한국 CAD/CAM 학회 논문집
제 2 권 제 4 호 1997년 12월 pp. 237-243

NURBS Surface Global Interpolation에 대한 한 방법

정형배*, 나승수**, 박종환***

A New Method of the Global Interpolation in NURBS Surface

Hyung-Bae Jung*, Seung-Soo Na** and Jong-Whan Park***

ABSTRACT

A new method is introduced for the interpolation in NURBS Surface. This method uses the basis functions to assign the parameter values to the arbitrary set of geometric data and uses the iteration method to compute the control net. The advantages of this method are the feasible transformation of the data set to the matrix form and the effective surface generation as a result, especially to the design engineer.

Key words : NURBS, Interpolation

1. 서 론

NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)는 충분한 연속성 보장, 국부적인 변형 가능성, 곡면식의 일반성, 곡면제어의 편이성 등 여러가지 장점을 가지고 설계를 보다 용이하게 하므로 곡면설계에 자주 이용된다[1-2]. NURBS Surface Global Interpolation은 주어진 설계 데이타를 통과하는 NURBS 곡면을 생성하는 분야이다. NURBS 곡면의 생성에서 제어점들이 결정되면 NURBS 곡면이 결정되므로, 결국 NURBS Surface Global Interpolation은 제어점들을 결정하는 방식을 연구하는 분야이다. 그동안 이 분야에 대한 많은 연구가 이루어져 수학적인 완전해를 구할 수 있는 여러 방법들이 소개되었다[2-4]. 근본적으로 주어진 설계 데이타를 통과하는 NURBS 곡면은 무한히 많으므로 완전해를 구할 수 있는 방법은 무한히 많다. NURBS Surface Interpolation에서는 각 설계 데이타에 파라메타값을 어떻게 할당하느냐에 따라 전혀 다른 곡면이 생성된다. 설계 관점에서 좋은 방법의 판별기준은 설계 특성에 맞는 얼마나 효율적인 곡면을 생성할 수 있느냐에 달려있다. 불행히도 지금까지 소개된 방법들은 자동차, 선박 등 일반적인 물체의 설계에서 자주 나타나는 불균일한 배열의 설계 데이타들을 이용하여 효율적인 곡면을 생성하는 데 여러가지 어려운 문제점들이 발생하고 있다.

따라서, 본 연구에서는 이러한 문제점들을 개선할 수 있는 새로운 해결 방법을 모색하고자 한다.

본 연구에서는 새로운 개념에 의해 파라메타값들을 구하고, 기존의 역행렬을 이용하는 직접법이 아닌 점진적인 접근을 시도하는 반복법을 사용하여 제어점들을 계산하는 새로운 방법을 제안하고자 한다. 또한, 새로운 방법을 실제 설계에 응용하고자 선박의 선형 설계시 필요한 offset data만을 가지고 실제 선형 설계를 수행하여 그 유용성을 확인하고자 한다[5-6].

*종신회원, 목포대학교 선박해양공학과
**목포대학교 선박해양공학과
***목포대학교 선박해양공학과

2. NURBS Surface Global Interpolation

NURBS 곡선의 vector-valued polynomial 일반식은 다음과 같다.

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \mathbf{P}_i N_{i,p}(u)}{\sum_{i=0}^{n} w_i N_{i,p}(u)} \tag{1}$$

여기서, w_i: weights

$\mathbf{P}_i$: control points

$N_{i,p}(u)$: normalized B-spline basis functions (degree: p)

여기에서 weight는 각 제어점들이 가지는 potential(가중치)이며, basis function은 특정한 매개변수 값에서 각 제어점들이 가지는 영향치를 계산하는 함수이다[7-10]. basis function은 매개변수와 knot vector (매듭값)들 사이의 관계로 정의되는데 매듭값은 매개변수 전체범위를 여러개의 범위로 쪼개어 부여해 놓은 값이다.

Basis function과 매듭값의 정의는 다음과 같다.

$$N_{i,0}(u) = 1 \text{ if } uu_i \le u \le uu_{i+1} \quad 0 \text{ otherwise} \tag{2}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - uu_i}{uu_{i+p} - uu_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{uu_{i+p+1} - u}{uu_{i+p+1} - uu_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

여기서, $\mathbf{uu}=[uu_0, uu_i, ..., uu_m]$: Knot vector

$m=n+p+1$

m: The number of knot vector

p: The number of degree

n: The number of control points

매듭값의 형태는 등간격을 갖는 주기적 매듭값(uniform)과 그렇지 않은 비주기적 매듭값(nonuniform)이 있다. 비주기적 매듭값은

$$\mathbf{uu}=\{\alpha, \alpha, ..., \alpha, uu_{p+1}, ... uu_{m-p-1}, \beta, \beta, ..., \beta\} \tag{3}$$

형식이며 처음과 끝에서 order 수만큼 반복한다. 반복은 첫번째 제어점과 마지막 제어점을 통과시키기 위한 조치이다. α와 β는 일반적으로 0과 1을 사용한다.

