

초음속 부족팽창 제트유동에 관한 해석적 연구

김희동* · 이호준* · 김윤곤**

An Analytical Study on Supersonic Under-Expanded Jet

Heuy-Dong KIM*, Ho-Joon LEE*, and Yoon-Gon KIM**

ABSTRACT

Based upon the results of numerical calculation, empirical scaling equations were made for supersonic under-expanded jets in both axisymmetric and two dimensional flows. The objective of the present study is to find a straightforward method that can predict the under-expanded supersonic jets issuing from various kinds of nozzles. The present empirical equations were agreed with the calculation results of total variation diminishing difference scheme. The supersonic under-expanded jets operating at a given pressure ratio could be well predicted by the present scaling equations.

초 록

본 연구에서는 공업적으로 널리 활용되고 있는 초음속 부족팽창 제트유동을 용이하게 예측하기 위하여, 종래의 수치계산 결과를 이용, 축대칭 및 2차원 초음속 부족팽창 제트유동에 대한 스케일링 식을 제안하였다. 본 연구에서 제안된 축대칭 및 2차원 제트유동에 관한 경험식들은 TVD수치계산 결과와 잘 일치하였으며, 노즐의 작동압력비가 주어지는 경우, 초음속 부족팽창 제트유동의 형태는 스케일링 식들에 의하여 잘 예측할 수 있었다.

1. 서 론

일반적으로 압축성 기체를 약 2.0 이상의 압력 비로 기체를 오리피스나 노즐로부터 분출시키면, 유동은 초음속으로 된다. 이러한 초음속 제트유동은 비교적 간단한 장치로 용이하게 얻을 수가 있

으므로 압축성 유체공학의 연구대상으로 자주 이용된다. 노즐내에서 초음속으로 가속된 흐름이 대기로 방출되는 경우에 발생하는 초음속 제트유동은, 노즐입구의 전압력과 배압의 비인 노즐압력비(nozzle pressure ratio)에 따라 과팽창(overexpansion), 적정팽창(correct expansion), 그리고 부족팽

* 안동대학교 기계공학부

** 국방과학연구소

창(underexpansion)의 형태로 분류된다.¹⁾ 지금까지 초음속 제트는 기계가공이나 각종 산업현장의 여러 분야에서 매우 다양하게 응용되어 왔으며, 공학적으로도 상당히 많은 관심을 받아왔다. 최근 초음속 제트유동을 이용한 금속분말의 제조법,²⁾ 물체의 가열 냉각,³⁾ 추진 로켓트의 추력,⁴⁾ 제트소음⁵⁾ 등에 관하여 연구가 활발히 진행되고 있다.

중래의 연구⁶⁾에 의하면 초음속 부족팽창 제트유동은 바렐충격파(barrel shock wave), 마하디스크(Mach disk) 등을 포함하게 되며, 제트 내부에서는 충격파로 인하여 유동이 초음속으로부터 아음속으로 감속되거나 아음속 유동이 다시 초음속으로 재가속⁷⁾되는 매우 복잡한 형태로 된다. 이와 같은 제트 유동장을 기술하는 지배방정식은 쌍곡선형태에서 타원형의 형태로 변화하게 되므로, 이론적 수단으로 제트 유동장을 예측하는 것은 매우 어렵다. 문헌(8)에서는 특성곡선법을 이용하여 초음속 부족팽창 제트에서 발생하는 바렐충격파와 마하디스크로 둘러싸인 영역의 유동을 이론적으로 구하였다. 또 문헌(9)에서는 초음속 부족팽창 제트를 준일차원 유동으로 근사화하여 제트 중심축선상에서 유동의 상태량과 마하디스크의 위치 등을 노즐 출구로부터 거리의 함수로 나타내었다. 이러한 계산법은 매우 간단하고 비교적 정도가 높으며

로 현재까지 공업적으로 자주 이용되고 있으나, 제트 내부의 유동구조 및 제트경계의 형상을 예측하는데 한계가 있다. 더욱이 준일차원 계산의 결과들은 노즐압력비가 그다지 높지 않은 제트 유동의 경우에는 실험결과와 잘 일치하지만, 노즐압력비가 높아짐에 따라 실험결과와의 차이가 현저하게 커지게 된다.

최근 김희동 등^{10,11)}은 초음속 부족팽창 제트유동을 상세하게 조사하기 위하여 실험 및 수치계산을 수행하여, 제트경계, 마하디스크, 바렐충격파의 형상 등을 노즐압력비의 함수로 나타내었다. 그러나 그들의 TVD(total variation diminishing) 수치계산법은 실제 공업적으로 활용하기에 많은 어려움이 있으며, 실용적 목적으로 초음속 제트유동을 활용하는데에는 제트구조를 보다 간단한 방법으로 용이하게 예측할 수 있는 수단이 요구된다.

본 연구에서는 초음속 부족팽창 제트 유동장의 특성을 간단히 예측할 수 있는 스케일링식을 제시하기 위하여, 중래 김희동 등^{10,12)}에 의하여 수행된 2차원 및 축대칭 부족팽창 제트유동의 TVD수치계산 결과를 이용·이론해석을 수행하였다. 본 연구에서 얻어진 경험식들은 부족 팽창제트 유동을 잘 예측하였으며, 따라서 공업적으로 널리 활용될 수 있다.

