工業經營學會誌 第 20卷 第 43輯 1997年 8月 145

# 일반하한 및 일반상한 제약하의 연속 최대최소 자원배분

## -Continuous Maximin Resource Allocations with GLB and GUB Constraints-

원 중 연 *
Won, Joong-Yeon
최 진 영 *
Choi, Jin-Yeong

**Abstract**

We present a continuous resource allocation problem with maximin objective functions under the generalized lower bound(GLB) and generalized upper bound(GUB) constraints. This problem is an extension for the problems of previous studies. An efficient algorithm is developed by exploiting extended structural properties, where n is the total number of variables. The worst computational complexity of the proposed algorithm is O(nlogn).

## 1. 서 론

본 연구에서는 다음과 같은 새로운 자원배분문제를 고려하고 신속한 해법에 대해 연구한다.

(P) maximize $z = \min_{j \in N} \{c_j x_j\}$ (1.1)

subject to $\Sigma_{j \in N} a_j x_j \le b,$ (1.2)

$\Sigma_{j \in J_k} x_j \le u_k, \ k = 1, \ldots, t,$ (1.3)

$\Sigma_{j \in J_k} x_j \ge l_k, \ k = 1, \ldots, t,$ (1.4)

$x_j \ge 0, \ j \in N.$ (1.5)

여기서 $c_j > 0$, $a_j > 0$, $j \in N$, $b > 0$, $0 < l_k \le u_k$, $k = 1, \ldots, t$, 이다. $J_0 = N \setminus \bigcup_{k=1}^{t} J_k$라 하자. 문제 (P)에서 제약식 (1.3)은 일반상한제약(generalized upper bound: GUB), 제약식 (1.4)는 일반하한제약(generalized lower bound: GLB)이라 불리운다. 문제 (P)는 일반하한 및 일반상한 제약하에서 주 제약 (1.2)의 자원양 $b$를 각 활동 $x_j$에 배분하되 해당하는 목적함수치 $c_j x_j$의 값들중 최소값이 커지도록 자원을 배분하는 최대최소화(maximin)의 문제이다.

* 경기대학교 산업공학과 교수

최대최소화의 목적함수를 갖는 선형계획문제는 Kaplan[6]에 의해 연구가 시작되었으며 Posner and Wu[8]등에 의해 계속 연구되어 왔다. 최대최소문제는 변수 한 개와 목적함수의 변수 수에 해당하는 개수만큼의 제약식들을 추가로 도입하므로써 일반 선형계획문제로의 변환이 항상 가능하다.

일반상한제약은 다중선택제약(multiple choice constraint)으로도 불리우며 최근까지 이러한 제약을 갖는 최소화(또는 최대화)의 문제들에 대해 많은 연구가 있었다.[7] 특히 일반상한제약을 갖는 선형배낭문제에 대한 효율적인 해법으로는 최근에 발표된 Pisinger[7]의 O(n) 해법을 비롯하여 Dyer[3], Glover[5], Zemel[9]등의 해법이 보고되었다. 이러한 일반상한제약은 일반 수리계획분야 및 유연생산시스템 분야에 더욱 폭넓게 적용되도록 논문[2]에서 확장되어 연구되었다. 이 확장된 제약을 갖는 선형배낭문제의 신속한 해법으로서 $O(n^2 \log n)$의 해법이 보고된 바 있다.[2]

일반하한제약을 갖는 최소화의 문제는 논문[2]에서 연구되었으며 일반상한제약도 함께 고려한 신속한 해법이 제시되었다. 반면에 일반하한제약만을 갖는 최대최소화의 문제는 Eiselt[4]에 의해 처음으로 연구되었다. Eiselt는 먼저 일반하한제약이 등식으로 성립되는 경우의 최적해 특성을 보였다. 다음으로 일반하한제약의 제한성이 없어지는 경우의 최적해는 바로 Kaplan[6]의 해가 된다는 것을 밝히고, 최적해를 O(nlogn)의 계산단계에 구할 수 있는 효율적인 해법을 제시하였다. 여기서 n은 문제에 존재하는 모든 변수의 개수이다.

