

서버상태의존 도착률을 갖는 M/G/1 모형의 최적 제어정책

- Optimal N-Policy of M/G/1 with Server Set-up Time under Heterogeneous Arrival Rates -

백 승 진*
Paik, Seung-Jin
허 선*
Hur, Sun

Abstract

M/G/1 queueing system is one of the most widely used one to model the real system. When operating a real systems, since it often takes cost, some control policies that change the operation scheme are adopted. In particular, the N-policy is the most popular among many control policies.

Almost all researches on queueing system are based on the assumption that the arrival rates of customers into the queueing system is constant. In this paper, we consider the M/G/1 queueing system whose arrival rate varies according to the servers status : idle, set-up and busy states.

For this study, we construct the steady state equations of queue lengths by means of the supplementary variable method, and derive the PGF(probability generating function) of them. The L-S-T(Laplace Stieltjes transform) of waiting time and average waiting time are also presented.

We also develop an algorithm to find the optimal N-value from which the server starts his set-up. An analysis on the performance measures to minimize total operation cost of queueing system is included. We finally investigate the behavior of system operation cost as the optimal N and arrival rate change by a numerical study.

1. 서론

고객의 도착 간격이 지수분포를 따르며 서비스 시간이 일반분포를 따르는 M/G/1 대기행렬 모형은 현실의 대기행렬 모형 가운데 가장 많이 응용되는 모형이다[1]. 이러한 M/G/1 대기행렬 모형에서 서버의 유휴 기간(idle period)이 끝나고 서비스가 시작될 때마다 빈번한 set-up cost가 들게 된다. 잦은 준비 기간에 따른 set-up cost의 지출은 시스템의 경제적인 운용에 영

*한양대학교 산업공학과

항을 주게 된다. 그러므로 이를 줄이기 위하여 대기중인 고객의 수가 일정한 한계치 N 을 넘어섰을 때 비로소 서비스를 시작하는 제어 정책(N -정책)을 사용하게 된다.

기존의 M/G/1 N -정책 모형은 서버가 처할 수 있는 상황에 관계없이 대기행렬에 도착하는 고객의 도착률이 일정하다는 가정하에 시스템을 분석하였다. 그러나 현실적으로는 서버가 유휴상태와 준비 상태, 그리고 바쁜 상태(busy period)일 때에 따라 대기행렬에 도착하는 고객이 각기 다른 도착률을 갖고 도착할 수 있다. 즉, 시스템에 도착하는 고객들은 시스템의, 혹은 서버의 상태를 미리 파악하고 이에 따라 시스템의 합류 여부를 판단하려는 경향이 있을 수 있다.

본 연구에서는 서버의 상태를 3가지(유휴 상태, 준비 상태, 바쁜 상태)로 구분하고 이러한 상태에 따라 각각 다른 도착률을 갖는 M/G/1 N -정책 모형을 고려한다. 서버는 N 명의 고객이 기다릴 때까지 유휴 상태에 있다가 N 명이 되면 준비를 시작하고 준비가 끝나면 서비스를 시작한다. 이러한 시스템에서 여러 비용을 고려하여 총 비용을 최소로 하는 최적의 N 값을 구하고 이것이 도착률 변화와 어떤 관계에 있는가를 분석하고자 한다.

2. 기존 연구와 연구 범위

2.1. 기존 연구 고찰

N -정책을 사용한 M/G/1 시스템은 최초로 Yadin 등[2]에 의해 연구되었다. 이순석[3]은 $M^x/G/1$ 휴가 시스템에 대한 N -정책을 부가변수법을 이용하여 분석하였으며, Lee 등[4]은 한계치를 이용한 제어 정책이 사용되는 $M^x/G/1$ 서버 복수 휴가 시스템의 운용 특성을 연구하였다. 또한 이효성[5]은 M/M/2 서버 휴가형 시스템에서의 한계치를 이용한 제어 정책을 연구하였다.

일반적으로 서버가 유휴 상태에서 다시 서비스를 시작하게 되면 시스템을 재가동시키는 데에 set-up time이 들게 된다. Minh[6] 등은 N -정책과 set-up time을 고려한 M/G/1 모델을 분석하였고, Medhi[7] 등은 N -정책하에서 일반적인 set-up time을 고려한 모델에 대한 연구를 하였다. 또한 Park 등[8]은 시스템에 고객의 수가 N 명이 되기 전에 미리 준비를 시작하는 경우의 N -정책에 대한 연구를 하였다.