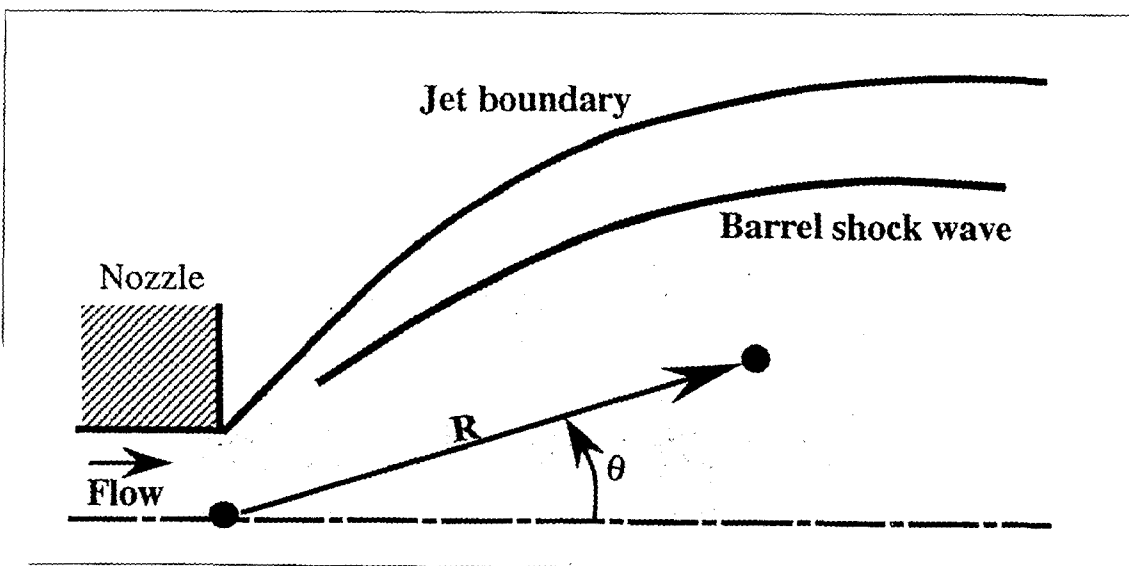


Fig. 1 Supersonic under-expanded jet flow

2. 부족팽창 제트유동의 이론해석

초음속 부족팽창 제트 유동에 적합한 스케일링 식을 구하기 위하여, 본 연구에서는 먼저 노즐 출구로부터 마하디스크의 상류까지 바렐충격파로 둘러싸인 등엔트로피 영역을 source 유동으로 가정하였다. Fig. 1에는 본 연구에서 이용된 좌표계를 나타내었다. 그림에서 θ 는 유동의 편각(rad.), 반경 R은 식(1)에 나타낸 바와 같이 노즐의 출구직경으로 무차원한 반경을 나타낸다.

$$R = R'/D \tag{1}$$

여기에서 R'는 노즐출구면에서 중심축을 원점으로 하는 반경방향으로의 거리를 나타내며 D는 제트의 출구직경이다. Fig. 2에는 제트 내부에서 R이

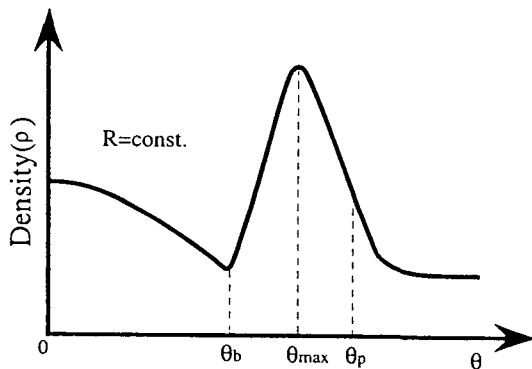


Fig. 2 Density distribution along the line of R=const.

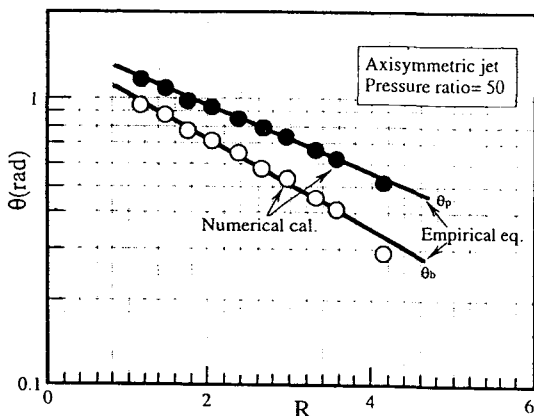


Fig. 3 Relation of R and θ in supersonic underexpanded jet

일정한 선을 따라서 발생하는 밀도분포를 도식적으로 나타내었으며, θ_b 는 바렐충격파가 시작되는 위치, θ_{max} 는 제트 경계에서 최대밀도의 위치, θ_p 는 제트 경계에서 밀도구배가 최대로 되는 위치를 의미한다. 노즐 압력비 p가 50인 축대칭 초음속부족팽창 제트유동에 대한 TVD수치계산으로 예측한 θ_b 와 θ_p 의 R에 대한 변화를 Fig. 3에 ○, ●로 나타내었다. 그림에서 θ_b 및 θ_{max} 및 θ_p 를 p와 R의 함수로 근사화하면 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{cases} \theta_b = (1.87 - 0.00703p) \cdot \exp(-9.82p^{-0.84}R) \\ \theta_{max} = (1.67 - 0.00417p) \cdot \exp(-3.05p^{-0.607}R) \\ \theta_p = (1.90 - 0.00506p) \cdot \exp(-2.67p^{-0.584}R) \end{cases} \tag{2}$$

