퍼지모수들과 퍼지항등목표들을 가지는 다목적 비선형 의사결정
- Multiobjective Nonlinear Decision Making with Fuzzy Parameters and Fuzzy Equal Goals -

윤 연 근*
Yun, Yeon-Geun
남 현 우**
Nam, Hyun-Woo
이 상 완*
Lee, Sang-Wan

Abstract

In this paper, we presents the method for finding the compensatory solution for fuzzy multiobjective nonlinear programming problem with fuzzy parameters involved in the problem-formulation process and fuzzy equal goals of the decision maker for each of the objective functions. The fuzzy parameters in the objective functions and the constraints characterized by fuzzy numbers. The proposed method can be applied to case with multiobjective problems and guarantee an efficient solution. An illustrative numerical example is presented.

1. 서 론

현실세계에서의 많은 의사결정 문제들은 목표들과 제약에 모호성을 가지고 다수의 상충(trade-off)된 목적들을 가지는 다목적 비선형 의사결정문제가 대부분이다. 이러한 문제는 목적들이 본래 상충되기 때문에 최적해는 존재하지 않으므로 주어진 상황에서 의사결정자의 선호도를 만족하여 주는 파레토 최적해 집합중에서 의사결정자의 만족해를 찾아야 한다.

그러나 현실의 의사결정상황을 잘 표현하는 다목적 비선형 의사결정문제를 정식화 할 때 현실시스템의 여러 가지 요소들이 목적함수와 제약식의 표현에 반영 되어야 한다. 이들 목적함수와 제약식들은 전문가(expert)에 의하여 가능값들이 할당되어야 하는 많은 모수(parameter)들을 포함한다. 대부분 이들 모수들의 가능값들이 전문가에게 모호하게 알려져 있으므로 퍼지수(fuzzy number)로 알려진 실수상의 퍼지부분집합(fuzzy subsets)에 따라 표현되어지는 퍼지수치자료로 모수들을 해석하는 것이 더욱 타당할 것이다. 그러므로 퍼지모수들을 포함하는 다목적 비선형 의사결정문제가 더욱 현실적으로 고찰되어 질 수 있다.

또한 각 목적에 할당되는 목적함수값들은 고정되어 있지 않고 "대략 어느정도로 하고싶다"라고 하는 것과 같이 모호성이 내포된 퍼지언어변수(fuzzy lingustic variable)로 표현되는 퍼지항등(fuzzy equal) 목표들을 가지는 경우가 많으므로 이를 고려하는 것도 필요하다.

따라서 전문가에 의해서 할당되는 퍼지모수와 의사결정자에 의해서 할당되는 퍼지항등목표

* 동아대학교 산업공학과
** 경동전문대학 산업안전관리과

들을 가지는 다목적 비선형 의사결정문제를 해결하여 적절한 의사결정자의 만족해를 찾는 방법론이 필요하다.

Sakawa등은 퍼지모수를 가지는 여러 가지 다목적 문제를 해결하기 위한 확장된 연구결과들을 발표하였다.[1, 2, 3] 그러나 이들 연구들은 대화과정이 너무 복잡하고 의사결정자에게 제공되는 정보가 매우 어렵다는 한계를 가지고 있다.

Li[4]는 퍼지모수를 가지는 다목적 선형계획문제를 해결하는 방법론을 제시하였다. 그러나 이 연구는 선형 구성함수만을 사용했고 퍼지목표로 표현된 목적들에 대한 전체 만족도를 절충하는데 사용되는 절충연산자를 최소연산자(min operator)를 사용함으로써 각 목적함수에 대한 구성값들의 교환을 허용하지 않으므로 서로 영향을 미치지 않고 비절충적이다. 그러므로 변형된 문제의 해가 유일하지 않을 경우 원 문제에 대한 유효해를 보장할 수 없으므로 전체만족도를 절충하는 유일한 절충연산자가 아니다라는 단점을 가지고 있다. 다목적 의사결정문제에서는 각 목적들이 상충되기 때문에 하나의 목적함수의 개선은 다른 하나 이상의 목적함수의 회생에 의해서만 가능하므로 각 목적의 만족정도를 나타내는 구성함수가 서로 영향을 미쳐야 한다. 그러므로 적절한 절충연산자가 고려되어야 한다.

이에 본 연구에서는 모수에 나타나는 전문가의 모호성과 각 목적함수에 대한 의사결정자의 퍼지항등목표들을 간단한 대화를 통하여 의사결정자의 선호정보를 이끌어 내고 다양한 형태의 구성함수들을 충분히 반영하여 주고 적절한 절충연산자로 통합하여 최상의 만족해를 산출하는 방법론을 제시한다. 그리고 제시된 방법을 이용한 수치예를 보인다.

