Historia Mathematica Vol. 10. No. 1, (1997), 39-45

수학의 명작: 원전을 이용한 교육*

New Mexico State University **Reinhard C. Laubenbacher, David Pengelly**
광운대학교 이과대학 수학과 허 민

우리 대학교[뉴멕시코 주립 대학교]에서 개설하는 상급 학년의 우등생을 위한 과정인 '위대한 정리: 수학의 예술'(Great Theorems: The Art of Mathematics)에서는 수학을 예술로 간주하고, 고대부터 현대까지 수학의 명작들을 선택해서 자세히 검토한다. 인문 과학에서의 일상적인 학습 방법에 따라, 이를테면 시카고 대학교의 '그레이트 북스'(Great Books) 과정 또는 세인트 존(St. John) 대학의 '칼리지'(College) 과정과 같이, 이 과정에서는 중개자 또는 해석자로서 현대 작가 또는 교사의 도움 없이 학생 스스로 원전을 읽는다. 중개자가 전혀 없는 학습 경험을 통해, 새로운 사실을 발견한 사람의 설명을 직접 읽어봄으로써 특별한 즐거움을 얻는다. 원전은 또한 새로운 수학의 발견에서 문화적이고 수학적인 환경의 역할에 대한 이해를 높여 줄 수 있다. 원전의 적절한 선택과 학습 순서를 통해 학생들은 개념의 명확성과 정밀성 및 정교성, 기법, 표기 등에서 즉각적이고 오래 지속되는 진전을 얻을 수 있고, 어떤 선구자가 주요한 돌파구를 찾아서 새로운 시대를 열기 전까지 고정 관념 또는 과거의 인식 체계에 의해 방해를 받은 발전을 이해하게 된다. 다른 어떠한 방법도 수학적 엄밀성과 추상화의 진화 과정을 이보다 더 명확하게 보여주지 못한다.

이 과정의 최종적인 결과는 전통적인 과정에서 학생들이 얻는 것과는 근본적으로 다른 수학에 대한 이해이다. 이제, 수학은 인간의 관여 없이 주어진 공리와 정리의 무미건조하고 화석화된 체계가 아니라 인간의 계속된 노력이며, 정리는 수학 세계의 신비를 풀기 위해 고심한 천재들의 결과라는 사실을 이해하게 된다. 예를 들면, 추상 군론을 도입한 케일리의 논문(아래를 보라)을 읽은 학생은 동기 부여가 전혀 없는 공리적 전개를 접할 때 훨씬 덜 당혹스러워 한다. 게다가, 케일리는 대수적 방정식론과의 관련성을 설명했는데, 이것이 없었다면 학생들은 이에 대해 결코 알 수 없었을 것이다. 이 방법의 또 다른 양상은 신속한 가치 판

* 이것은 VITA MATHEMATICA(Ronald Calinger (ed.), Mathemathical Assocition of Ameica, Washington, 1996)에 실린 논문 "Mathematical Masterpiece: Teaching with Original Sources"의 번역이다.

단이 이루어질 필요가 있다는 점이다. 좋은 수학과 나쁜 수학이 있고 우아한 증명과 서투른 증명이 있으며, 물론 비판적으로 검토해야 할 오류와 터무니없는 주장이 많이 존재한다. 새로운 수학이 오늘날에도 창조되고 있다는 자연스러운 인식이 나중에 이루어지는데, 이것은 많은 학생을 매우 놀라게 한다.

이런 목적을 성취하기 위해서 다음과 같은 기준에 부합되는 수학의 명작을 선택했다. 첫째, 새로운 수학이 창조자의 용어와 표기법을 통해 포착되었다는 의미에서 독창적인 문헌이어야 한다. 그래서 원전 또는 영어 번역본을 수집했다. 영어 번역본을 입수할 수 없을 경우에, 우리와 학생들은 원래 프랑스어, 독일어, 라틴어로 쓰여진 논문을 읽었다. 고대 문헌의 경우에는 종종 복원된 원전에 의존해야만 했으며 복원 과정을 면밀히 조사했다. 선택된 문헌들은 또한 고대부터 20세기까지 수학의 폭넓은 주제들을 망라했으며, 남자와 여자 수학자 및 서양과 동양 수학자를 포함했다. 마지막으로, 이렇게 선택된 문헌들은 학생들의 소양을 강화시켜주는 수학에 대한 폭넓은 관점을 제공했으며, 일부의 경우에는 시대에 따라 발달된 수학적 사고의 흐름을 밝혀주었다. 현재 다음과 같은 문헌이 명작으로 선택되었다.