위의 식에서 각 θ 는 노즐압력비 p를 매개변수로 수치계산으로부터 얻어진 점들을 이용하여 구하였으며, p와 R이 주어지는 경우 제트의 형상을 추정할 수 있다. 한편 2차원 제트유동은 축대칭에 비하여 상대적으로 서서히 팽창하게 되므로, 노즐출구를 중심으로 하는 source유동으로 가정할 수 없다¹⁰⁾. TVD수치계산 결과^{10,12)}를 이용하여, 2차원 제트유동에 대한 유선을 나타내면 Fig.4와 같이 된다. 그림으로부터 가상적인 source점을 유동의 팽창에 따라 하류로 이동시키는 경우, 각점의 상태량은 이동된 source 점으로부터의 source유동으로 근사화 함으로써 얻어질 수 있다. 이때 가상적인 source점의 위치는 다음 식으로 근사화된다.

$$x_0 = 1.63 - 0.0249p - 0.547R + 0.464R \cdot \log p \tag{3}$$

여기에서 x_0 는 노즐출구로부터 가상적인 source점의 위치를 나타내는 무차원 거리이며, R은 노즐출구로부터 반경방향으로의 거리, 그리고 R_0 는 가상적인 source점으로부터의 거리를 나타낸다. 결과적으로 2차원 초음속 부족팽창 제트유동에 대해서는 다음의 근사식이 얻어진다.

$$\begin{cases} \theta_b = (0.867 - 0.00360p) \exp(-60.2p^{-1.64}R) \\ \theta_{max} = (0.908 - 0.00160p) \exp(-17.8p^{-1.58}R) \\ \theta_p = (1.15 - 0.00266p) \exp(-13.6p^{-1.48}R) \end{cases} \tag{4}$$

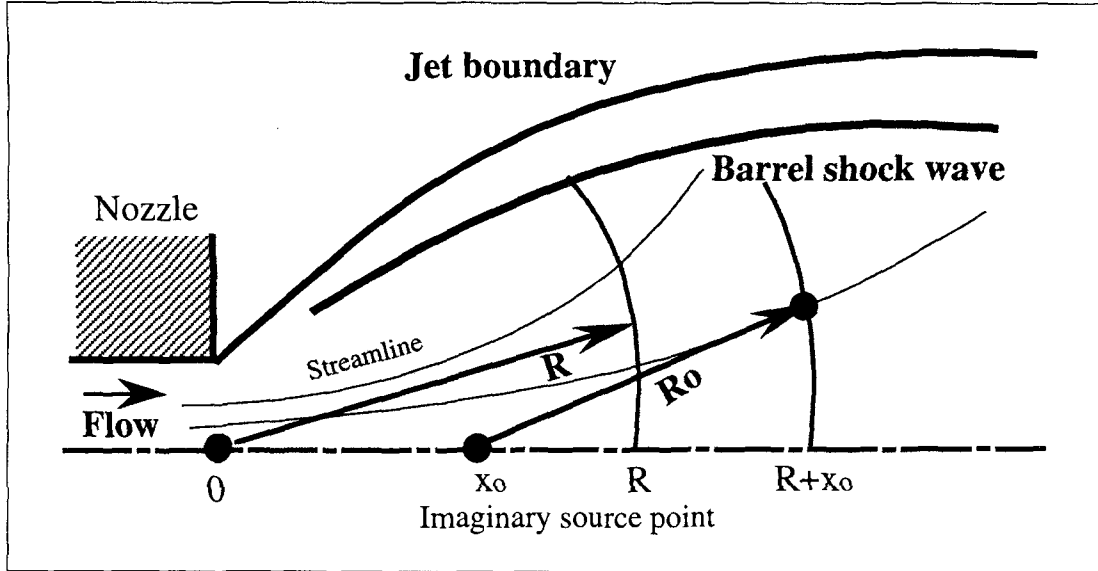


Fig. 4 Two-dimensional supersonic underexpanded jet

Fig. 3에는 압력비 50인 축대칭 제트유동에 대한 TVD수치계산 결과와 위의 식(2)로부터 얻어진 결과를 실선으로 나타내었다. 그림으로부터 수치계산 결과와 식(2)의 결과는 매우 잘 일치하고 있으며, θ_b 와 θ_p 의 값은 모두 R이 증가할수록 작아지며, R에 대한 θ_b 의 감소율은 θ_p 에 비하여 크다. 이것은 제트유동이 주변의 공기와 운동량교환을 함으로써 발생하는 확산에 기인한다. 한편 제

트유동의 상태량들은 밀도, 온도, 압력, 속도, 그리고 마하수 등으로, 이들 중 유동의 밀도와 압력이 주어지는 경우 온도가 알려진다. 또 단열조건을 이용하는 경우 에너지 방정식으로부터 절대 속도를 산출할 수 있으므로, 유동의 마하수를 얻을 수 있다. 본 연구에서는 준일차원 유동에 대하여 다음과 같이 제안된 제트 중심축선상에서 마하수분포의 이론식⁹⁾으로부터 유동의 각 상태량을 구하였다.