2. 다목적 의사결정 방법

퍼지모수와 퍼지항등목표를 가지는 퍼지 다목적 비선형 의사결정 계획문제는 다음과 같이 정식화 된다.

$$\text{fuzzy equal } f(x,\widetilde{a}) = (f_1(x,\widetilde{a_1}),\ f_2(x,\widetilde{a_2}),\ \cdots,\ f_k(x,\widetilde{a_k})) \tag{1}$$

subject to

$$x \in X = \{x \in R^n \mid \widetilde{b_j}x \circledcirc \widetilde{c_j}\ ,\ x \geq 0\}$$

여기서 $\widetilde{a_i} = (\widetilde{a_{i1}}, \cdots, \widetilde{a_{ip_i}})$, $\widetilde{b_j} = (\widetilde{b_{j1}}, \cdots, \widetilde{b_{jq_j}})$, $\widetilde{c_j}$는 각각 목적함수 $f_i(x, \widetilde{a_i})$와 제약 $\widetilde{b_j}x \circledcirc \widetilde{c_j}$에 포함되는 퍼지모수의 벡터이고 ◎는 연산자 "≤" 또는 "≥", 또는 "="를 나타낸다. 퍼지수 $\widetilde{a_{ir}}(i=1,\cdots,k\ ;\ r=1,\cdots,p_i)$, $\widetilde{b_{js}}(j=1,\cdots,m\ ;\ s=1,\cdots,q_j)$, $\widetilde{c_j}$는 구성함수(membership function) $\mu_{\widetilde{a_{ir}}}(a_{ir})$, $\mu_{\widetilde{b_{js}}}(b_{js})$, $\mu_{\widetilde{c_j}}(c_j)$를 가지는 퍼지수들이다. 이러한 퍼지모수들은 Dubois와 Prade[4]에 의하여 소개된 퍼지수(fuzzy number)로 특성 지워진다.

$(x)^{\beta}_{\alpha}$를 식(1)의 한 해로 두자. 여기서 α는 퍼지 계수들이 실행가능한 가능성의 최소 수준을 나타낸다. β는 그 해가 α-수준의 실행가능계수들에 기초를 두고 모든 퍼지목표들을 만족시키는 정도를 나타낸다. Bellman과 Zadeh의 퍼지모수 결합규칙(rule of conjunction)에 따라 α를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\alpha = \min\{\mu_{\widetilde{a_{ir}}}(a_{ir}), \mu_{\widetilde{b_{js}}}(b_{js}), \mu_{\widetilde{c_j}}(c_j) \mid i=1,\cdots,k, r=1,\cdots,p_i, j=1,\cdots,m, s=1,\cdots,q_j\} \tag{2}$$

이것은 퍼지계수들의 집합속에 인가되는(inherited) 실행 가능성이 시스템내의 가장 불가능한 요소의 가능성과 동등하다는 것을 의미한다. 계수의 가능성 수준이 높으면 높을수록 계수에 대한 제한이 보다 강해진다.

$(\widetilde{a_{ir}})_\alpha$, $(\widetilde{b_{js}})_\alpha$, $(\widetilde{c_j})_\alpha$ 를 각 퍼지수의 α-수준집합(level set) 또는 α-절단(cut)으로 두자.

정의 1. α-수준집합

퍼지수 $\widetilde{a_{ir}}$ $(i=1,\cdots,k\ ;\ r=1,\cdots,p_i)$, $\widetilde{b_{js}}$ $(j=1,\cdots,m\ ;\ s=1,\cdots,q_j)$, $\widetilde{c}_j$의 α-수준집합은 그것들의 구성함수의 정도(degree of membership function)가 수준 α를 초과하는 보통집합(ordinary set) $L_\alpha(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ 로 정의된다.

$L_\alpha(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})=\{(a,b,c) \in S(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})\subset R \mid \mu_{\widetilde{a_{ir}}}(a_{ir}) \geq \alpha\ ; \mu_{\widetilde{b_{js}}}(b_{js}) \geq \alpha\ ;\ \mu_{\widetilde{c_j}}(c_j) \geq \alpha\}$ (3)

여기서 $S(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ 는 퍼지수 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ 의 지지(support)이다. α-수준 집합들은 다음의 특성을 갖는다. $L_{\alpha_1}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) \supset L_{\alpha_2}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})$ 이면 $\alpha_1 \leq \alpha_2$이다.

$(\widetilde{a_{ir}})^L_\alpha$ 을 퍼지수 $\widetilde{a_{ir}}$의 α-절단의 하한, $(\widetilde{a_{ir}})^U_\alpha$를 퍼지수 $\widetilde{a_{ir}}$의 α-절단의 상한으로 두자. 이때 $(\widetilde{a_{ir}})^L_\alpha \leq (\widetilde{a_{ir}})_\alpha \leq (\widetilde{a_{ir}})^U_\alpha$이다.

퍼지항등목표에 대하여 주어진 α값에 대하여 목적함수들 $f(x,\tilde{a})$는 좌측과 우측이 다른 함수를 사용하므로 다음과 같이 대체될 수 있다.