아르키메데스: 에우독소스가 개척한 넓이와 부피를 계산하는 그리스 방법인 실진법은 기원전 3세기 아르키메데스의 연구에서 절정에 도달했다. 이 방법의 멋진 예시는 나선 내부의 넓이에 대한 아르키메데스의 계산이다[10]. 이 계산에서 중요한 요소는 어떤 등차수열에서 각 항의 제곱의 합이다. 그리스 수학 전체에서와 마찬가지로, 이런 계산도 기하학의 언어로 표현되었다. 정적분을 향한 또 다른 발전은 르네상스 시대까지 이루어지지 않았다.

오마르 카얌: 대수 방정식을 푸는 알고리즘에 대한 연구는 수학에서 오랫동안 중요한 과제였다. 바빌로니아와 그리스 수학자들이 이차 방정식을 체계적으로 푼 뒤에, 이 과제는 중세 아랍 세계에서 계속 연구되었다. 아랍 수학자들의 연구는 인도의 수치적 대수학과 그리스의 기하적 대수학 사이의 간격을 좁히기 시작했다. 11세기 말 또는 12세기 초 오마르 카얌(Omar Khayyam)의 **대수학**(Algebra)은 특히 주목할 만하다. 여기에서 그는 삼차 방정식의 풀이에 대한 최초의 체계적인 연구에 착수했다. "대수학을 미지수를 찾는 교묘한 수법이라고 생각하는 사람은 이것을 경솔하게 생각했다. 대수학과 기하학이 겉보기에 다르다는 사실에 관심을 두어서는 안 된다. 대수학은 증명된 기하학적 사실이다." 대수학의 이런 관점에 대한 일반적인 논의에 덧붙여, 삼차 방정식 $x^3+cx=d$에 대한 그의 처리 방법은 읽을 만한 가치가 있는 뛰어난 글이다. 이 방정식은 포물선과 원의 교점을 통해 기하학적으로 풀렸다[20].

카르다노: 대수 방정식의 풀이를 향한 다음의 중요한 발전은 16세기에 이르러서야 카르다노(Girolamo Cardano)와 당시 유럽의 학자들에 의해 이루어졌다. 당시 고대 그리스 수학이 (종종 이슬람 문헌들을 통해) 재발견되었으며, 옛 문제들을 새로운 방법과 기호를 사용해서 공략했다. 삼차와 사차 방정식에 대한 일반적인 대수적 해법은 근본적으로 카르다노의 **위대한 계산법**(Ars Magna, 1545)에 내재되어 있으며, 이 책에서 카얌의 방정식 $x^3 + cx = d$은 거의 대수적으로 취급되었다[16]. 두 개의 문헌을 비교하는 것은 교육적이다. 오차와 고차 방정식의 일반적인 해법에 관한 연구에서 마지막 장은 아벨(Niels Abel)과 갈루아(Évariste Galois)에 의해 나중에 완성되었다.

토리첼리: 17세기 초 그리스의 실진법은 라이프니츠의 무한소와 뉴턴의 유량의 선구자인 카발리에리의 불가분량의 방법으로 변환되었다. 이 시기에 발견된 가장 놀라운 결과 중 하나는 무한한 공간 도형이 유한한 부피를 가질 수 있다는 사실이었다. 갈릴레오의 제자인 토리첼리(Evangelista Torricelli)는 불가분량의 방법을 사용해서 쌍곡선의 일부를 축을 중심으로 회전시켜 얻은 공간 도형이 유한한 부피를 가진다는 사실을 입증했다 [19].

파스칼: $\sum_{i=1} i^m$과 같이 연속된 정수의 거듭제곱의 합에 관한 닫힌 공식은 이미 그리스 수학자들의 흥미를 끌었었다. 예를 들면, 아르키메데스는 이런 공식을 이용해서 위에서 지적한 나선의 경우와 같은 넓이를 계산했다. 수세기에 걸친 많은 노력 끝에, 페르마는 17세기 초 일반적인 규칙의 존재를 최초로 인식했으며, 이것을 '산술 전체에서 가장 멋진 문제'라고 불렀다[2]. 그 뒤 곧 파스칼(Blaise Pascal)은 **거듭제곱수의 합**(Potestatum Numericarum Summa)에서 등차 수열에서 각 항의 거듭제곱의 합에 대한 점화 공식을 제시했다[15]. 파스칼이 지적한 대로, 이런 공식들은 당시 적분법의 계속된 발달과 관련이 있었다.