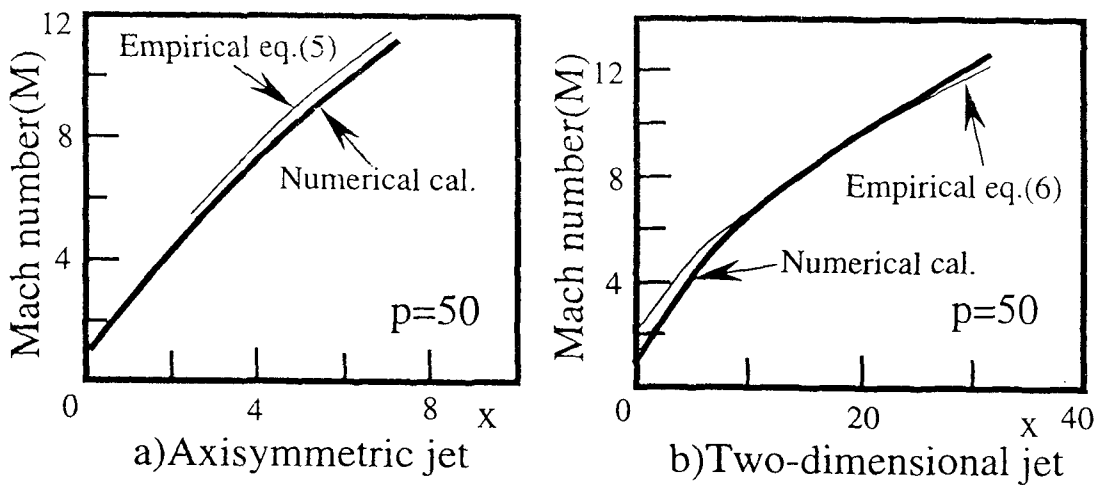


Fig. 5 Mach number distributions on center line of jet

$$M = A \left(\frac{x}{D} - x_0 \right)^{\gamma-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \left[A \left(\frac{x}{D} - x_0 \right)^{\gamma-1} \right] \quad (5)$$

위의 식에서 A와 x_0 는 상수로, 문헌(9)에서는 각각 3.26과 0.075로 가정하였다. 위의 식으로부터 축대칭 제트유동에 대한 source점은 노즐출구로부터 대략 x_0 만큼 떨어져 있다는 것을 알 수 있다. 2차원 제트유동에 대해서는 가상적인 source점을 고려하여, 마하수분포에 관한 준일차원 이론식¹⁰⁾을 이용하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$M = A \left(\frac{x}{D} - x_0 \right)^B - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \left[A \left(\frac{x}{D} - x_0 \right)^B \right] \quad (6)$$

여기에서 A와 B는 상수로 각각 2.30과 5/9이며, x_0 는 식(3)에 주어졌다. Fig. 5에는 축대칭 및 2차원 제트유동의 중심축선상에서 마하수분포를 나타내었다. 그림의 굵은 실선은 수치계산에서 얻어진 값을 나타내며, 가는 실선은 본 이론식의 결과를 나타낸다. 본 이론으로부터 축대칭유동의 경우 $x/D < 2.5$ 와, 2차원 유동의 경우 노즐의 출구부근을 제외하고는 이론적 결과들은 수치계산의 결과와 잘 일치하고 있다. 따라서 본 이론식들은 타당한 것으로 판단된다.

위의 이론식들로부터 축대칭 제트유동에 대한 밀도의 근사식을 구하면 다음 식으로 주어진다.

$$\rho = \rho_c \cos^2(1.15\theta) \cdot H(\theta_b - \theta) + \left[\left(\rho_{\max} - \frac{\rho_{\infty}}{2} \right) \cdot \exp\{A(\theta - \theta_{\max})^2\} + \frac{\rho_{\infty}}{1 + \exp\{B(\theta - \theta_{\max})\}} \right] \cdot H(\theta - \theta_b) \quad (7)$$

$$\rho_c = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ \rho_{\max} = 1.34p^{-0.737} \cdot \exp(0.762p^{-0.5}R) \\ \rho_{\infty} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} / p \quad (8)$$

$$A = \left[\ln\{\cos^2(1.15\theta_b)\} - \ln\left(\frac{\rho_{\max}}{\rho_c}\right) \right] / (\theta_{\max} - \theta_b)^2 \\ B = -1.30p^{0.756}$$