· 왼쪽(Left)

$$\text{fuzzy equal } f(x,\tilde{a})_\alpha \quad \leftrightarrow \quad \begin{matrix} \text{fuzzy min } f(x,\tilde{a})^{L,Left}_\alpha \\ \text{fuzzy max } f(x,\tilde{a})^{L,Left}_\alpha \end{matrix} \tag{4}$$

· 오른쪽(Right)

$$\text{fuzzy equal } f(x,\tilde{a})_\alpha \quad \leftrightarrow \quad \begin{matrix} \text{fuzzy min } f(x,\tilde{a})^{U,Right}_\alpha \\ \text{fuzzy max } f(x,\tilde{a})^{U,Right}_\alpha \end{matrix} \tag{5}$$

또한 부등제약에 대하여 식 (6)이 성립한다.

$$\sum_{s=1}^{q_j} \widetilde{b_{js}} x_s \leq \widetilde{c}_j \quad \leftrightarrow \quad \sum_{s=1}^{q_j} (\widetilde{b_{js}})^L_\alpha x_s \leq (\widetilde{c}_j)^U_\alpha, \quad j=1,\cdots,m \tag{6}$$

식 (6)은 연산자 "≤ "를 갖는 제약들에 대하여 b_{js}가 보다 적고 c_j가 보다 크면 클수록 제약들이 보다 완화된다는 사실에 근거를 두고 있다. 연산자 "≥"를 갖는 제약의 경우 식 (6)의 좌, 우 상 하한을 교환하면 되지만 등식의 제약을 가지는 경우는 α가 1 부터 0 까지 꾸준히 증가하지않기 때문에 퍼지계수의 등식제약을 다루기 위해서는 식 (7), (8)을 동시에 이용해야 한다.

$$\sum_{s=1}^{q_j} (\widetilde{b_{js}})^L_\alpha x_s \leq (\widetilde{c}_j)^U_\alpha \tag{7}$$

$$\sum_{s=1}^{q_j} (\widetilde{b_{js}})^U_\alpha x_s \geq (\widetilde{c}_j)^L_\alpha \tag{8}$$

이상의 이유에 근거해서 식(1)은 주어진 α에 대하여 다음의 문제로 변환될 수 있다.

$$\text{fuzzy equal } f(x,\tilde{a})_\alpha = (f_1(x,\widetilde{a_1})_\alpha,\ f_2(x,\widetilde{a_2})_\alpha,\ \cdots,\ f_k(x,\widetilde{a_k})_\alpha) \tag{9}$$

subject to

$$\sum_{s=1}^{q_j} (\widetilde{b_{js}})^L_\alpha x_s \leq (\widetilde{c}_j)^U_\alpha,\ j=1,\cdots,m\ ,\ s=1,\cdots,q_j$$

Li는 최대-최소 의사결정을 이용하여 어떤 주어진 값 α에 대하여 식 (9)는 다목적을 가지는 확정적인 비선형문제가 되는 것으로 표현했다.

$$\max \beta \tag{10}$$

subject to

$$\beta \leq \mu_{f_i}(x,\tilde{a})_\alpha$$

$$\sum_{s=1}^{q_j}(\widetilde{b_{js}})_\alpha^L x_s \le (\widetilde{c_j})_\alpha^U,\ j=1,\cdots,m\ ,\ s=1,\cdots,q_j$$

$$\beta \in [\ 0,1\ ]$$

식 (10)에서 볼 수 있는 바와 같이 어떤 $\mu_{f_i}(x,\tilde{a})_\alpha$에 대하여 β가 결정되면 다른 $\mu_{f_i}(x,\tilde{a})_\alpha$ 값들은 어떤 값이 되어도 의사결정에는 아무런 영향을 미치지 못하게 된다. 그러므로 본 연구에서는 각 구성값들의 교집합을 반영하는 곱 연산자를 이용하여 식 (11)과 같이 정식화 한다.

$$\max\ \beta = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{11}$$

subject to

$$\lambda_i \le \mu_{f_i}(x,\tilde{a})_\alpha$$

$$\sum_{s=1}^{q_j}(\widetilde{b_{js}})_\alpha^L x_s \le (\widetilde{c_j})_\alpha^U,\ j=1,\cdots,m\ ,\ s=1,\cdots,q_j$$

$$\beta \in [\ 0,1\ ]$$

여기서 $\mu_{f_i}(x,\tilde{a})_\alpha$는 α-절단된 $f_i(x,\tilde{a})$의 구성함수값이다. 퍼지항등(fuzzy equal)은 퍼지최소(fuzzy min)와 퍼지최대(fuzzy max) 각각에 대응하는 구성함수에 따라 규정된다. 각 목표에 대한 구성함수는 의사결정자와의 대화를 통하여 왼쪽과 오른쪽에 대하여 개별적으로 결정할 수 있고 정량화 될 수 있다. 여기서 의사결정자의 각 목적함수에 대한 다양한 선호구조를 파악하기 위해서는 다양한 형태의 구성함수가 이용되어야 한다. 본 연구에서는 Sakawa가 연구에서 이용한 5가지 형태의 구성함수, 즉 선형(linear)구성함수, 지수(exponential)구성함수, 쌍곡선(hyperbolic)구성함수, 역쌍곡선(hyperbolic inverse)구성함수, 부분선형(piecewise linear)구성함수를 이용하여 의사결정자의 다양한 퍼지목표를 정량화 한다. 만약 $\mu_{f_i}(x,\tilde{a})_\alpha$가 왼쪽으로서 지수구성함수 형태로 선택되면

$$\mu_{f_i}(x,\tilde{a})_\alpha = u_i\left[1-\exp\frac{(-w_i(f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{L,Left}-f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{L,Left,min}))}{(f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{L,Left,max}-f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{L,Left,min})}\right]$$ 로 주어진다.