본 연구에서는 주 제약외에 일반하한제약만이 아니라 일반상한제약도 동시에 존재하는 새로운 최대최소의 자원배분문제 (P)에 대해 연구한다. 문제 (P)는 논문[4]에서 연구된 문제를 포함하고 있는 더욱 일반적인 문제이다. 문제 (P)는 정부 등의 공공기관에서 여러 분야에 정부기금을 배분하는 상황에 활용된다. 주 제약은 정부가 배분해야 할 총 자금의 규모를 나타내고 일반하한 및 일반상한제약은 국방비나 국민경제등 각 분야에 필수적으로 투자해야 할 자금의 하한 및 상한액을 나타낸다.

본 연구에서는 논문[4]에서 제시된 특성외에 추가적으로 성립하는 특성을 파악하고 이에 기반한 신속한 해법을 제시한다. 이 해법의 계산복잡도는 O(nlogn)으로 나타나고 있다. 이 해법은 선형계획문제에 대한 기존의 해법들과는 달리 그 계산복잡도가 문제계수들의 크기에 의존하지 않고 단지 변수의 수만에 의해 표현되는 신속한 해법이다.

## 2. 문제의 특성 분석

문제 (P)의 특성파악을 위하여 한 집합 $J_k$에만 해당하는 목적함수 및 제약식으로 이루어진 다음과 같은 부문제(subproblem) ($SP_k$)를 고려한다. ( $k = 1, \ldots, l$) 여기서 우변상수 $b_k$는 집합 $J_k$에 배분되는 자원양이라 하자.

$$(SP_k)\quad \text{maximize}\quad z_k = \min_{j \in J_k} \{c_j x_j\} \tag{2.1}$$

$$\text{subject to}\quad \Sigma_{j \in J_k} a_j x_j \le b_k, \tag{2.2}$$

$$\Sigma_{j \in J_k} x_j \le u_k, \tag{2.3}$$

$$\Sigma_{j \in J_k} x_j \ge l_k, \tag{2.4}$$

$$x_j \ge 0,\ j \in J_k. \tag{2.5}$$

부문제 ($SP_k$)의 최적해는 배분양 $b_k$의 값에 의해 달라지므로 $b_k$의 증가에 따라 발생되는 최적해의 변화를 추적하기로 한다.

부문제 (SP$_k$)에 존재하는 제약들간의 특성은 다음과 같다. 먼저 일반하한제약 (2.4)가 등식으로 성립하는 동안 일반상한제약 (2.3)은 제한성이 없는 중복적 제약이 되며, 자원양 $b_k$가 증가하면서 제약 (2.4)가 부등식으로 만족되면 제약 (2.3)은 제한성이 생긴다. 따라서, 먼저 제약 (2.4)가 등식으로 만족될 때의 최적해 특성을 파악하고, 다음에 자원양 $b_k$가 더욱 증가할 때 제약 (2.4)로부터 발생하는 최적해 특성을 연구하기로 한다.

제약 (2.4)가 등식으로 만족되는 경우의 문제는 기존의 연구[4]와 동일하므로 이 부분에 대해서는 다음과 같이 정리 1에서 간략히 정리하기로 한다. 제약 (2.4)가 등식으로 만족되는 최소한의 자원양 $b_k$는 가능해가 존재하기 위한 자원양의 값과 같다. 즉, 임의의 작은 자원양에 대해서는 부문제 (SP$_k$)가 비가해(infeasible)일 수 있다. 집합 $J_k$에서 $a_1 = \min_{j\in J_k}\{a_j\}$라 하자. 부문제 (SP$_k$)에 가능해가 존재하기 위한 최소의 자원양 값은 $b_k = a_1 l_k$이다. 이 때의 최적해는 다음과 같이 결정된다; $x_1 = l_k,\ x_j = 0,\ j\in J_k \setminus \{1\}$. 또한, 제약 (2.4)가 등식으로 만족이 되는 최대한의 자원양은 다음의 정리 1과 같다.