여기에서 ρ_c 는 제트 중심선에서 밀도분포로, 위의 식(5)과 등엔트로피 관계식으로부터 얻어진다. ρ_{\max} 는 제트경계에서 최대밀도의 값을 나타내며, 근사적으로 노즐압력비 p와 R의 함수로 주어진다. 그리고 ρ_{∞} 는 등엔트로피 관계식으로부터 이론적으로 얻어지며, A는 제트경계를 결정하는 것으로 제트경계에서 밀도분포와 등엔트로피 영역에서 밀도분포를 연결하는 역할을 하며, 하첨자 ∞ 는 제트 주위의 상태를 나타낸다. 또 B는 제트경계와 주위의 밀도를 연결한다. 한편 제트유동의 내부에는 등엔트로피 영역과 등엔트로피로 가정할 수 없는 영역이 존재하게 되므로, 이들을 구별하기 위하여 다음으로 주어지는 Heaviside의 단위계단함수 H(θ)를 이용하였다.

$$H(\theta) = \begin{cases} 1 & : \theta > 0 \\ 0.5 & : \theta = 0 \\ 0 & : \theta < 0 \end{cases} \quad (9)$$

위의 식(7)에서 우변의 제1항의 $\theta < \theta_b$ 의 영역에서는 유동은 등엔트로피로 가정되며, 밀도는 cosine 제곱으로 근사화된다. 또 우변의 제2항은 근사적으로 바렐충격파와 분류경계의 영역을 나타낸다.

한편 위의 축대칭 제트유동과 유사하게 2차원 제트유동에 대한 밀도분포는 다음으로 주어진다.

$$\rho = \rho_c \cos^2(1.15\theta) \cdot H(\theta_b - \theta) + \rho_{\max} \cdot \exp\{A(\theta - \theta_b)^2\} \cdot H(\theta - \theta_b) \cdot H(\theta_{\max} - \theta) + \left[\frac{\rho_{\max} - \rho_{\infty}}{1 + \exp\{B(\theta - \theta_{\max})\}} + \rho_{\infty} \right] \cdot H(\theta - \theta_{\max}) \quad (10)$$

$$\rho_c = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ \rho_{\max} = 0.553p^{-0.330} \cdot \exp(-0.0828p^{-0.306}R) \\ \rho_{\infty} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} / p \quad (11)$$

$$A = \left[\ln \{ \cos^2(1.15\theta_b) \} - \ln \left(\frac{\rho_{max}}{\rho_c} \right) \right] / (\theta_{max} - \theta_b)^2$$

$$B = 5.81p^{0.585}$$

2차원 유동의 경우 제트경계에서 밀도구배가 바렐 충격파 영역의 밀도구배에 비하여 급격하게 된다. 따라서 식(10)과는 달리 식(11)에서 우변의 제1항, 제2항 및 제3항으로 나타내는 바와 같이 각각 등엔트로피 영역, 바렐충격파 영역 및 제트 경계의 영역으로 나누어 구한 근사식이다.

또 축대칭 및 2차원 제트유동의 압력은 각각 다음의 식(12)와 (13)으로 근사화된다.

$$p = p_c \cos^{2\gamma}(1.15\theta) \cdot H(\theta_b - \theta) + \frac{p_\infty}{1 + \exp \left[A \left\{ \theta - \left(\frac{\theta_b + \theta_{max}}{2} \right) \right\} \right]} \cdot H(\theta - \theta_b) \quad (12)$$

$$p = p_c \cos^{2\gamma}(1.15\theta) \cdot H(\theta_b - \theta) + \frac{p_\infty}{1 + \exp \left[A \left\{ \theta - \left(\frac{\theta_b + 2\theta_{max}}{3} \right) \right\} \right]} \cdot H(\theta - \theta_b) \quad (13)$$

여기에서 p_c 와 p_∞ 는 각각 다음으로 주어진다.

$$p_c = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$p_\infty = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} / p, \quad A = -30$$

위의 식들에서 p_c 는 제트 중심선에서 압력으로, 등엔트로피 관계식 및 밀도값 ρ_c 로부터 구해진다. 또 p_∞ 는 이론식으로 주위의 압력을 나타내며, 등엔트로피 관계식으로부터 얻어질 수 있으며, A는 바렐충격파에 의한 압력변화의 구배를 나타낸다. 식(13)의 2차원 제트유동의 경우, 바렐충격파의 중심위치를 약간 θ_b 쪽으로 이동시켜 근사화하였다. 이것은 바렐충격파 영역에서 압력분포의 구배가 최대로 되는 위치가 제트 중심으로부터 떨어져 있기 때문이다. 따라서 2차원 제트유동에서 등엔트

로피 영역과 분류경계의 영역의 경계에서 θ_b 의 위치가 명확하게 나타나지 않을 수 있다.