각 목적함수 $f_i(x,\tilde{a})_\alpha(i=1,\cdots,k)$에 대하여 의사결정자로부터 선호하는 구성함수 $\mu_{f_i}(x,\tilde{a})_\alpha$를 이끌어내기 위하여 각 목적함수에 대하여 왼쪽, 오른쪽에 대한 각각의 최대목적함수값 $f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{L,Left,max}$, $f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{U,Right,max}$ 과 최소목적함수값 $f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{L,Left,min}$ $f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{U,Right,min}$을 다음과 같이 산출한다.

$$f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{L,Left,min} = \min f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{L,Left}\ ,\quad i = 1,\cdots,k \tag{12}$$

$$f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{L,Left,max} = \max f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{L,Left}\ ,\quad i = 1,\cdots,k \tag{13}$$

$$f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{U,Right,min} = \min f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{U,Right}\ ,\quad i = 1,\cdots,k \tag{14}$$

$$f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{U,Right,max} = \max f_i(x,\tilde{a})_\alpha^{U,Right}\ ,\quad i = 1,\cdots,k \tag{15}$$

subject to

$$\sum_{s=1}^{q_j}(\widetilde{b_{js}})_\alpha^L x_s \le (\widetilde{c_j})_\alpha^U,\ j=1,\cdots,m\ ,\ s=1,\cdots,q_j$$

이제 τ를 퍼지목표들과 퍼지계수들을 고려하는 상황에서 해 $(x)_\alpha^\beta$에 대한 절충적인 전체 만족도로 둔다.

$$\tau = \alpha = \beta \tag{16}$$

식 (11)과 (16)으로부터 τ의 값은 α를 모수적으로 고찰함으로써 얻어질 수 있다. $\alpha=\beta$가 될 때 까지의 많은 반복은 계산상의 어려움을 제공하므로 본 연구에서는 이분법(bisection method)을 이용하여 $|\ \alpha - \beta\ | \leq 0.01$ 일 경우에 결과를 의사결정자의 만족해로 취한다.

이상에서 언급된 설명을 기초로 퍼지모수와 퍼지항등목표를 갖는 다목적 비선형 의사결정문제를 해결함에 있어 전체 만족수준을 충분히 반영하는 만족해를 찾는 절차는 다음과 같다.

단계1) 목적함수와 제약식을 정식화 한다.

단계2) 각 목적함수의 왼쪽과 오른쪽에 대한 각각의 최대목적함수값 $f_i(x, \tilde{a})_{\alpha}^{L,Left,max}$, $f_i(x, \tilde{a})_{\alpha}^{U,Right,max}$과 최소목적함수값 $f_i(x, \tilde{a})_{\alpha}^{L,Left,min}$, $f_i(x, \tilde{a})_{\alpha}^{U,Right,min}$을 구한다.

단계3) 각 목적함수에 대하여 의사결정자가 만족하는 구성정도의 변화율을 고려하여 의사결정자는 왼쪽과 오른쪽 각각의 구성함수 형태를 결정한다.

단계4) 각 목적함수의 구성함수를 정식화 한다.

단계5) 각 목적함수에 대한 구성정도를 결합하여 α의 변화에 따른 β값을 곱 연산자를 사용하여 해를 구한다. 만약 $\alpha = \beta$이면 그 때의 해가 만족해가 된다.

3. 수 치 예

퍼지항등과 퍼지모수들을 가지는 목적들과 제약식들이 다음과 같이 정식화 된다고 가정한다.

$$\text{fuzzy equal } f_1(x,\tilde{a}) = (x_1+5)^2 + \widetilde{a_{11}}x_2^2 + 2(x_3 - \widetilde{a_{12}})^2$$
$$\text{fuzzy equal } f_2(x,\tilde{a}) = \widetilde{a_{21}}(x_1 - 45)^2 + (x_2 + 15)^2 + 3(x_3 + \widetilde{a_{22}})^2$$
$$\text{fuzzy equal } f_3(x,\tilde{a}) = \widetilde{a_{31}}(x_1 + 20)^2 + \widetilde{a_{32}}(x_2 - 45)^2 + (x_3 + 15)^2$$

subject to

$$x \in X = \{(x_1, x_2, x_3) \mid \widetilde{b_{11}}\, x_1^2 + \widetilde{b_{12}}\, x_2^2 + \widetilde{b_{13}}\, x_3^2 \leq \widetilde{100},\ 0 \leq x_i \leq 10\ ,\ i = 1,2,3\}$$

모든 퍼지수들에 대한 정보는 표 1에서 요약된다.