곡면을 표현하는 NURBS는 tensor product 형식으로 다음과 같은 일반식을 갖는다.

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} \mathbf{N}_{i,p}(u)\, \mathbf{N}_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{i,j} \mathbf{N}_{i,p}(u)\, \mathbf{N}_{j,q}(v)} \tag{4}$$

여기서, $w_{i,j}$: weights

$\mathbf{P}_{i,j}$: control net

$N_{i,p}(u)$, $N_{j,q}(v)$: normalized B-spline Basis function

(degree: p, q): u, v direction

$$\mathbf{uu}=\{0, 0, ..., 0, uu_{p+1}, ..., uu_{r-p-1}, 1, 1, ..., 1\}$$

$$\mathbf{vv}=\{0, 0, ..., 0, vv_{q+1}, ..., vv_{s-q-1}, 1, 1, ..., 1\}$$

NURBS 곡면의 제어점들을 설계 데이타로부터 계산하기 위해서는 weights, 매듭값, degree, 파라메타 값들을 먼저 결정하여야 한다. 이들이 먼저 결정되어야만 그에 해당하는 곡면이 결정되고, 그 곡면을 위한 제어점들을 결정할 수 있다. 이 변수들 중 설계자에게 설계의 편의를 도와주는 degree와 weights 및 매듭값들을 input parameter로 남기면 결국 나머지 1개의 인자 즉 파라메타값들을 어떻게 결정하느냐에 따라 전혀 다른 곡면이 생성된다.

NURBS에서 n개의 보간점을 통과하기 위해서는 조정점이 n개 이상이기만 하면 된다. 즉 40×20 설계 데이타를 통과하기 위해서는 같은 수인 40×20 제어점들을 구하면 된다. 우선 곡선에 대해서 알아본다. rational basis function $\mathbf{R}_{i,p}(u)$을 정의하면

$$\mathbf{R}_{i,p}(u) = \frac{w_i \mathbf{N}_{i,p}(u)}{\sum_{j=0}^{n} w_j \mathbf{N}_{j,p}(u)} \tag{5}$$

p를 order, (n+1)개의 조정점을 사용하면 각 설계점은 어떤 매개변수 u_k를 갖는 곡선 상의 점 $\mathbf{Q}_k$이다.

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{C}(u_k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i\, \mathbf{R}_{i,p}(u_k) \tag{6}$$

여기에서, 매개변수값 u를 구하는 방법은 수없이 많을 수 있으나 효율적인 결과치를 고려하여 일반적으로 설계데이타 사이의 거리를 기준으로한 다음의 3가지 방법이 사용된다.

① equally spaced:

$$u_0=0,\ u_n=1 \qquad u_k=k/n \quad k=1, ..., n-1 \tag{7}$$

② chord length:

$$u_0=0,\ u_n=1 \qquad u_i=u_{i-1} + \frac{|\mathbf{Q}_i-\mathbf{Q}_{i-1}|}{\sum_{j=1}^{n} |\mathbf{Q}_j-\mathbf{Q}_{j-1}|} \tag{8}$$

③ centripetal method:

$$u_0=0,\ u_n=1 \qquad u_i=u_{i-1} + \frac{|\mathbf{Q}_i-\mathbf{Q}_{i-1}|^{1/2}}{\sum_{j=1}^{n} |\mathbf{Q}_j-\mathbf{Q}_{j-1}|^{1/2}} \tag{9}$$

매듭값 uu는 일반적으로 사용자에게 input parameter로 남겨두지 않고 다음과 같이 구한다.

$$\mathbf{uu}=\{0, 0, ..., 0, uu_{p+1}, ..., uu_{r-p-1}, 1, 1, ..., 1\} \tag{10}$$

$$uu_{j+p}=\frac{1}{p}\sum_{i=j}^{j+p-1}u_i \quad j=1, ..., n-p$$

이는 파라메타값들을 위의 방법들에 의해서 구할 때, 행렬에 singular case가 발생하여 역행렬을 구할 수 없는 경우를 방지하기 위하여 매듭값과 파라메타값 사이에 일정한 관계를 설정해 놓은 것이다. 역행렬과 상관없는 방법에서는 매듭값 결정을 사용자에게 일임할 수 있다.