축대칭 및 2차원 제트유동의 속도는 유동이 단열이며, 이상기체라고 가정하는 경우 다음의 에너지 방정식으로부터 절대속도의 값이 얻어진다.

$$h + \frac{1}{2} V^2 = c_p T + \frac{1}{2} V^2 = const \quad (14)$$

여기에서 h는 엔탈피, c_p 는 정압비열이다. 위의 식에서 얻어진 V값에 대하여, $\theta < \theta_b$ 의 등엔트로피 영역에서는 source유동이라고 가정할 수 있으므로, 수치계산결과로부터 이 영역내의 어떤 점 (R, θ)에서 속도벡터는 θ 의 방향과 같게 된다. 따라서 제트경계를 포함하는 속도벡터의 편각 ϕ 에 관한 근사식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi = \theta \cdot H(\theta_b - \theta) + (1.07 - 0.0026p - 4.54Rp^{-0.78}) \cdot H(\theta - \theta_b) \quad (15)$$

$$\phi = \theta \cdot H(\theta_b - \theta) + (0.459 - 0.000842p - 2.78Rp^{-1.31}) \cdot H(\theta - \theta_b) \quad (16)$$

위의 식(15)은 축대칭 제트유동에 대한 속도벡터의 편각을 나타내며, 우변의 제1항은 등엔트로피 영역에서 속도벡터의 방향을 나타내며, 제2항은 바렐충격파를 포함하는 제트경계의 영역을 근사한 것이다. 또 식(16)은 2차원 제트유동에 대한 것으로, 우변의 제1항은 가상source유동을 고려하여 $\phi = \theta$ 로 가정하였다.

이상에서 기술한 바와 같이, 초음속부족팽창 제트유동에 관한 스케일링 식을 이용함으로써, 제트의 밀도, 압력, 속도벡터의 방향, 및 기타 유동의 상태량을 용이하게 산출할 수 있다.

3. 결과 및 고찰

Fig. 6에는 축대칭 및 2차원 초음속 부족팽창 제트유동에 대하여, 노즐압력비 p가 50인 경우, 수치계산 결과와 본 연구에서 얻어진 스케일링 식으로부터 제트의 형상을 비교하였다. 축대칭 제트유동의 경우 전 영역에 대하여 두 결과들은 비교적

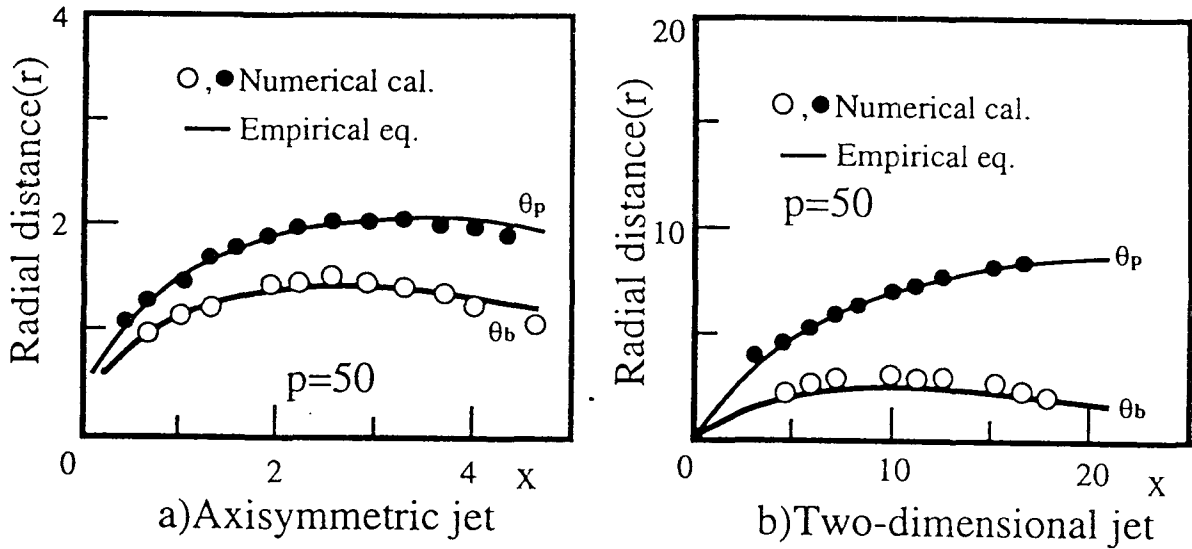


Fig. 6 Barrel shock wave and jet boundary vs distance

잘 일치하고 있으나, θ_b 에 스케일링 식은 θ_p 에 비하여 다소 큰 오차를 나타내고 있다. 또 두 결과의 차이는 마하디스크 부근에서 약간 크다. 이것은 이 영역에서 상태변화가 매우 급격하게 나타나므로, TVD수치계산 결과에서 발생하는 오차라고 생각된다. 본 스케일링 식과 마하디스크의 위치에 관한 경험식¹⁰⁾으로부터 제트의 개략적인 형상을 추정할 수 있다. 2차원 제트유동인 경우, 축

대칭에 비해 다소 오차가 크며, 제트경계의 영역이 축대칭 제트유동에 비해 넓다(종축의 스케일 참조). 이것은 2차원 제트에서 유동의 팽창이 보다 서서히 발생하기 때문이다.