표 1. 수치예에 대한 퍼지수

계 수	p_1	p_2	p_3	p_4	좌측	우측
$\tilde{a}_{11}$	3.8	4.0	4.0	4.3	L	E
$\tilde{a}_{12}$	48.5	50.0	50.0	52.0	E	E
$\tilde{a}_{21}$	1.85	2.0	2.0	2.2	E	L
$\tilde{a}_{22}$	18.2	20.0	20.0	22.5	L	E
$\tilde{a}_{31}$	2.9	3.0	3.0	3.15	E	L
$\tilde{a}_{32}$	4.7	5.0	5.0	5.35	L	L
$\tilde{b}_{11}$	0.9	1.0	1.0	1.1	E	E
$\tilde{b}_{12}$	0.8	1.0	1.0	1.2	E	E
$\tilde{b}_{13}$	0.85	1.0	1.0	1.15	E	L
$\tilde{c}_1$	90	100	100	105	L	L

표 1에서 퍼지계수를 표현하는 좌・우측의 L은 구성함수형태가 선형구성함수, E는 지수구성함수임을 나타낸다.

먼저 각 목적함수에 대한 최대목적함수값 $f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{L,Left,max}$, $f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{U,Right,max}$과 최소목적함수값 $f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{L,Left,min}$, $f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{U,Right,min}$을 구한다. 예를들어 α=0.2로 두자.

$f_i(x, \tilde{a})_{0.2}^{L,Left,max}$, $f_i(x, \tilde{a})_{0.2}^{U,Right,max}$, $f_i(x, \tilde{a})_{0.2}^{L,Left,min}$, $f_i(x, \tilde{a})_{0.2}^{U,Right,min}$는 식 (17)을 해결함으로써 얻어질 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\min\ f_1(x, \tilde{a})_{0.2}^{L,Left} = (x_1^2 + 5)^2 + 3.84x_2^2 + 2(x_3 - 48.7954)^2 \\
&\max\ f_1(x, \tilde{a})_{0.2}^{L,Left} = (x_1^2 + 5)^2 + 3.84x_2^2 + 2(x_3 - 48.7954)^2 \qquad (17)\\
&\min\ f_1(x, \tilde{a})_{0.2}^{U,Right} = (x_1^2 + 5)^2 + 4.2409x_2^2 + 2(x_3 - 51.0445)^2 \\
&\max\ f_1(x, \tilde{a})_{0.2}^{U,Right} = (x_1^2 + 5)^2 + 4.2409x_2^2 + 2(x_3 - 51.0445)^2 \\
&\quad \text{subject to} \\
&\qquad 0.9197x_1^2 + 0.8394x_2^2 + 0.9217x_3^2 \le 104 \\
&\qquad\ 0 \le x_i \le 10 \quad (i = 1,2,3)
\end{aligned}
$$

이때 $f_1(x, \tilde{a})_{0.2}^{L,Left,min}$ = 3035.1659, $f_1(x, \tilde{a})_{0.2}^{L,Left,max}$ = 5239.4961, $f_1(x, \tilde{a})_{0.2}^{R,Right,min}$= 3394.3022, $f_1(x, \tilde{a})_{0.2}^{R,Right,max}$ = 5728.6855. 다른 목적함수에 대하여 문제를 해결하면 $f_2(x, \tilde{a})_{0.2}^{L,Left,min}$ = 3560.8085, $f_2(x, \tilde{a})_{0.2}^{L,Left,max}$ = 6604.7252, $f_2(x, \tilde{a})_{0.2}^{U,Right,min}$ = 4232.7993, $f_2(x, \tilde{a})_{0.2}^{U,Right,max}$ = 7665.8573. $f_3(x, \tilde{a})_{0.2}^{L,Left,min}$= 7235.1202 , $f_3(x, \tilde{a})_{0.2}^{L,Left,max}$ = 12638.454, $f_3(x, \tilde{a})_{0.2}^{U,Right,min}$ = 7941.0002, $f_3(x, \tilde{a})_{0.2}^{U,Right,max}$ = 13864.435.

주어진 α값에 기초를 두고 각 목적함수에 대한 의사결정자의 퍼지목표들은 의사결정자와의 대화를 통하여 상응하는 구성함수를 유도함으로써 정량화될수 있다. 의사결정자에 의하여 선택된 목적함수에 대한 구성함수의 형태와 평가치가 다음 표 2에 나타나는 것과 같다고 가정한다.

표 2. 선택된 구성함수의 형태 및 평가치(α=0.2)

목적 함수	구성함수 형태		평가치	
	왼쪽	오른쪽	왼쪽	오른쪽
$f_1(x, \tilde{a})$	선형	지수형	($f_1(x, \tilde{a})^{L,Left,min}$, $f_1(x, \tilde{a})^{L,Left,max}$) = (3035.1659, 5239.4961)	($f_1(x, \tilde{a})^{U,Right,min}$, $f_1(x, \tilde{a})^{0.5}$, $f_1(x, \tilde{a})^{U,Right,max}$) = (3394.3022, 4200, 5728.6855)
$f_2(x, \tilde{a})$	지수형	선형	($f_2(x, \tilde{a})^{L,Left,min}$, $f_2(x, \tilde{a})^{0.5}$, $f_2(x, \tilde{a})^{L,Left,max}$) = (3560.8085, 4600, 6604.7252)	($f_2(x, \tilde{a})^{U,Right,min}$, $f_2(x, \tilde{a})^{U,Right,max}$) = (4232.7993, 7665.8573)
$f_3(x, \tilde{a})$	지수형	쌍곡선형	($f_3(x, \tilde{a})^{L,Left,min}$, $f_3(x, \tilde{a})^{0.5}$, $f_3(x, \tilde{a})^{L,Left,max}$) =-(7235.1202, 9000, 12638.454)	($f_3(x, \tilde{a})^{U,Right,min}$, $f_3(x, \tilde{a})^{0.5}$, $f_3(x, \tilde{a})^{0.25}$, $f_3(x, \tilde{a})^{U,Right,max}$) =(7941.0002,11800,12800,13864.435)