야곱 베르누이: 17세기 말과 18세기 초 야곱 베르누이(Jacques Bernoulli)는 파스칼의 연구 결과를 개선해서(베르누이는 분명히 파스칼의 연구를 모르고 있었는데), 거듭제곱수의 합을 표현하는 다항식에 대한 최초의 일반적인 분석을 시행했다. 그는 **추측술**(Ars Conjectandi, 1713)에서 계수에 나타나는 놀라운 양식에 주목했는데, 이것은 현재 베르누이 수라고 부르는 수열과 관련이 있다[18]. 오늘날 이런 베르누이 수는 해석학, 수론, 대수적 위상 수학 등과 같은 수학의 많은 분야에서 중요하다.

오일러: 18세기의 수학자들은 미적분학의 응용에 몰두했다. 이런 응용 중 많은 것은 오일러(Leonhard Euler)의 공헌인데, 그는 무한 급수와 관련된 연구의 대가였다. 그의 **역수 급수의 합**(De Summis Serierum Reciprocarum)에는 거듭제곱수의 역수의 합에 관한

다양한 결과가 포함되어 있는데, 급수 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{2m}}$에 대한 귀납적 분석이 포함되어 있다[8]. 오일러의 계산은 다음과 같은 일반적인 공식의 예들이다.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{2m}}=\frac{(-1)^{m+1}B_{2m}2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!}$$

이 공식은 베르누이 수와 관련이 있으며, 위에 인용한 베르누이의 책으로부터 직접 유도할 수 있다.

제르맹: 19세기 초 가우스의 **수론 연구**(Disquisitiones Arithmeticae, 1801)의 출판과 함께 현대 수론이 시작되었다. 페르마의 마지막 정리를 증명하려는 노력은 19세기 중반까지 정교한 기법의 발달에 공헌했다. 그런데 지수 5와 7에 대한 이 추측의 확인을 제외하면 (지수 3과 4에 대한 이 추측은 페르마와 오일러에 의해 확인되었다), 이 이전에 일반적인 풀이를 향한 유일한 진전은 제르맹(Sophie Germain)에 의해 제공되었다. 그녀는 완벽한 증명을 위한 일반적인 전략을 개발했으며, 이런 과정을 통해 자신이 증명한 정리들을 이용해서 100보다 작은 모든 지수에 대한 페르마의 마지막 정리의 경우 1을 해결했다. 제르멩은 자신의 연구 결과를 결코 발표하지 않았다. 대신에 일부만이 1825년 르장드르(A. M. Legendre)의 **정수론**(Théorie des Nombres) 제2판의 부록으로 나타났다 [11]. 르장드르는 각주에서 그녀의 공헌을 지적했다.[1]

로바체프스키: 유클리드의 평행선 공준은 매우 초기부터 논쟁거리였다[9]. 이 공준을 다른 공준들을 사용해서 증명하려는 시도는 19세기에 이것이 나머지 공준들과 독립적이고 따라서 다른 기하학이 허용된다는 사실의 발견을 유도했다. 가우스 및 볼리아이와 함께 비유클리드 기하학을 발견한 로바체프스키(Nicolai Lobachevsky)는 수학계가 자신의 생각을 받아들이도록 여러 가지 방법으로 시도했다. 그는 1840년 쌍곡 기하학의 기초를 닦은 매우 읽기 쉬운 책 **평행선 이론에 관한 기하학적 연구**(Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien)를 출판했다[1].

아이젠슈타인: 페르마의 마지막 정리와 함께 수론의 발달을 유도한 또 다른 원동력은 '이차 상호 정리'(Quadratic Reciprocity Theorem)와 고차 상호 법칙에 관한 연구였다. 오일러가 발견했으며 르장드르가 현재 그의 이름으로 불리는 기호를 사용해서 다시 서술한 이차 상호 정리는 가우스에 의해 최초로 증명되었다. 가우스는 여덟 가지 증명을 발표했는데, 가우스가 '기본 정리'(Fundamental Theorem)라고 부른 이 정리에 대한 열두 가지의 또 다른 증명이 19세기 말까지 발견되었다. 이 중 네 가지 증명은 1844-45년 아이젠슈타인(Gotthold Eisenstein)에 의해 발견되었다. 아이젠슈타인의 논문 이차 잉여

1. 제르맹의 원래 문헌에 근거한 페르마의 마지막 정리에 관한 제르맹의 연구에 대한 좀 더 포괄적인 평가는 [14]에서 찾아볼 수 있다.