**정리 1** (Eiselt) 부문제 (SP$_k$)에서 $b_k$가 $a_1 \le b_k \le [l_k \Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i)]/[\Sigma_{i\in J_k}(1/c_i)]$일 때 부문제의 최적해 $\bar{x}_j$ 및 최적목적함수치 $\bar{z}_k$는 다음과 같다.

$$\bar{x}_1 = [l_k \Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i) - b_k \Sigma_{i\in J_k}(1/c_i)]/[\Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i) - a_1 \Sigma_{i\in J_k}(1/c_i)] \tag{2.6}$$
$$\quad + \ (b_k - a_1 l_k)/c_1[\Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i) - a_1 \Sigma_{i\in J_k}(1/c_i)],$$

$$\bar{x}_j = (b_k - a_1 l_k)/c_j[\Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i) - a_1 \Sigma_{i\in J_k}(1/c_i)], \qquad j\in J_k\setminus\{1\}, \tag{2.7}$$

$$\bar{z}_k = (b_k - a_1 l_k)/[\Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i) - a_1 \Sigma_{i\in J_k}(1/c_i)]. \tag{2.8}$$

(증명) 정리 1은 논문[4]의 Lemma 1과 동일하므로 증명은 생략한다. □

다음으로 부문제 (SP$_k$)에 배분된 자원양 $b_k$가 정리 1에서 제시된 상한치보다 커질 경우에는 제약
(2.4)가 부등식으로 만족이 되며 이 경우는 Kaplan[6]의 해가 최적으로 발생이 된다. 즉, 최적해는 다음과 같이 발생된다.

$$\bar{x}_j = b_k / c_j \Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i),\ j\in J_k,\quad \bar{z}_k = b_k / \Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i). \tag{2.9}$$

그러나 부문제 (SP$_k$)에 배분될 수 있는 자원양 $b_k$는 제약 (2.3)에 의해 최대로 커질 수 있는 상한치가 결정이 된다. 다음 정리 2는 자원양의 상한치를 결정한다.

**정리 2** 부문제 (SP$_k$)에 배분될 수 있는 $b_k$의 상한치는 $u_k \Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i)/\Sigma_{i\in J_k}(1/c_i)$이다.

(증명) 부문제 (SP$_k$)의 자원양 $b_k$가 $l_k \Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i)/\Sigma_{i\in J_k}(1/c_i)$보다 커지면 Kaplan의 해 (2.9)가 최적이 되며 이 때 다음이 성립한다. 즉, $c_i\bar{x}_i = c_j\bar{x}_j = \bar{z},\ i,\ j\in J_k$이다. 따라서 제약 (2.3)로부터 $\Sigma_{j\in J_k}\bar{x}_j = [b_k/\Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i)]\Sigma_{i\in J_k}(1/c_i) \le u_k$ 이다. 따라서 정리가 성립한다. □

각 부문제에 배분될 수 있는 자원양의 상한치가 정리 2와 같이 구해지므로 문제 (P)의 최적목적치에 대한 상한치는 다음의 정리 3과 같이 결정된다.

