이끌기를 바란다.

고전적 미분 기하

R^3 상의 이름다운 곡면 주제가 지난 20년간 열심히 연구되지 않은 것은 슬픈 일이다. Alexandrov, Pogorelov와 Effimov가 이끄는 러시아 기하 학자들은 기하학의 고전적 의문에 많은 공헌을 했다. 계산 기하학과 기계 공학의 집중적인 발전은 명백히 이 고전적 분야에 훨씬 더 많은 활동을 자극할 것이다.

R3 속에서 곡면을 구부리는 것은 매력적이지만 어려운 많은 질문들을 제기한다. 최고의 난제는 닫힌 곡면의 등거리적 변형 가능성의 문제이다. Donnelly는 경계가 없는 구분적 선형 예제를 만들었다. 그러나, 매끄러운 예제는 전혀 발견되지 않고 있다.

곡면의 등거리 구현 문제는 곡면의 곡률이 음이거나 sign을 바꿀 때 난관에 봉착하게 된다. 이것은 부분적으로는 비선형 쌍곡방정식을 우리가 이해하지 못하기 때문이다. 등거리 구현의 경우에는 점근곡선의 행동에 대해 우리가 모르기 때문이다. 변분법에 의해 얻어진 곡면들에 대해서는 많은 유익한 연구가 행해졌다. 최소 곡면, capillary곡면과 상수 mean curvature를 가진 곡면에 대해 이 말이 특히 해당된다. 후자에 대해서는, Wente가 유명한 Hopf 예상을 해결했다. 이 방향으로의 더 많은 발전이 있을 것이다.

고차원 부분 다양체는 훨씬 더 이해하기 힘들다. 유명한 Nash 등거리 구현 정리에도 불구하고, 추상적 다양체를 "nice"한 방법으로 어떻게 등거리적으로 구현하는지에 대해 아직도 모르고 있다. 이 방향으로 많은 연구가 필요하다.

추상적으로 정의된 구조를 어떤 고전적으로 정의된 간단한 공간으로 등거리 구현하므로써 그 구조를 표현하려는 강력한 욕구가 항상 있어 왔다. Nash embedding theorem의 경우에, 그것은 아름다울 뿐만 아니라 또한 실제적인 정리이다. 예를 들면, 다양체 사이에서 약미분 가능한 조화 사상을 정의하기 위해서, Morrey는 그 상(image) 다양체를 Hilbert 공간으로 등거리 구현했는데, 그 당시에는 Nash embedding theorem이 없었기 때문이다. (Morrey의 아이디어는 독자적으로도 흥미로운데 그것은 나중에 Gromov에 의해 기하적 불변체들을 정의하는데 쓰였다.) Nash 정리에서 부족한 것은 내재적 양들과 관련해서 외적 양들을 통제할 수 없다는 것이다. "고정성(rigidity)" 또한 전혀 이해되지 않고 있다.

Kodaira의 구현 정리가 CP^n 으로의 구현을 보장하는 대수 기하에서도 비슷한 상황이 발생한다. 그러나, 많은 간단한 내재적으로(intrinsically) 정의된 대수적 다양체들에 대해서조차 정의 방정식들 (difining equation)이 잘 이해되지 않고 있다. 복소 다양체나 Kähler 다양체의 경우에는 그것들을 구현시킬 후보조차 갖고 있지 못하다. 그것들을 어떻게 찾을 수 있을까?