에 관한 기본 정리의 기하학적 증명(Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste[7])은 가우스의 셋째 증명에 대한 매우 우아하고 교육적인 기하학적 변형을 포함하고 있다[12, 13].

헤밀턴: 장기간에 걸친 노력 끝에, 삼차원 벡터의 곱셈을 정의하려는 해밀턴(William Rowan Hamilton)의 시도는 사차원 벡터를 허용한다면 이것이 가능하다는 통찰을 1843년에 얻게 만들었다. 그의 책 사원수 원론(Elements of Quaternions)에서 발췌한 글은 사원수에 대한 그의 기하학적 관점을 흥미롭게 설명하고 있다[17]. 이것은 비가환 수론에 대한 최초의 중요한 예를 제공하며, 이에 따라 추상 대수학의 발달이 시작되었다.

케일리: 19세기 중반까지 군 구조는 수학의 여러 가지 분야에서 묵시적으로 등장했다. 예를 들면, 모듈 산술과 이차 형식 이론에서 나타났고 대수 방정식에 관한 갈루아의 연구에서 치환군으로 나타났으며 사원수에 관한 해밀턴의 연구와 행렬 이론에서 나타났다. 케일리(Arthur Cayley)는 논문 기호 방정식 $\theta^n=1$에 의존하는 군론에 대해서(On the Theory of Groups, as Depending on the Symbolic Equations $\theta^n=1$)에서 군의 추상적인 개념을 최초로 고찰했으며 순수하게 추상적인 방법으로 군의 분류를 시작했다[4].

데데킨트: 데데킨트(Richard Dedekind)는 학생들에게 미적분학을 좀 더 잘 설명하기 위한 노력의 일환으로 이른바 데데킨트 절단을 통해 실수를 구성했다. 이를 이용하면 실수의 연속성을 엄밀하게 유도할 수 있다. 이와 동치인 칸토어의 구성과 함께, 이 연구는 해석학의 산술화를 꾀한 한 세기의 연구가 절정에 도달했음을 의미한다. 1872년 그는 이런 발상을 유명한 논문 연속성과 무리수(Stetigkeit und die Irrationalzahlen)를 통해 발표했다[6].

칸토어: 19세기 말 수학은 칸토어(Georg Cantor)의 무한에 대한 대담한 연구로 영원히 바뀌게 되었다. 읽기 쉬운 그의 책 무한 집합론의 기초에 대한 기여(Beiträge zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre)의 일부는 초한수, 즉 오늘날 기수와 서수라 불리는 것에 대한 이론의 기초를 제공했다[3].

콘웨이: 게임 이론의 발상을 결합시킨 데데킨트 절단의 엄청난 일반화는 콘웨이(John Conway)로 하여금 1970년대에 실수와 칸토어의 서수를 모두 포함하는 거대한 수 체계로서 단 하나의 구조인 이른바 초실수(surreal number)를 창조하게 만들었다. 그의 책 수와 게임에 대해서(On Numbers and Games)의 제0장은 초실수 세계를 재미있는 소개하고 있다[5]. 콘웨이의 책은 최근의 수학 중 심오하지만 최소한의 지식으로 읽을 수 있는 흔치않은 예이다.

우리의 경험에 의하면, 학생들은 원전의 연구에 매료된다. 특히, 수학사와 함께 읽을 때 더욱 매료된다. 교사와 학생 모두는 원전과 현대 수학의 본질을 더욱 깊이 있게 음미할 수 있는 이점이 있을 뿐만 아니라, 원전의 해석을 통해 활발하고 고무적인 토론을 진행하는 이점이 있다. 학생들은 할당된 과제의 일부로서 선택된 주제에 대한 연구 과제를 (일부는 수학이고 일부는 역사라는 제한만을 통해) 완성한다. 할당된 다른 과제는 원전과 관련된 주제에서 수학적인 면에 대부분 초점을 집중하는 것이다.