이제까지의 연구에서는 고객의 도착이 포아송 과정을 따르고 그 도착률이 λ 로 일정한 경우에서만 시스템을 분석하였다. 그러나 서버의 상태에 따라 상이한 도착률을 갖는 모델에 대한 분석은 현재까지 이루어지지 않았고 다만 서버의 상태와는 무관하게 도착률이 마코프 과정에 의해 변화하는 MMPP(Markov Modulated Poisson Process)에 대한 연구만이 일부 이루어져 왔다.

2.2. 연구 범위

본 연구에서는 서버의 세 가지 상태, 즉 idle period, set-up period, 그리고 busy period의 상태에 따라 서로 다른 도착률 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ 를 갖고 고객이 도착하는 모델에서의 각종 성능을 분석한다. 모델 분석을 위하여 잔여 서비스 시간과 잔여 set-up time을 이용한 부가변수법이 이용되며, 고객수에 대한 PGF(probability generating function)와 대기시간의 L-S-T(Laplace Stieltjes transform)를 유도한다. 또한 유도된 식을 이용하여 서버가 유휴 상태에서 set-up을 다시 시작하게 되는 대기 고객수 N 에 대한 최적의 N 값을 찾음으로써 시스템을 운용하는 데에 필요한 단위기간당 기대비용을 최소화하는 최적의 제어 정책을 구한다.

3. 모델 설명

3.1. 시스템 설명

한 cycle의 시작은 서버가 시스템의 모든 고객을 서비스한 후 idle period에 들어가는 순간 시작된다. 서버가 idle period에 있을 때 포아송과정에 의해 도착하는 고객은 λ_1 의 도착률을 갖고 시스템에 도착한다. 시스템이 idle period에 있는 동안 고객이 N명이 될 때까지 서버는 서비스를 하지 않는다. 시스템에 있는 고객의 수가 N명을 넘어 선 순간부터는 시스템이 set-up되게 되는데 이때 고객의 도착률은 λ_2 로 바뀌게 된다. 이때에도 idle period와 마찬가지로 고객은 서비스를 받지 않고 시스템에 계속 쌓이게 되고, 일반분포를 따르는 set-up time을 거친 후에 서버는 비로소 서비스를 시작한다. 이때 고객의 도착률은 λ 로 바뀐다. 서버가 시스템 내의 모든 고객을 서비스하여 시스템에 한 명의 고객도 남지 않았을 때 한 cycle이 끝나게 된다. 이를 임의의 표본경로에 대하여 도식화하면 다음 그림 1과 같다.

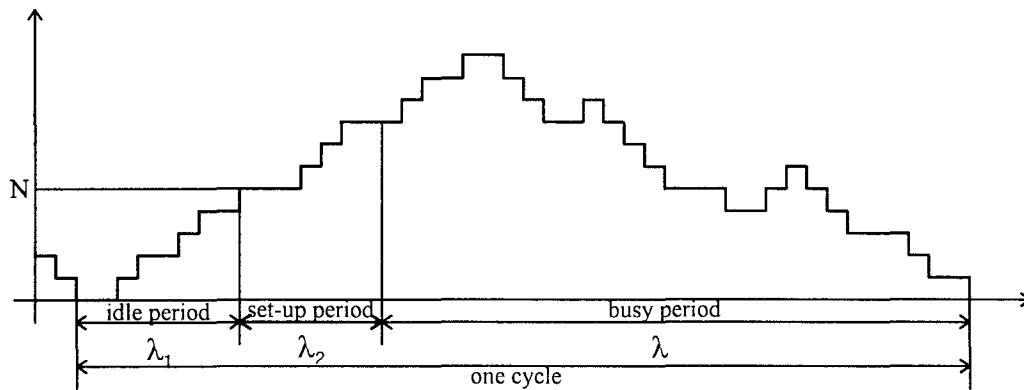


그림 1. 모델의 설명

3.2. 기호 설명

본 연구에서 사용될 기호는 다음과 같다.