여기서 $f_i(x, \tilde{a})^d$는 구성정도가 d인 i번째 목적함수 값이다. 구성함수는 왼쪽과 오른쪽 형태가 다르기 때문에 이 문제는 8 가지의 조합된 문제로서 곱 연산자를 이용하여 다음과 같이 β값을 산출하여야 한다. 예를들면 α=0.2에 대하여 조합 1($f_1(x, \tilde{a})$: 선형, $f_2(x, \tilde{a})$: 지수 , $f_3(x, \tilde{a})$: 지수)에 대하여 정식화 하면 다음과 같다.

$$\max \quad \beta = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i \tag{18}$$

subjecct to

$$\lambda_1 = (f_1(x, \tilde{a})_{0.2}^{L,Left} - 3035.1659) / 2204.3302$$

$$\lambda_2 = 1.3440(1-\exp(-1.3628((f_2(x, \tilde{a})_{0.2}^{L,Left} - 3560.8085)/3043.9167)))$$

$$\lambda_3 = 1.2827(1-\exp(-1.5123((f_3(x, \tilde{a})_{0.2}^{L,Left} - 7235.1202)/5403.3338)))$$

$$0.9197x_1^2 + 0.8394x_2^2 + 0.9217x_3^2 \le 104$$

$$0 \le x_i \le 10, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\beta \in [0, 1]$$

식 (18)을 해결하면 β = 0.44000842, λ_1 = 0.79471573, λ_2 = 0.65844760 , λ_3 = 0.84086827, x_1 = 0.00000024 x_2 = 0.00000111 x_3 = 0.00000026 $f_1(x, \tilde{a})_{0.2}$ = 4786.983465951, $f_2(x, \tilde{a})_{0.2}$ = 5064.408477688, $f_3(x, \tilde{a})_{0.2}$ = 11043.12381989. 유사한 방식에서 주어진 α에 대하여 해를 얻을 수 있다. 표 3은 조합1에 대한 수행결과를 요약하고 있다.

표 3에서 보는 바와 같이 α-수준의 실행가능계수들에 기초를 두고 모든 퍼지목표들을 만족시키는 정도 β와 같게 되는 것은 α와 β의 차에 대한 허용오차를 0.01이하로 두었으므로 α = 0.44, β = 0.44838598일 때 만족해에 도달한다. 모든 8 가지 조합에 대한 α의 변화에 따른 β 값들과 α = β인 결과들은 다음 표 4와 같다.

표 4에서 보는 바와 같이 α = β인 값 중에서 가장 큰 값은 조합 3이었다. 그러므로 최적 절충해는 x_1 = 9.9999997, x_2 = 0.00000006, x_3 = 0.00000013, $f_1(x)$ = 5197.617526481, $f_2(x)$ = 4052.178818152, $f_3(x)$ = 12939.43506077 이다.

4. 결 론

의사결정과정에서 발생되는 전문가의 모호성과 각 목표에 대한 의사결정자의 모호성을 모두 반영하는 상황에서 다목적 비선형 계획문제를 효율적으로 해결하여 최적 절충해를 이끌어 내는 방법을 제시하였다. 제시된 방법은 의사결정과정에서의 의사결정자의 선호정보를 다양하게 유도할 수 있고 절충연산자로서 곱 연산자를 사용하므로서 각 목적에 대한 만족수준간의 교환을 고려할 수가 있다. 또한 목적함수의 목표값의 변화에 따라 적절하게 대응할 수 있어 퍼지모수와 퍼지항등목표를 가지는 다목적을 가지는 시스템에 널리 응용할 수 있다.

표 3. 수치예의 결과들(조합 1)