**정리 3** 문제 (P)의 최적목적치 $\bar{z}$에 대한 상한치 $z_u$는 다음에 의해 결정된다.

$$z_u = \min\ [b / \Sigma_{i\in N}(a_i/c_i),\ u_1/\Sigma_{i\in J_1}(1/c_i), \ldots,\ u_t/\Sigma_{i\in J_t}(1/c_i)]$$

(증명) 문제 (P)에서 최적목적치의 상한치 $z_u$는 제약 (1.4)가 모두 부등식으로 만족될 때 발생하며 이 때 $c_1\bar{x}_1 = \ldots = c_n\bar{x}_n = \bar{z}$가 성립한다. 우선, 제약 (1.2)로부터 $\Sigma_{j\in N}(a_j\bar{z}/c_j) \le b$이므로 $\bar{z} \le b/\Sigma_{i\in N}(a_i/c_i)$가 얻어진다. 다음으로, 제약 (1.3)으로부터 $\Sigma_{j\in J_k}\bar{x}_j = \Sigma_{j\in J_k}(\bar{z}/c_j) \le u_k$이므로 $\bar{z} \le u_k/\Sigma_{i\in J_k}(1/c_i)$가 얻어진다. 따라서, $z_u$는 각 $\bar{z}$에 대한 상한치들중 최소값으로 결정되므로 정리가 성립한다. □

## 3. 해법 및 계산복잡도 분석

각 부문제 (SP$_k$)의 목적함수치 $z_k$는 배분된 자원양 $b_k$의 함수로 표현될 경우 2장의 정리 1 및 Kaplan[6]의 해에 의하여 절점이 최대로 하나인 부분 선형직선으로 나타난다. 즉, $z_k = \min\{\alpha_k + \beta_k b_k,\ \gamma_k b_k\}$이다. 여기서 각 계수값은 다음과 같다.

$$\alpha_k = -a_1 l_k / [\Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i) - a_1\Sigma_{i\in J_k}(1/c_i)], \tag{3.1}$$

$$\beta_k = 1 / [\Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i) - a_1\Sigma_{i\in J_k}(1/c_i)], \tag{3.2}$$

$$\gamma_k = 1/\Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i). \tag{3.3}$$

부분 선형직선의 절점은 목적함수치 $\hat{z}_k = \alpha_k\gamma_k/(\gamma_k - \beta_k)$와 자원양 $\hat{b}_k = \alpha_k/(\gamma_k - \beta_k)$에 해당된다. 여기서 각 부문제에 배분될 수 있는 자원양의 범위는 2장의 정리 1 및 정리 2에 의해 결정된다. $\tilde{u}_k = u_k\Sigma_{i\in J_k}(a_i/c_i)/\Sigma_{i\in J_k}(1/c_i)$이라 하자.

문제 (P)는 다음의 주문제(master problem) (MP)로 변환이 되며 이 두 문제는 서로 같은 최적해를 갖는 동등한 문제이다.

$$\text{(MP)}\quad \text{maximize}\quad z = \min_{k=0,\ldots,t}\{\ \min\{\alpha_k + \beta_k b_k,\ \gamma_k b_k\}\}$$
$$\text{subject to}\quad \Sigma_{k=0}^{t} b_k \le b,$$
$$0 \le b_k \le \tilde{u}_k,\ k = 0, \ldots, t.$$

위 문제 (MP)에서 $k=0$일 때의 목적함수는 $z_0 = \gamma_0 b_0$, 절점은 $\hat{z}_0 = 0$, 그리고 배분자원양 $b_0$의 상한치는 $\tilde{u}_0 = \infty$가 된다. 이것은 해당되는 부문제가 집합 $J_0$에 속하는 변수들로 이루어진 문제이므로 일반하한제약이나 일반상한제약이 존재하지 않는 문제이기 때문이다. 문제 (MP)에 대한 해법을 개발하기 위하여 임의의 목적함수치가 주어졌을 때 부문제별로 대응되는 자원양과의 관계를 파악한다. 이 결과는 아래에 제시할 식 (3.4)로 나타난다.