- N set-up 개시 한계치
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ 각각 idle period, set-up period, busy period에서의 도착률
- $R_n(t) = \Pr(\text{at time } t, \text{ idle period, 고객수} = n),$
 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$
- $U_n(t, y) \triangleq \Pr(\text{at time } t, \text{ set-up period, 고객수} = n,$
잔여 set-up time $= [y, y + \Delta t)), n = N, N+1$

$P_n(t, x) \Delta t = \Pr(\text{at time } t, \text{ 고객수} = n, \text{ 잔여 서비스 시간} = [x, x + \Delta t)), n = 1, 2, 3, \dots$

$$R_n = \lim_{t \rightarrow \infty} U_n(t)$$

$$U_n(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} U_n(t, y)$$

$$P_n(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t, x)$$

$S, s(x), S^*(\theta)$ 각각 서비스 시간, pdf of S , L-T(Laplace transform) of S

$K, k(y), K^*(\phi)$ 각각 set-up time, pdf of K , L-T of K

$U_n^*(\phi)$ L-T of $U_n(y)$

$P_n^*(\theta)$ L-T of $P_n(x)$

$R(z)$ GF of R_n

$P(z)$ 안정상태 고객수 PGF

3.3. 상태 방정식의 유도

$t + \Delta t$ 시점에 idle period에서 시스템에 고객이 없을 확률은 다음의 (3.1)과 같은 식으로 나타낼 수 있다. 즉, t 시점에 idle period에서 Δt 만큼 시간이 흘렀을 때 아무도 도착하지 않거나, busy period 상태에서 시스템에 남아있던 1명의 고객의 잔여 서비스 시간이 0이 되어(즉, 모든 서비스가 끝나서) 시스템을 떠나서 idle period 상태로 되는 경우이다.

$$R_0(t + \Delta t) = R_0(1 - \lambda_1 \Delta t) + P_1(t, 0) \Delta t \tag{3.1}$$

같은 방법으로 $t + \Delta t$ 시점에 각각의 경우에 있을 확률은 다음의 식과 같다.

$$R_n(t + \Delta t) = R_n(t)(1 - \lambda_1 \Delta t) + R_{n-1}(t) \lambda_1 \Delta t \tag{3.2}$$

$$U_N(t + \Delta t, y - \Delta t) \Delta t = U_N(t, y) \Delta t (1 - \lambda_2 \Delta t) + R_{N-1}(t) \lambda_1 \Delta t k(y) \Delta t \tag{3.3}$$

$$U_M(t + \Delta t, y - \Delta t) \Delta t = U_M(t, y) \Delta t (1 - \lambda_2 \Delta t) + U_{N-1}(t, y) \Delta t \lambda_2 \Delta t \tag{3.4}$$

$$P_1(t + \Delta t, x - \Delta t) \Delta t = P_1(t, x) \Delta t (1 - \lambda \Delta t) + P_2(t, 0) \Delta t s(x) \Delta t \tag{3.5}$$

$$P_n(t + \Delta t, x - \Delta t) \Delta t = P_n(t, x) \Delta t (1 - \lambda \Delta t) + P_{n+1}(t, 0) \Delta t s(x) \Delta t + P_{n-1}(t, x) \Delta t \lambda \Delta t + U_n(t, 0) \Delta t s(x) \Delta t \tag{3.6}$$

이상에서 구한 시스템 방정식을 이용하여 안정상태에서의 평형방정식을 구하면 다음과 같다.

$$0 = -\lambda_1 R_0 + P_1(0) \tag{3.7}$$

$$0 = -\lambda_1 R_n + \lambda_1 R_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots, N-1) \tag{3.8}$$

$$-\frac{d}{dy} U_M(y) = -\lambda_2 U_M(y) + \lambda_1 k(y) R_{N-1} \tag{3.9}$$

$$-\frac{d}{dy} U_n(y) = -\lambda_2 U_n(y) + \lambda_2 U_{n-1}(y) \quad (n = N+1, N+2, \dots) \tag{3.10}$$

$$-\frac{d}{dx} P_1(x) = -\lambda P_1(x) + s(x) P_2(0) \tag{3.11}$$

$$-\frac{d}{dx} P_n(x) = -\lambda P_n(x) + s(x) P_{n+1}(0) + \lambda P_{n-1}(x) + s(x) U_n(0) \quad (n = 2, 3, \dots) \tag{3.12}$$