Fig. 7에는 축대칭 및 2차원 제트유동의 경우에 밀도분포를 비교하였다. 그림에서 제트경계에서 밀도의 구배, 중심축에서 밀도의 값, 등엔트로피 영역의 끝에서 밀도, 최대밀도값 및 주위의 밀도

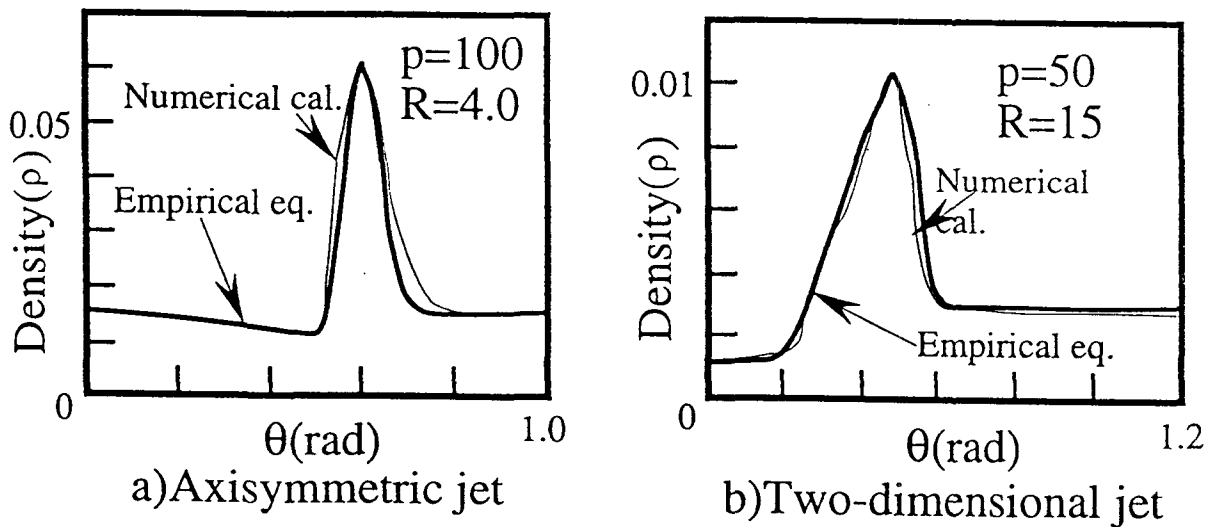


Fig. 7 Comparison of density distributions

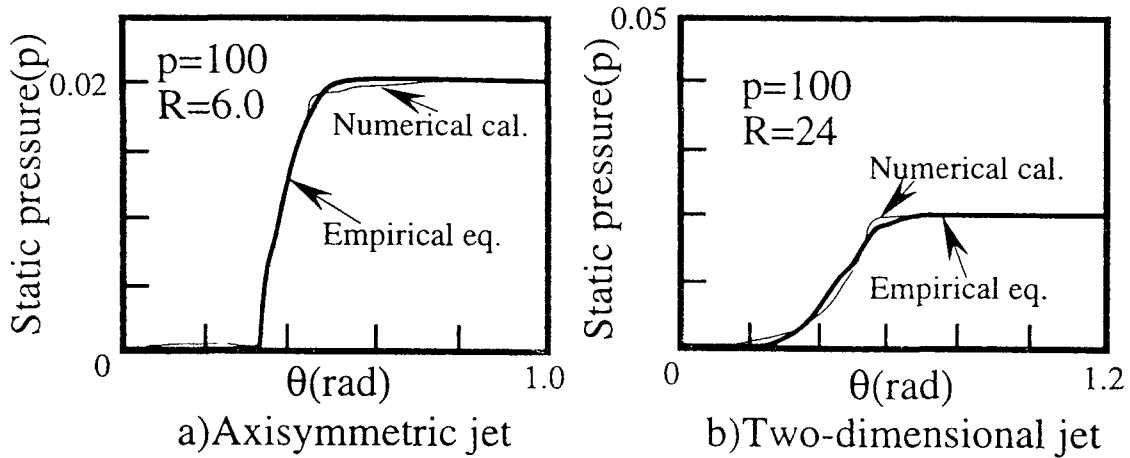


Fig. 8 Comparison of static pressure distributions

값이 수치계산 결과와 잘 일치한다는 것을 발견할 수 있다. 그러나 2차원 제트유동의 경우 밀도분포는 축대칭에 비하여 θ_b 의 위치가 명확하게 나타나지 않는다. Fig. 8에는 축대칭 및 2차원 제트유동의 경우에 압력분포를 비교하였다. 그림에서 바렐충격파가 종료하는 점 부근에서 약간의 오차가 발견되지만, 등엔트로피 영역에서 압력분포는 수치계산의 결과와 상당히 잘 일치한다. Fig. 9에는 축대칭 및 2차원 제트유동의 경우에 속도벡터의 방향을 수치계산 결과와 비교하였다. 그림에서 등엔트로피 영역의 끝부근의 바렐충격파가 발생하는 위치에서 속도벡터의 방향은 급격하게 변화하며,

제트경계에서는 거의 일정방향으로 된다는 것을 알 수 있다. 여기에서 제트경계의 외측에는 유동의 절대 속도값이 작아지므로, 스케일링 식은 제트경계 영역의 끝부근까지 해석하였다. 한편 2차원 제트유동인 경우에도 바렐충격파가 발생하는 위치에서 속도벡터의 방향은 급격하게 변화하지만, 그러나 그 변화량은 축대칭 제트 유동에 비하여 크지 않다. 또 2차원 제트의 경우 제트경계에서 부근에서 속도벡터의 방향은 약간 변화한다.