파라메타값과 매듭값이 결정되면 이를 이용하여 다음과 같이 제어점 $\mathbf{P}_i$를 포함한 방정식을 행렬 형태로 표현이 가능하며, 이 방정식을 역행렬을 이용하여 계산하여 제어점 $\mathbf{P}_i$를 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \mathbf{R}_{i,p}(u_0) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathbf{R}_{i,p}(u_1) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathbf{R}_{i,p}(u_n) & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \cdot \\ \mathbf{P}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \cdot \\ \mathbf{Q}_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

NURBS Surface의 interpolation은 활발히 연구가 진행되는 분야로 첫번째 매개변수를 사용하여 윗식들에 의한 각 제어점들을 구하고 이들을 다시 설계 데이타로 이용하여 두번째 매개변수로 또한번 윗식을 적용하여 최종 제어점들을 구한다. 이 때 매개변수의 값은 구해진 매개변수의 값들에서 같은 행이나 열의 값들의 평균값을 그 행이나 열의 매개변수의 값으로 택한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{k,l} &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}_{i,j}\,\mathbf{R}_{i,p}(u_k)\,\mathbf{R}_{j,q}(v_l) \\ &= \sum_{i=0}^{m}\left[\sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}_{i,j}\,\mathbf{R}_{i,p}(v_l)\right]\mathbf{R}_{j,q}(u_k) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \mathbf{C}_i(v_l)\,\mathbf{R}_{j,q}(u_k) \end{aligned} \tag{12}$$

3. 새로운 방법

위 방법들을 선박의 선형설계에 적용해 본 결과 효과적인 곡면을 얻을 수 없어 본 연구에서는 다음과 같은 새로운 방법을 제안하고자 한다.

"각 제어점들이 곡면에 최대로 영향을 미치는 매개변수를 basis function에서 구하여, 그 evaluation point들이 설계 데이타를 지나도록 반복적으로 접근시킨다."

$\mathbf{P}_{i,j}=\mathbf{Q}_{i,j}$
for {
  $\mathbf{P}_{i,j}=\mathbf{P}_{i,j}+(\mathbf{Q}_{i,j}-\mathbf{E}_{i,j})$
}

여기서 $\mathbf{P}_{i,j}$: 제어점
$\mathbf{Q}_{i,j}$: 설계 데이타
$\mathbf{E}_{i,j}$: NURBS Surface의 Evaluation Points

이 방법은 각 설계점간의 거리에 기준을 두지않고 새로운 개념에 의해 매듭값들을 구하고, 이를 이용하여 제어점들을 계산하는 새로운 방법이다. E_{ij}는 식(1)과 (2)에 의해서 구해진다. 매듭값은 종래의 방법에서는 역행렬의 존재여부 때문에 파라메타값과 연관하여 구하였다. 그러나 새로운 방법은 역행렬과 상관 없으므로 사용자의 input parameter로 처리된다. 매듭값의 다른 선택이 결과에 어떤 영향을 미치는지는 앞으로 연구되어야할 과제이다. 제시한 방법은 실험적으로 수렴한다. 수렴속도는 하드웨어와 E_{ij} 생성 알고리즘에 크게 의존하나 거의 실시간에 처리된다. 예를들면 40×26 설계점을 10회 반복수정에 1~2분이면 처리된다.

Fig. 1은 곡선에 대한 한 예를 보여준다. Degree는 공업에서 가장 많이 사용하는 bicubic을 사용하였고, 단순화하여 검토코자 weight를 전부 1로 매듭값을 주기적으로 선택하였다. "+"로 표시된 점들은 꼭 통과되어야 할 점의 위치이다. 실선으로 표시된 곡선이 "+"점들을 제어점들로 대입하였을 때의 1차

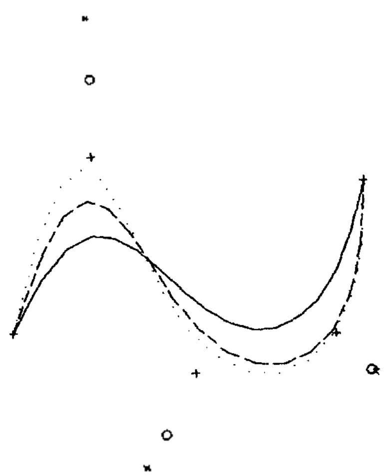


Fig. 1. An example of curve interpolation by new method.

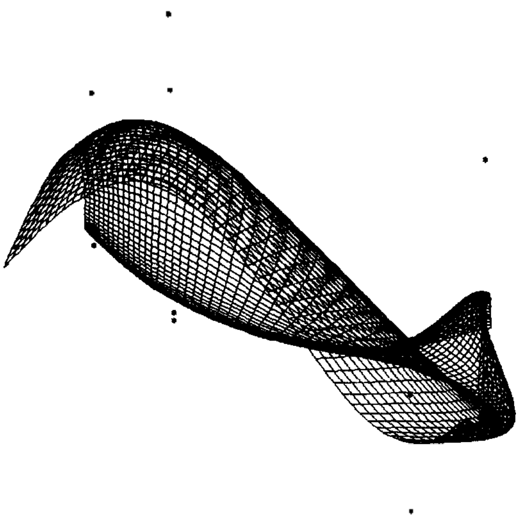


Fig. 2. The example of surface interpolation by new method (0th iteration).