3.4 고객수 PGF의 유도

위의 식 (3.9)~(3.12)에 L-T를 취하면,

$$\phi U_N^*(\phi) - U_N(0) = \lambda_2 U_N^*(\phi) - \lambda_1 R_{N-1} K^*(\phi) \tag{3.13}$$

$$\phi U_n^*(\phi) - U_n(0) = \lambda_2 U_n^*(\phi) - \lambda_1 U_{n-1}^*(\phi) \quad (n = N+1, N+2, \dots) \tag{3.14}$$

$$\theta P_1^*(\theta) - P_1(0) = \lambda P_1^*(\theta) - P_2(0) S^*(\theta) \tag{3.15}$$

$$\theta P_n^*(\theta) - P_n(0) = \lambda P_n^*(\theta) - P_{n+1}(0) S^*(\theta) - \lambda P_{n-1}^*(\theta) \quad (n = 2, 3, \dots, N) \tag{3.16}$$

$$\theta P_n^*(\theta) - P_n(0) = \lambda P_n^*(\theta) - P_{n+1}(0) S^*(\theta) - \lambda P_{n-1}^*(\theta) U_n(0) S^*(\theta) \quad (n = N+1, N+2, \dots) \tag{3.17}$$

다음의 GF를 정의하자.

$$U^*(z, \phi) = \sum_{n=N}^{\infty} U_n^*(\phi) z^n \tag{3.18}$$

$$U(z, 0) = \sum_{n=N}^{\infty} U_n(0) z^n \tag{3.19}$$

$$P^*(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^*(\theta) z^n \tag{3.20}$$

$$P(z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(0) z^n \tag{3.21}$$

위의 식 (3.13), (3.14)에 z^n 을 곱하고, $n = N, N+1, \dots$ 에 대하여 더한 후 $U^*(z, \phi)$ 에 대해 정리하면 다음의 식 (3.22)를 얻는다.

$$U^*(z, \phi) = \frac{\lambda_1 z^N \{K^*(\lambda_2 - \lambda_2 z) - K^*(\phi)\} R_0}{\phi - \lambda_2 + \lambda_2 z} \tag{3.22}$$

같은 방법으로 식 (3.23)을 얻을 수 있다.

$$P^*(z, \theta) = \frac{\lambda_1 z \{S^*(\lambda - \lambda z) - S^*(\theta)\} \{1 - z^N K^*(\lambda_2 - \lambda_2 z)\} R_0}{\{S^*(\lambda - \lambda z) - z\} \{\theta - \lambda + \lambda z\}} \tag{3.23}$$

따라서 안정 상태에서 고객수의 PGF는 다음의 식 (3.24)와 같다.

$$\begin{aligned} P(z) &= U^*(z, 0) + P^*(z, 0) + R(z) \\ &= U^*(z, 0) + P^*(z, 0) + R_0 \sum_{n=0}^{N-1} z^n \\ &= \frac{[-\lambda_1 z^N \{S^*(\lambda - \lambda z) - z\} \{K^*(\lambda_2 - \lambda_2 z) - 1\} - \lambda_1 \lambda_2 z \{S^*(\lambda - \lambda z) - 1\} \{1 - z^N K^*(\lambda_2 - \lambda_2 z)\} + \lambda \lambda_2 (1 - z^N) \{S^*(\lambda - \lambda z) - z\}] R_0}{\lambda \lambda_2 (1 - z) \{S^*(\lambda - \lambda z) - z\}} \end{aligned} \tag{3.24}$$

$P(1) = 1$ 을 이용하여 R_0 값을 구할 수 있다.

$$R_0 = \frac{1 - \lambda E(S)}{(\lambda_2 - \lambda) \lambda_1 E(S) E(K)} + (\lambda_1 - \lambda) N E(S) + N + \lambda_1 E(K) \tag{3.25}$$

이상에서 구한 고객수의 PGF인 $P(z)$ 와 R_0 의 값을 일반적인 M/G/1 모델이나 M/G/1 N-정책 모델과 비교하여 보면 그 값이 일치하는 것을 알 수 있다.