약간의 시간 동안 전통적인 강의 방법을 이용한 뒤에, 두 가지 교육적인 도구, 즉 '발견적 접근 방법'과 광범위한 독서의 놀라운 효율성을 발견했다. 발견법은 학생들이 스스로 수학을 발견해야 함을 가정한다. 그래서 우리는 각 원전에 대해 역사적이고 수학적인 내용을 간단하게 설명하고 그 문헌의 어려운 점에 대해 학생들에게 경고한 다음, 학생들이 자료를 연구하면서 제기하는 질문에 대답해주기 위해 대기한다. 활발한 논의를 통해 학생들은 그 원전에 대한 자신의 이해를 교환하고, 나머지 어려운 점을 해결한다. 이 방법은 엄청난 열정을 불러일으키며 진정한 발견의 의미를 일깨워준다. 놀랍게도, 이 방법은 또한 강의를 통해 얻을 수 있는 것보다 원전에 대한 더욱 깊은 이해에 도달함을 보여준다.

학생들은 원전의 수학적인 세부 사항, 역사적 상황, 강의록, 문제 풀이 과정의 고통을 적은 단상, 수학의 창조 과정에 대한 자신의 생각 등 이 과정의 모든 면에 대해 자주 기록한다. 이런 기록 경험은 우리가 연구하는 위대한 정리들에 대한 좀 더 포괄적인 견해를 유도할 뿐만 아니라, 증명에 나타나는 수학적인 세부 사항을 훨씬 더 명확하게 파악하도록 한다.

자연 과학, 공학, 수학 교육학 등을 전공하는 학생들에게 이런 과정은 수학에 대한 폭넓고 인간적인 관점을 제공하며, 많은 학생들에게 이 과정은 전통적인 수학 교과 과정 내에서 신선한 공기를 호흡할 수 있는 기회를 제공한다. 수학을 전공하는 학생들에게 이 과정은 학부 전체를 통해서 가장 풍부한 경험을 제공한다.

참고문헌

1. Roberto Bonola, *Non-Euclidean Geometry*, Dover, New York, 1955.
2. Carl Boyer, Pascal's formula for the sums of the integers, *Scripta Mathematica*, 9 (1943), pp. 237-244.
3. Georg Cantor, *Contributions to the Foundations of the Theory of Transfinite Numbers, Article I*, Dover, New York, 1895.
4. Arthur Cayley, *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*, vol. 1, pp. 423-424; vol. 2, pp. 123-132, Cambridge University Press, Cambridge, 1889.
5. John Conway, *On Numbers and Games*, Academic Press, London, 1976, pp. 3-14.

6. Richard Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers*, Dover, New York, 1963, pp. 1-27.
7. F. Gotthold Eisenstein, Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*, 28 (1844), pp. 246-248, and Taf. II: Figs. 1, 2.
8. Leonhard Euler, *Opera Omnia*, Teubner, Leipzig & Berlin, 1924-25, Series I, vol. 14, pp. 73-86.
9. T. L. Heath (ed.), *The Elements*, Dover, New York, 1956, vol. I, pp. 153-155.
10. T. L. Heath, *The Works of Archimedes*, Dover, New York, pp. 107-109, 176-182.
11. Adrien M. Legendre, *Sur quelques objets d'analyse indeterminée et particulièrement sur le théoreme de Fermat*, Second Supplément (Sept. 1825) to *Théorie des Nombres*, Second Edition, 1808.
12. Reinhard Laubenbacher and David Pengelley, Eisenstein's Misunderstood Geometric Proof of the Quadratic Reciprocity Theorem, *College Mathematics Journal*, 25 (1994), pp. 29-34.
13. Reinhard Laubenbacher and David Pengelley, Gauß, Eisenstein, and the 'Third' Proof of the Quadratic Reciprocity Theorem: Ein Kleines Schauspiel, *Mathematical Intelligencer*, 16 (1994), pp. 67-72.
14. Reinhard Laubenbacher and David Pengelley, Here Is What I Have Found: Sophie Germain's Forgotten Number Theory Manuscripts, in preparation.
15. Blaise Pascal, *Oeuvres de Blaise Pascal*, Kraus Reprint, Vaduz, Liechtenstein, 1976, vol. 3, pp. 341-367.
16. David E. Smith, *Source Book in Mathematics*, Dover, New York, 1959, pp. 203-206.
17. Ibid., pp. 677-683.
18. Ibid., pp. 85-90.
19. Dirk J. Struik, *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1986, pp. 227-230.
20. J. J. Winter and W. Arafat, The Algebra of Umar Khayyam, *Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal*, 41 (1950), pp. 27-78.