먼저 각 부문제들을 재배열하여 해당하는 절점들이 $\hat{z}_0 \le \ldots \le \hat{z}_t$가 되도록 조정한다. 한 부문제의 목적함수치는 최대로 하나의 절점을 가진 부분 선형직선이므로 절점 $\hat{z}_k$를 기준으로 작은 값에서는 목적함수치가 $z_k = \alpha_k + \beta_k b_k$에 해당되고, 큰 값에서는 $z_k = \gamma_k b_k$에 해당된다. 따라서 임의의

한 구간 $[\hat{z}_l, \hat{z}_{l+1}]$에 속하는 목적함수치가 주어졌을 때 각 부문제 $(SP_k)$로부터 대응되는 자원양 $b_k$를 구하기 위하여 각 부문제에서 적용되는 목적함수식은 $k > l$인 경우는 $z_k = \alpha_k + \beta_k b_k$이며, $k \le l$인 경우는 $z_k = \gamma_k b_k$이다. 그러므로 문제 (P)에서 한 목적함수치 $\hat{z}_l$에 해당하는 총 자원양 $Tb_l$ 은 다음과 같이 계산된다.

$$Tb_l = \Sigma_{k=0}^{t} b_k = \Sigma_{k=0}^{l} (z_k / \gamma_k) + \Sigma_{k=l+1}^{t} (z_k - \alpha_k) / \beta_k \tag{3.4}$$

문제 (MP)에서 각 부문제들에 자원을 배분할 때 주의할 점은 2장의 정리 3에 의해 문제 (P)의 최적목적치는 상한치 $z_u$를 넘지 못하므로 주 제약의 자원양 $b$ 전부가 배정되지 못하는 경우도 발생가능하다.

다음은 정리 1, 정리 2, 및 정리 3의 특성을 활용하여 문제 (P)의 최적해를 신속하게 찾는 해법을 제시한다.

## 해 법

0. 문제 (P)의 계수들로부터 식 (3.1), (3.2), (3.3)을 사용하여 모수들 $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ 및 절점들 $\hat{z}_k,\ k=0, \ldots, t$의 값을 구한다. 다음에 각 절점들이 $\hat{z}_0 \le \ldots \le \hat{z}_t$이 되도록 해당되는 부문제들의 지수들을 재배열한다. 또한, $z_u$의 값을 계산한다.
1. 이진탐색법을 사용하여 $Tb_v \le b < Tb_{v+1}$가 되는 목적치의 구간 $[\hat{z}_v, \hat{z}_{v+1}]$과 해당되는 지수 $v$를 찾는다.
2. $\hat{z}_v \ge z_u$이면 이진탐색을 사용하여 $\hat{z}_y \le z_u < \hat{z}_{y+1}$가 성립하는 지수 $y$를 찾고 $l = y$라 한다. 이때 최적목적치는 $\bar{z} = z_u$ 이다. 단계 3으로 간다.

   $\hat{z}_v < z_u$이면 $l = v$라 하고 다음과 같이 $z_b$를 계산한다. 이때 최적목적치 $\bar{z}$는 $\bar{z} = \min\{z_u, z_b\}$로 결정된다. 단계 3으로 간다.

   $$z_b = [b + \Sigma_{k=l+1}^{t} (\alpha_k / \beta_k)] \,/\, [\Sigma_{k=0}^{l} (1/\gamma_k) + \Sigma_{k=l+1}^{t} (1/\beta_k)],$$
3. 각 부문제에 대한 최적배분양 $\bar{b}_k$는 다음과 같이 결정되며 이에 따라 최적해 $\bar{x}_j$는 식 (2.6), (2.7), (2.8), (2.9)에 의해 구해진다.

   $$\bar{b}_k = \bar{z}/\gamma_k,\ k \le l,\ \ \bar{b}_k = (\bar{z} - \alpha_k)/\beta_k,\ k > l.$$

이상에서 제시된 해법이 문제 (P)의 최적해를 얼마나 효율적으로 찾는 가를 파악하기 위해서 제시된 해법의 각 계산단계에 소요되는 계산복잡도를 분석한다.