3.5 평균 고객수

식 (3.24)와 (3.25)에서 구한 안정상태 고객수의 PGF를 이용하여 안정상태에서의 평균 고객수 $L = P'(1)$ 을 구한다. 이는 다음의 식 (3.26)과 같이 대단히 길고 복잡한 식으로 나타내어 지는데, 이는 본 연구에서 고려하는 모델이 많은 파라미터들($\lambda, \lambda_1, \lambda_2, K, N$ 등)을 포함하고 있기 때문이다.

$$L = \left\{ \begin{aligned} & M_1 E(K) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 E(K^2)}{2} + \frac{\lambda_1 E(S)(N + \lambda_2 E(K))}{1 - \lambda E(S)} \\ & + \frac{\lambda \lambda_1 E(S^2)(N + \lambda_2 E(K))}{2(1 - \lambda E(S))} + \frac{N(N-1)\lambda_1 E(S)}{2(1 - \lambda E(S))} + \frac{M_1 \lambda_2 E(S)E(K)}{1 - \lambda E(S)} \\ & + \frac{\lambda_1 \lambda_2^2 E(S)E(K^2)}{2(1 - \lambda E(S))} + \frac{N(N-1)}{2} + \frac{\lambda^2 \lambda_1 E(S)E(S^2)(N + \lambda_2 E(K))}{2(1 - \lambda E(S))^2} \end{aligned} \right\} R_0 \quad (3.26)$$

일반적으로 M/G/1/FCFS 대기행렬 모델에서의 대기시간의 분포는 임의의 고객의 대기시간이 다음에 도착하는 고객들의 도착에 영향을 받지 않는다는 사실을 이용하여 쉽게 구해진다. 그러나 본 연구에서처럼 N-정책을 사용하는 경우에는 임의고객의 대기시간이 다음에 도착하는 고객들의 도착과정에 영향을 받게 되므로 임의의 고객이 취할 수 있는 모든 경우를 고려해야 한다. 즉, 임의의 고객이 idle period에 도착하였을 경우와 set-up period에 도착하였을 경우, 그리고 busy period에 도착하였을 경우를 모두 고려하여 전체 대기시간 분포를 구해야 한다. 각 period 중에 도착하는 고객의 대기시간 분포의 L-S-T는 다음과 같다.

$$W_q^*(\theta | \text{arrival at idle period}) = \frac{K^*(\theta)}{N} \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \theta}\right)^N - (S^*(\theta))^N}{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \theta} - S^*(\theta)} \quad (3.27)$$

$$W_q^*(\theta | \text{arrival at set-up period}) = (S^*(\theta))^N \frac{K^*(\lambda_2 - \lambda_2 S^*(\theta)) - K^*(\theta)}{E(K)(\theta - \lambda_2 + \lambda_2 S^*(\theta))} \quad (3.28)$$

$$W_q^*(\theta | \text{arrival at busy period}) = \frac{1 - \lambda E(S)}{E(S)(N + \lambda_2 E(K))} \frac{1 - (S^*(\theta))^N K^*(\lambda_2 - \lambda_2 S^*(\theta))}{\theta - \lambda + \lambda S^*(\theta)} \quad (3.29)$$

한편, 각 period의 평균길기와 한 cycle의 평균길기는 다음과 같이 계산된다.

$$E(R) = \frac{N}{\lambda_1} \quad : \text{idle period의 평균길이}$$

$$E(K) \quad : \text{busy period의 평균길이}$$

busy period가 시작될 때 대기중인 고객수의 PGF를 $\phi(z)$ 라고 하면,

$$\phi(z) = z^N (\text{idle 동안 도착 고객수의 PGF}) * K^*(\lambda_2 - \lambda_2 z) (\text{set-up 동안 도착 고객수의 PGF}) \quad (3.30)$$

따라서, busy period의 L-T는 $\phi(B^*(\theta))$ 이다. 단, $B^*(\theta)$ 는 일반적인 M/G/1의 busy period의 L-T이다.