α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.44	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
β	0.4298 4716	0.4480 0182	0.4400 0842	0.4492 5851	0.4417 1681	0.4483 8598	0.4512 2427	0.4441 4038	0.4613 4267	0.4476 5310	0.4655 8012	0.4523 9493
λ_1	0.7909 3564	0.7927 0612	0.7947 1573	0.7967 7494	0.7988 9891	0.7997 6858	0.8011 1092	0.8034 3586	0.8059 5905	0.8088 1948	0.8122 9156	0.8150 9423
λ_2	0.6600 3320	0.6782 5667	0.6584 4760	0.6757 6525	0.6567 1312	0.6636 0410	0.6740 3591	0.6557 0874	0.6730 5079	0.6553 7258	0.6728 5233	0.6548 9094
λ_3	0.8236 0119	0.8332 4650	0.8408 6827	0.8343 8174	0.8429 3082	0.8448 4809	0.8353 3526	0.8430 5920	0.8504 7747	0.8445 0403	0.8518 7921	0.8475 0238
$f_1(x, \tilde{a})_\alpha^{L,Left,min}$	2989. 5000	3012. 1811	3035. 1659	3058. 4884	3082. 1353	3091. 6826	3106 1255	2130. 4610	3155. 1613	3180. 2297	3025. 6696	3225. 0000
$f_1(x, \tilde{a})_\alpha^{L,Left,max}$	5189. 9821	5214. 6099	5239. 4981	5264. 6523	5290. 0188	5300. 2162	5315. 5564	5341. 1719	5366. 6941	5391. 8061	5415. 6640	5433. 3333
$f_1(x, \tilde{a})_\alpha^{R,Right,min}$	3553. 0002	3399. 8372	3394. 3022	3391. 0685	3388. 7713	3388. 0167	3387. 0000	3385. 5406	3384. 3112	3383. 2618	3382. 3114	3225. 0000
$f_1(x, \tilde{a})_\alpha^{R,Right,max}$	5943. 4824	5744. 5741	5728. 6855	5715. 4982	5703. 2705	5698. 5218	5691. 4317	5679. 6180	5667. 5239	5654. 7781	5640. 3956	5433. 3333
$f_2(x, \tilde{a})_\alpha^{L,Left,min}$	3484. 9701	3522. 7306	3560. 8085	3599. 3260	3638. 2818	3653. 9432	3677. 5550	3717. 2678	3757. 2974	3797. 7662	3838. 6747	3875. 0003
$f_2(x, \tilde{a})_\alpha^{L,Left,max}$	6531. 9689	6550. 2316	6604. 7252	6660. 5987	6717. 3150	6740. 1988	6774. 6655	6832. 7267	6891. 3424	6950. 5911	7010. 5262	7002. 9408
$f_2(x, \tilde{a})_\alpha^{R,Right,min}$	4438. 7509	4262. 6857	4232. 7993	4205. 1430	4178. 4218	4167. 8821	4152. 1874	4126. 2727	4100. 5878	4075. 0433	4049. 6404	3875. 0003
$f_2(x, \tilde{a})_\alpha^{R,Right,max}$	8023. 7501	7720. 4948	7665. 8573	7615. 2765	7566. 3104	7547. 0462	7518. 2980	7470. 8647	7423. 9279	7377. 2321	7330. 8275	7002. 9408
$f_3(x, \tilde{a})_\alpha^{L,Left,min}$	7142. 5004	7197. 6900	7235. 1202	7272. 2710	7309. 3002	7324. 0798	7346. 2499	7383. 1602	7420. 0698	7456. 9401	7493. 8098	7550. 0016
$f_3(x, \tilde{a})_\alpha^{L,Left,max}$	12496. 172	12584. 511	12638. 454	12691. 401	12743. 532	12764. 108	12794. 782	12844. 995	12893. 863	12940. 937	12988. 026	13700. 941
$f_3(x, \tilde{a})_\alpha^{R,Right,min}$	8038. 7499	7989. 6900	7941. 0002	7892. 1249	7843. 2513	7823. 7002	7794. 3757	7745. 4998	7696. 6251	7647. 7502	7598. 8761	7550. 0016
$f_3(x, \tilde{a})_\alpha^{R,Right,max}$	14037. 422	13939. 146	13864. 435	13753. 356	13659. 732	13622. 077	13565. 408	13470. 134	13373. 518	13274. 994	13176. 415	13077. 941
x_1	0.0000 0289	0.0000 0847	0.0000 0024	0.0000 0076	0.0000 0059	0.0000 0056	0.0000 0186	0.0001 0343	0.0000 0142	0.0000 0759	0.0000 0051	0.0000 0421
x_2	0.0000 0098	0.0000 0785	0.0000 0111	0.0000 0085	0.0000 0040	0.0000 0061	0.0000 0167	0.0001 2860	0.0000 0212	0.0000 1190	0.0000 0047	0.0000 0454
x_3	0.0000 0171	0.0000 0660	0.0000 0026	0.0000 0020	0.0000 0070	0.0000 0057	0.0000 0138	0.0001 2445	0.0000 0067	0.0000 0973	0.0000 0031	0.0000 0148
$f_1(x, \tilde{a})_\alpha$	4729.49 9697493	4758.05 9893085	4786.783 465951	4816.304 481503	4846.01 2864651	4858.00 0451507	4876.12 4746719	4906.62 5447856	4937.60 5149546	4968.99 5864036	5000.82 9711646	5024.99 9745349
$f_2(x, \tilde{a})_\alpha$	4964.96 9865456	5014.49 0068420	5064.40 8477688	5114.925 226572	5166.04 1842867	5186.58 3264107	5217.55 4832954	5269.66 8012377	5322.17 7058701	5375.28 6364666	5428.99 4783312	5474.99 9556845
$f_3(x, \tilde{a})_\alpha$	10902.49 962386	10981.6 8789251	11043.12 381989	11104.26 970820	11165.3 0435120	11189.6 8366140	11226.2 4935759	11284.1 1973874	11348.0 6891909	11408.9 3605103	11469.8 0937243	11549.9 9850562