**정리 4** 문제 (P)에 대해 제시된 해법의 계산복잡도는 O(nlogn)이다.

(증명) 해법의 단계 0에서 모든 모수들을 구하는데 O(n)의 계산이 소요된다. 각 절점들을 구하고 이를 크기순으로 재배열하는 데에는 O(tlogt)의 시간이 소요된다. 단계 1에서 임의의 한 목적함수치 구간 $[\bar{z}_{v-1}, \bar{z}_v]$에서 $b$가 $Tb_{l-1} \le b < Tb_l$ 인지를 판단하기 위하여 식 (3.4)를 계산하는데 O(t)의

계산이 필요하며 전 목적함수치의 구간에 대해서 조사하는데에 절점들이 이미 크기순으로 배열되어 있으므로 O(logt)의 계산이 중복적으로 소요된다. 따라서, 총 O(tlogt)의 계산단계가 소요된다. 단계 2에서 목적함수치 $z_u$가 포함되는 구간을 찾는데에는 O(logt)가 필요하다. 또한 $z_b$를 계산하는데 상수회의 계산이 소요된다. 단계 3에서 최적해는 각 변수별로 계산되므로 최대 O(n)의 계산이 요구된다. 이상으로부터 단계 0 및 단계 1에서 O(tlogt)의 계산이 소요되고, 단계 2에서 O(logt), 단계 3에서 O(n)이 소요된다. 부문제의 개수 $t$는 변수의 개수 n보다 항상 작으므로 max[O(tlogt), O(n)] ≤O(nlogn)이다. 따라서 해법에 소요되는 총 계산은 O(nlogn)이 된다. □

## 4. 수치예제

다음 문제 (P)의 최적해를 구하기 위하여 해법을 적용한다.

$$\text{(P)} \quad \text{maximize} \quad z = \min_{j \in N} \{c_j x_j\}$$
$$\text{subject to} \quad \Sigma_{j \in N} a_j x_j \le 30,$$
$$\Sigma_{j \in J_k} x_j \le 2, \ k = 1, 2, 3,$$
$$\Sigma_{j \in J_k} x_j \ge 1, \ k = 1, 2, 3,$$
$$x_j \ge 0, \ j \in N.$$

여기서, $N = \{1, 2, \ldots, 15\}$, $J_0 = \{1, 2, 3\}$, $J_1 = \{4, 5, 6, 7\}$, $J_2 = \{8, 9, 10, 11\}$, $J_3 = \{12, 13, 14, 15\}$이며, 각 계수들 $c_j$, $a_j$의 값은 다음의 표와 같다.

| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_i$ | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 5 | 3 | 4 | 5 | 7 | 3 | 6 | 9 | 10 |
| $a_i$ | 4 | 7 | 9 | 2 | 4 | 5 | 7 | 3 | 7 | 12 | 17 | 7 | 13 | 21 | 28 |

<단계 0>

$\alpha_1 = -0.82759$, $\beta_1 = 0.41379$, $\gamma_1 = 0.20067$, $\hat{z}_1 = 0.77924$,

$\alpha_2 = -0.625$, $\beta_2 = 0.20833$, $\gamma_2 = 0.13195$, $\hat{z}_2 = 1.07972$,

$\alpha_3 = -1.50358$, $\beta_3 = 0.21480$, $\gamma_3 = 0.10381$, $\hat{z}_3 = 1.40631$,

그리고, $\gamma_0 = 0.09524$, $\hat{z}_0 = 0$이다. 또한, $\hat{z}_0 \le \hat{z}_1 \le \hat{z}_2 \le \hat{z}_3$가 성립한다.

$z_u = \min\{0.918, 1,559, 2.160, 2.813\} = 0.918$.

<단계1>

$Tb_1 = 29.495$, $Tb_2 = 37.109$, $Tb_3 = 46.064$, 따라서 이진탐색을 사용하면 $Tb_1 \le b < Tb_2$이므로 $v = 1$이다.