그러므로 $E(B) = -\frac{d}{d\theta} \phi(B^*(\theta)) |_{\theta \rightarrow 0}$ 를 계산하면,

$$E(B) = \frac{E(S)(N + \lambda_2 E(K))}{1 - \lambda E(S)} \quad (3.31)$$

$$\therefore E(C) = \frac{N}{\lambda_1} + E(K) + \frac{E(S)(N + \lambda_2 E(K))}{1 - \lambda E(S)} \quad (3.32)$$

각 period에 있을 확률은 재생보상정리에 의하여

$$\Pr(\text{idle period}) = \Pr(I) = E(R)/E(C)$$

$$\Pr(\text{set-up period}) = \Pr(S) = E(K)/E(C)$$

$$\Pr(\text{busy period}) = \Pr(B) = E(B)/E(C)$$

이로써 대기시간 분포의 L-S-T는

$$W_q^*(\theta) = \text{식 (3.27)} * \Pr(I) + \text{식 (3.28)} * \Pr(S) + \text{식 (3.29)} * \Pr(B) \quad (3.33)$$

에 의해 구할 수 있으며 평균 대기시간 역시 $E(W_q) = \frac{d}{dq} W_q^*(\theta) |_{\theta=0}$ 에 의해 구한다.

4. 최적의 N-정책

4.1. 단위시간당 평균 총비용

한 cycle 동안의 단위시간당 시스템에 필요한 비용으로는 준비비용(set-up cost)과 유지비용(holding cost)이 있다. 유지비용은 다시 idle period에서의 유지비용과 set-up period에서의 유지비용, busy period에서의 유지비용으로 나눌 수 있다. set-up cost는 C_s , 단위시간당 고객 1명당 holding cost는 C_h 라고 하면 단위시간당 평균 총비용 $TC(N)$ 은 다음과 같다.

$$TC(N) = (\text{cycle의 평균누적 holding cost} + \text{set-up cost}) / (\text{cycle의 평균길이}) \quad (4.1)$$

cycle의 평균길이 $E(C)$ 는 위 식 (3.32)에서 이미 구하였다.

각 period의 holding cost는 다음의 식과 같다.

idle period에서의 holding cost :

$$C_h \left\{ \frac{1}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1} + \dots + \frac{N-1}{\lambda_1} \right\} = \frac{N(N-1)C_h}{2\lambda_1} \quad (4.2)$$

set-up period에서의 holding cost :

$$\left(\frac{\lambda_2 E(K^2)}{2} + NE(K) \right) C_h \quad (4.3)$$

busy period에서의 holding cost :

$$\frac{C_h}{1 - \lambda E(S)} \left[\frac{E(S)}{2} \{ N^2 + N + 2(N+1)\lambda_2 E(K) + \lambda_2^2 E(K^2) \} + \frac{\lambda E(S^2)}{2(1 - \lambda E(S))} (N + \lambda_2 E(K)) \right] \quad (4.4)$$

따라서 위의 식 (4.1)은 다음과 같이 표현된다.

$$TC(N) = (\text{식 (4.2)} + \text{식 (4.3)} + \text{식 (4.4)} + C_s) / E(C) \quad (4.5)$$

4.2. 최적의 N* 값

시스템의 비용을 최소로 하게 되는 N 값은 (4.5)에서 구한 $TC(N)$ 을 이용하여 구하게 된다.

$$\frac{\partial TC(N)}{\partial N} = 0 \text{인 } N \text{ 값을 구하여 이 값에 인접한 두 정수 중 } TC(N) \text{을 최소로 하는 } N \text{을 최적}$$

의 N^* 로 정한다. 단, 여기서는 $\frac{\partial^2 TC(N)}{\partial N^2} > 0$ 임을 확인해야 하는데 식의 복잡함으로 인하여 해석적으로 이를 보이기 어렵고 대신 여러 가지 수치를 대입하여 확인하였다.

5. 수치 분석

5.1 수치 분석의 목적과 기본 가정

본 절에서는 제 4 절에서 구한 N-정책에 실제 값을 대입해 봄으로써 실제로 도착률의 변화에 따른 시스템의 운용비용이 어떻게 변화하는가를 분석해 보고자 한다.