표 4. 모든 조합에 대한 결과들

조합 1 (구성함수: f_1:선형 f_2:지수 f_3:지수)	α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.44	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	β	0.4298 4716	0.4480 0182	0.4400 0842	0.4492 5851	0.4417 1681	0.4483 8598	0.4512 2427	0.4441 4038	0.4613 4267	0.4476 5310	0.4655 8012	0.4523 9493
	α = 0.44 β = 0.44838598												
조합 2 (구성함수: f_1:선형 f_2:지수 f_3:쌍곡선)	α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9	1.0
	β	0.7343 8518	0.7508 4563	0.7326 8150	0.7521 5278	0.7410 5050	0.7572 4994	0.7395 2701	0.7560 7575	0.7678 9218	0.7478 1660	0.7704 7977	0.7456 06148
	α = 0.75 β = 0.76789218												
조합 3 (구성함수: f_1:선형 f_2:선형 f_3:지수)	α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.89	0.9	1.0
	β	0.8699 3149	0.8737 9198	0.8767 8295	0.8788 5191	0.8820 1680	0.8844 4082	0.8878 3061	0.8914 8533	0.8950 2725	0.8992 4768	0.8997 7520	0.9035 8591
	α = 0.89 β = 0.89924768												
조합 4 (구성함수: f_1:선형 f_2:선형 f_3:쌍곡선)	α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.66	0.7	0.8	0.9	1.0
	β	0.7092 9225	0.6925 5700	0.6883 1863	0.6879 3425	0.7020 7560	0.6885 2443	0.6657 3075	0.6661 8885	0.6665 6958	0.6756 2623	0.7042 7845	0.6217 8555
	α = 0.66 β = 0.66618885												
조합 5 (구성함수: f_1:지수 f_2:지수 f_3:지수)	α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.88	0.9	1.0
	β	0.8512 2294	0.8649 6315	0.8698 5126	0.8672 9937	0.8720 4524	0.8696 4990	0.8746 5689	0.8819 2320	0.8774 0198	0.8734 5061	0.8849 9545	0.8890 7496
	α = 0.88 β = 0.87345061												
조합 6 (구성함수: f_1:지수 f_2:지수 f_3:쌍곡선)	α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
	β	0.7721 4908	0.7326 5160	0.7218 4304	0.7267 5372	0.7497 7220	0.7271 3041	0.6885 0939	0.7012 3940	0.7022 5172	0.7340 8677	0.6060 2733	
	α = 0.7 β = 0.70123940												
조합 7 (구성함수: f_1:지수 f_2:선형 f_3:지수)	α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.34	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	β	0.3404 4587	0.3468 0223	0.3458 0513	0.3434 6409	0.3428 4234	0.3170 5314	0.3392 6495	0.3251 6519	0.3355 7730	0.3183 4250	0.3066 9266	0.3142 3550
	α = 0.34 β = 0.34284234												
조합 8 (구성함수: f_1:지수 f_2:선형 f_3:쌍곡선)	α	0.0	0.1	0.18	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	β	0.1795 3453	0.1832 7216	0.1900 7185	0.1809 3675	0.1830 2557	0.1770 4495	0.1825 8160	0.1661 5112	0.1762 1136	0.1682 3651	0.1699 5186	0.1483 0594
	α = 0.18 β = 0.19007185												

참 고 문 헌

[1] Sakawa, M. and Yano, H., "An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Multiobjective Nonlinear Programming Problems with Fuzzy Parameters", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 30, pp. 221-238, 1989.

[2] Sakawa, M. and Yano, H. , "An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Generalized Multiobjective Linear Programming Problems with Fuzzy Parameters", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 35, pp. 125-142, 1990.

[3] Yano, H. and Sakawa, M., "Interactive Fuzzy Decision Making for Generalized Multiobjective Linear Fractional Programming Problems with Fuzzy Parameters", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 32, pp. 245-261, 1989.

[4] Li. R. J., "Multiple Objective Decision Making in a Fuzzy Environment", Ph.D., The Kansas University, 1990.

[5] Luhandjula, M. K., "Multiple Objective Programming Problems with Possibilistic Coefficients", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 21, pp. 135-145, 1987.

[6] Ambrose Goicoechea, Don R. Hans and Lucien Duckstein, Multiobjective Decision Analysis with Engineering Business Applications , John Wiley and Sons , New York , pp. 40-91, 1982.

[7] Bellman, R. E. and Zadeh, L. A., "Decision-Making in a Fuzzy Environment", Management Science , Vol. 16, pp. 357-369, 1985.

[8] Fung, L. W. and Fu, K. S., "An Axiomatic Approach to Rational Decision Making in the Fuzzy Environment", Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Process, pp. 227- 256 , 1975.

[9] Zimmermann, H. J. , "Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions" , Fuzzy Sets and Systems, Vol. 1, pp. 45-55, 1978.

[10] Zimmermann, H. J., "Fuzzy Sets Theory and Mathematical Programming", Fuzzy Sets Theory and Applications, pp. 99-114 , 1986.