<단계2>

$\hat{z}_v \le z_u$이므로 $l = 1$로 한다. $z_b$는 $z_b = 0.80$으로 계산된다. 따라서 최적목적치는 $\bar{z} = \min\{0.918, 0.80\} = 0.80$이다.

<단계3>

각 부문제에의 최적분배량 $b_k$ 및 최적해 $\overline{x}_j$는 다음과 같다.

$\overline{b}_0=8.42,\ \overline{b}_1=4.00,\ \overline{b}_2=6.85,\ \overline{b}_3=10.73,$

$\overline{x}_1=0.8,\ \overline{x}_2=0.4,\ \overline{x}_3=0.267,$

$\overline{x}_4=0.4,\ \overline{x}_5=0.267,\ \overline{x}_6=0.2,\ \overline{x}_7=0.16,$

$\overline{x}_8=0.525,\ \overline{x}_9=0.2,\ \overline{x}_{10}=0.16,\ \overline{x}_{11}=0.115,$

$\overline{x}_{12}=0.699,\ \overline{x}_{13}=0.134,\ \overline{x}_{14}=0.089,\ \overline{x}_{15}=0.08.$

## 5. 결 론

본 연구에서는 주 제약외에 일반상한제약과 일반하한제약이 동시에 존재하고 최대최소의 목적함수를 갖는 새로운 자원배분문제를 제시하고 이에 대한 효율적인 해법을 제시하였다. 이러한 문제는 정부 등의 공공기관에서 소유하고 있는 자금을 각 국방비나 국민경제등 필수적으로 투자해야 하는 상황에 적용된다. 공공기관이므로 각 배분해야 할 부문별로 가장 최소의 복지가 발생되는 부문을 중심으로 다같이 향상되도록 의사결정이 이루어 진다.

본 연구에서 제시한 문제는 기존의 연구[4]를 특수한 경우로 포함하는 일반적인 문제이다. 연구[4]에서는 일반하한제약만을 포함하는 문제를 제시하고 이에 대한 해법으로 O(nlogn)의 해법을 제시하였으나 본 연구에서는 일반하한제약과 함께 일반상한제약이 동시에 고려된 일반문제의 특성을 파악하므로써 마찬가지로 신속하게 최적해를 구하는 O(nlogn)의 해법을 제시하였다.

## 참 고 문 헌

[1] 원 중 연, "확장된 다중선택 선형배낭문제의 신속한 해법연구," 「대한산업공학회지」, 제22권, 제3호, pp. 365-375, 1996.

[2] 원 중 연, "단순상한 및 확장된 일반상한제약을 갖는 선형배낭문제의 O($n^2$logn) 해법," 「한국경영과학회지」, 1997, 6.(심사중).

[3] Dyer, M. E., "An O(n) Algorithm for the Multiple-Choice Knapsack Linear Problems," *Math. Progr.* 29, pp. 57-63, 1984.

[4] Eiselt, H. A., "Continuous Maximin Knapsack Problems with GLB Constraints," *Math. Progr.* 36, pp. 114-121, 1986.

[5] Glover, F. and D. Klingman, " An O(nlogn) Algorithm for LP Knapsacks with GUB Constraints," *Math. Progr.* 17, pp. 345-361, 1979.

[6] Kaplan, S., "Applications of Programs with Maximin Objective Functions to Problems of Optimal Resource Allocation," *Opns. Res.* 22, pp. 802-807, 1974.

[7] Pisinger, D., "A Minimal Algorithm for the Multiple-Choice Knapsack Problem," *European J. Opnl. Res.* 83, 394-410, 1995.

[8] Posner M. E. and C. T. Wu, "Linear Max-min Programming," *Math. Progr.* 20, pp. 166-172, 1981.

[9] Zemel, E., "An O(n) Algorithm for the Linear Multiple Choice Knapsack Problem and Related Problems," *Inform. Proc. Letters.* 18, pp. 123-128, 1984.