본 수치예제에서는 idle period에서의 도착률 λ_1 과 set-up에서의 도착률 λ_2 를 동일하게 두었는데 이는 다음과 같은 이유 때문이다. 첫째, 일반적으로 set-up period가 한 cycle에서 차지하는 비율은 busy period에 비해 작은 경우가 대부분이고 둘째, set-up period도 서버가 서비스를 제공하지 않고 있다는 점에서는 idle period와 동일하다는 점, 셋째, 도착률을 세 가지로 분리하여 분석하게 되면 앞 절에서 본 바와 같이 식이 지나치게 복잡하여 경험적으로 볼 때 수치 분석의 결과를 의미있게 해석하기가 어렵기 때문이다.

수치 분석을 위한 데이터로 서비스 시간의 분포는 평균이 1/2인 지수분포로 가정하였다. 그리고 고객 1명당 단위시간당 유지비용인 C_h 는 1, set-up 비용 C_s 는 100으로 하였다. busy period에서의 도착률 λ 는 1로 고정한다. 또 set-up time K 는 Erlang (n, a) 분포(단, $E(K) = n/a, E(K^2) = n/a^2$)를 따르는 것으로 가정하였는데 (n, a) 가 각각 (2, 2), (2, 4), (2, 8) 등 3가지인 경우를 고려하였다. idle과 busy period에서의 도착률의 비율인 λ_1/λ 는 0.1에서부터 0.1의 간격으로 증가시켰다.

5.2 수치 분석 결과

위의 가정대로 수치를 입력한 후 계산된 결과를 이용하여 λ_1/λ 의 변화에 따른 최적의 N의 변화를 다음의 그림 2에 나타내었다.

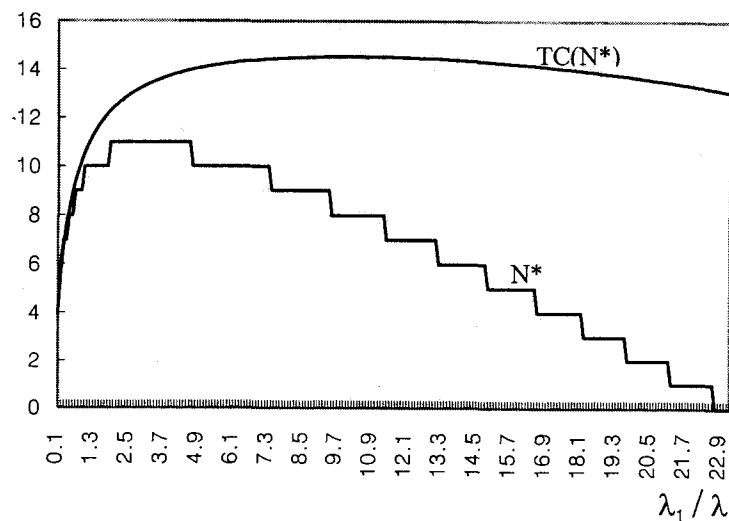


그림 2. λ_1/λ 변화에 따른 시스템 최적 총비용 및 최적 N^* (Erlang(2, 4)의 경우)

위의 그림에서 보는 바와 같이 시스템의 총비용 $TC(N^*)$ 는 λ_1/λ 이 증가함에 따라 급격히 증가하다가 어느 한 점에 이르러 최대가 되고 이후 약간씩 감소하는 형태를 띄고 있다. 그러나 감소하는 속도는 매우 느리게 나타나고 있다. 최적의 N^* 의 경우에는 $TC(N^*)$ 와 유사하지만 정점 이후 감소하는 속도가 두드러지게 나타난다. 즉, 서버가 서비스를 제공하지 않는 기간 (idle + set-up period) 동안의 도착이 서비스를 제공하는 기간 동안의 도착에 비해 상대적으로 빈번할 경우 (λ_1/λ 이 증가) 어느 정도까지는 서버가 set-up을 개시하게 되는 대기 고객수의 최적값(N^*)이 커지면서 이에 따라 시스템 내 대기고객이 많아지고 유지비용이 급격히 커진다. 그러나 λ_1 이 더욱 커지면 유지비용이 지나치게 커지므로 이를 줄이기 위해 서버는 set-up을 조기에 실시해야 하고 결국 N^* 값은 다시 낮아지게 된다. 그렇지만 시스템의 최적 총비용 $TC(N^*)$ 는 N^* 가 낮아져도 λ_1 값이 커서 이에 따른 대기고객의 유지비용 때문에 그다지 크게 낮아지지 않는다.