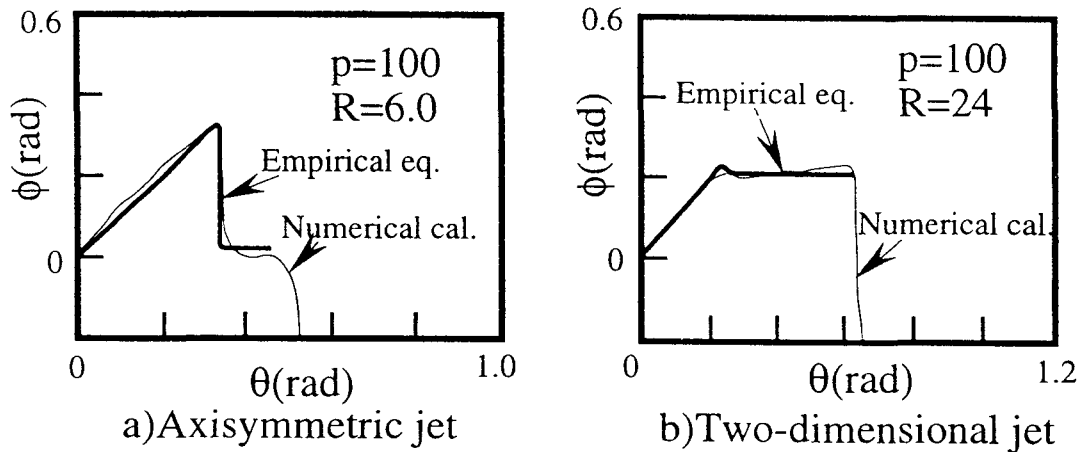


Fig. 9 Comparison of velocity vector distributions

4. 결 론

초음속 부족팽창 유동에 대하여 제트의 기하학적인 형상은 제트가 주변에 미치는 영향과 밀접하게 관련되므로, 공업적으로 매우 중요하다. 본 연구에서는 이전에 행하여진 TVD수치계산 결과를 바탕으로, 축대칭 및 2차원 초음속 부족팽창 제트 유동에서 발생하는 마하디스크, 제트경계, 바렐층 격과 등의 형상을 용이하게 추정할 수 있는 스케일링 식을 제안하였다. 또 제트 내부의 밀도, 압력, 마하수, 속도벡터의 방향 등을 간단하게 추정할 수 있는 경험식을 제안하였다. 본 연구에서 제안된 경험식으로부터 노즐압력비가 주어지는 경우, 초음속 부족팽창 제트의 형상 및 유동장의 상태량을 용이하게 예측할 수 있다. 따라서 초음속 제트를 이용하는 각종 기계가공이나, 금속분말의 제조법, 물체의 냉각, 추진로켓트의 추력산출 등, 다양한 분야에서 본 스케일링 식들이 사용될 수 있다. 그러므로 공업적으로 활용가치가 매우 높을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

1. Shapiro, A.H., "The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow", Vol.2, Ronald Press, 1954, pp.139-141.
2. 金義東, 外1名, "가스 미립화용 초음속 노즐로부터 방출되는 분류에 관한 실험적 연구(1)", 大韓機械學會 論文集, 제20권, 제2호, 1996, pp.679-709.
3. Ginzburg, I.P. and Sokolov, B.N., "Aerodynamics and Heat Transfer in Jet Flows", Heat and Mass Transfer, BSSR, Academy of Sciences, Energia, Vol.1, 1968, pp.344-357.
4. Campbell, C.E. and Farley, J.M., "Performance of Several Conical Convergent-Divergent Rocket Type Exhaust Nozzles". NASA TN, D-467, 1960.
5. Tam, C.K.W., "Supersonic Jet Noise Generated by Large Scale Disturbances", Journal of Sound and Vibration, Vol.38, No.1, 1975, pp.51-79.
6. Adamson, T.C., Jr. and Nicholls, J.A., "On the Structure of Jets from Highly Under-expanded Nozzles into Still Air", Journal Aerospace Sciences, Vol.26, 1959, pp.16-24.
7. Kim, H.D. and Matsuo, K., "Post-Shock Expansion Phenomenon Caused by Normal Shock Wave/Turbulent Boundary Layer Interaction", JSME International Journal, Vol. 36, No.4, 1993, pp.540-552.
8. Love, E.S., Grigsby, C.E., Lee, L.P. and Woodling, M.S., "Experimental and Theoretical Studies of Axisymmetric Free Jets". NASA TR, R-6, 1959.
9. Sherman, F.S., "The Structure and Utilization of Supersonic Free Jets in Low Density Wind Tunnels", Rarefied Gas Dynamics, Vol.2, 1966, pp.84-105.
10. 金義東, "초음속 노즐을 통하는 부족팽창 제트에 관한 수치계산적 연구(2)", 大韓機械學會 論文集, 제20권, 제6호, 1996, pp.1994-2004.
11. 金義東, 外2名, "교차하는 두 초음속 분류에 관한 실험적 연구", 大韓機械學會 秋季學術大會 論文集, 제2권, 1995, pp.554-558.
12. 金義東, 外 1名, "초음속 부족팽창 제트흐름의 수치해석적 연구", 제6차 誘導武器學術大會 論文集, 1996, pp.182-189.