한편, 다음 그림 3은 set-up time의 분포가 각각 Erlang(2, 2), Erlang(2, 4), Erlang(2, 8)인 경우의 최적 N^* 값의 변화를 비교하고 있다. 여기서 보는 바와 같이 $E(K)$ 가 길어질수록 최적의 N^* 가 작아지는 것을 확인할 수 있다. 따라서 set-up이 오래 걸리는 서버의 경우에는 set-up을 가급적 일찍하는 것이 좋다는 결론을 얻을 수 있다.

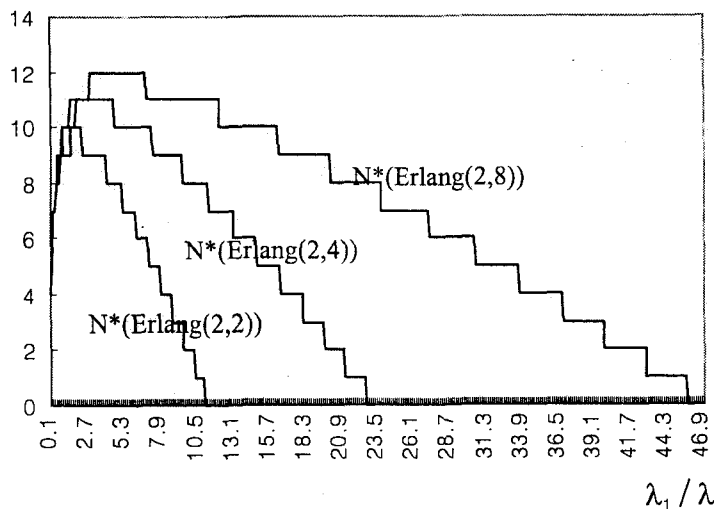


그림 3. λ_1/λ 변화에 따른 시스템 최적 N^* 값의 비교

6. 결론 및 추후과제

본 연구에서는 상이한 도착률을 갖는 M/G/1 N-정책 대기 모델의 최적의 N 값을 구해보았다. 부가변수법을 이용하여 평형방정식을 세우고, 이를 이용하여 고객수의 PGF인 $F(z)$ 를 구하고 대기시간 분포의 L-S-T를 유도하였다. 그리고 전체 시스템의 비용을 최소화 하는 최적의 N 값을 제시하였다. 본 연구와 관련된 추후의 연구로는 다른 비용정책, 예를 들어 T-정책이나

D-정책에 대해서도 연구되어질 수 있다. 그리고 본 연구에서는 서버의 상태에 따라 도착률이 달라지는 모델을 제시하였으나 서버의 상태와 무관한 이질의 도착률을 갖는 MMPP 모델에서의 N-정책 또한 향후 연구과제가 될 수 있다.

7. 참고 문헌

- [1] 이호우, 대기행렬이론, 도서출판 기술, 서울. (1996)
- [2] Yadin, M. And P. Naor, Queueing Systems with a Removable Service Station, *Opns. Res., Quart.*, Vol. 14, pp. 393~405. (1963)
- [3] 이순석, Threshold와 휴가가 있는 집단 대기행렬의 운영 특성, 박사학위논문, 성균관대학교 산업공학과. (1993)
- [4] Lee, H. W., Lee, H. S. and Chae, K. C., Operating Characteristics of $M^x/G/1$ Queue with N-Policy, *Queueing Systems*, Vol. 15, pp. 387~399. (1994)
- [5] 이효성, 휴가가 존재하는 M/M/2 대기 시스템의 한계치를 이용한 제어정책, 한국경영과학회지, 제20권, 제2호, pp. 1~10. (1991)
- [6] Minh, D.L., Transient Solutions for some Exhaustive M/G/1 Queues with Generalized Independent Vacations, *Europ. J. Opns. Res.*, 36, pp. 197~201. (1988)
- [7] Medhi, J. G. C. Templeton., A Poisson Input Queue under N-Policy and with a General Start up Time, *Computers Opns. Res.*, Vol. 19., No. 1, pp. 34~41. (1992)
- [8] Park, J. O. and Lee, H. W., Optimal Strategy in N-Policy System with Early Set-up, *J. Opns. Res. Society*, to appear.