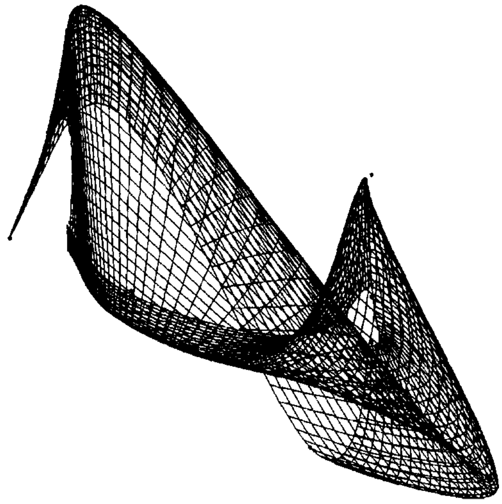


Fig. 4. The example of surface interpolation by new method (10th iteration).

NURBS 곡선이다. Dashed line으로 표시된 곡선은 2차 곡선으로서, 1차 곡선에서 "+"점들이 곡선에 최대로 영향을 미치는 매개변수값들에 의해서 생기는 점들과의 차이를 "+"점에 가감한 결과 "o"점들이 계산되었으며 이들을 다시 제어점들로 대치하였을 때의 결과이다. 여기에서 가감이란 윗식에서 보는바와 같은 position vector의 가감을 의미한다. 점선은 똑같은 방법으로 "o"로 표시된 제어점들이 "x"으로 이동되었을 때의 3차 곡선이다. 이들에서 보는바와 같이 반복 횟수가 거듭될수록 생성되는 곡선이 원하는

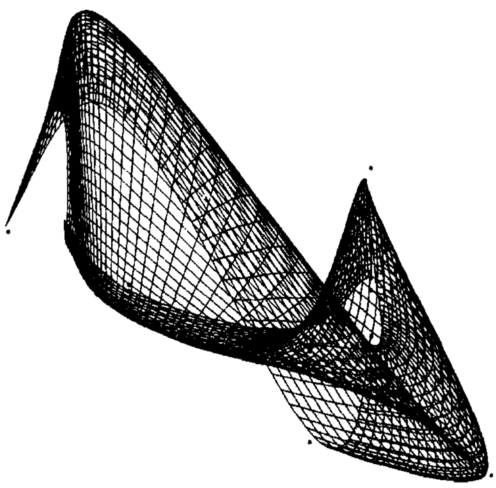


Fig. 3. The example of surface interpolation by new method (5th iteration).

위치인 "+"에 가까워진다.

Fig. 2~4은 이 방법에 대한 한 예를 곡면에서 보여주고 있다. "*" 표시는 꼭 통과하여야 할 설계 데이타이며 line으로 생성된 곡면은 그 상황하에서의 곡면이다. Fig. 2는 설계 데이타를 제어점들로 사용하였을 때의 NURBS surface이며, Fig. 3은 5번의 반복수정이 이루어졌을 때의 상태이고, Fig. 4은 10번의 반복 수정이 이루어진 상태이다.

이 방법의 장점으로는

① 새로운 개념의 도입에 의한 해석으로 개선의 폭이 넓게 열려 있다.

② 곡면이 안정적이다.

③ 설계 데이타의 분포에 영향을 받지 않고 어떠한 형태의 배열에도 적용되므로 엔지니어가 설계에 사용하기 적합하다.

다음에 실용 예로 사용된 배는 221 m×16.1 m×20 m로 설계된 bulk선으로 초기설계 후의 offset data를 받아 설계 데이타 P_i로 이용하였다. Fig. 5은 offset data와 이들이 행렬형태를 만들었던 예를 보여준다. offset data로 직사각형 모양의 행렬을 형성하기 위하여 같은 점을 여러번 반복하여 사용하였다. 이와같이 같은점을 반복하여 사용할 수 있느냐의 여부는 이 방법의 사용자에게 Q_i로 이루어지는 행렬을 형성하는 데 절대적인 편리함을 보장하고 있다.

예에서는 cubic 곡면을 설계한다. 선박에서 가장 복잡한 선수부와 선미부 및 전체적인 형상을 짐작할 수 있는 정면도(body plan)을 검토하겠다. 정면도는

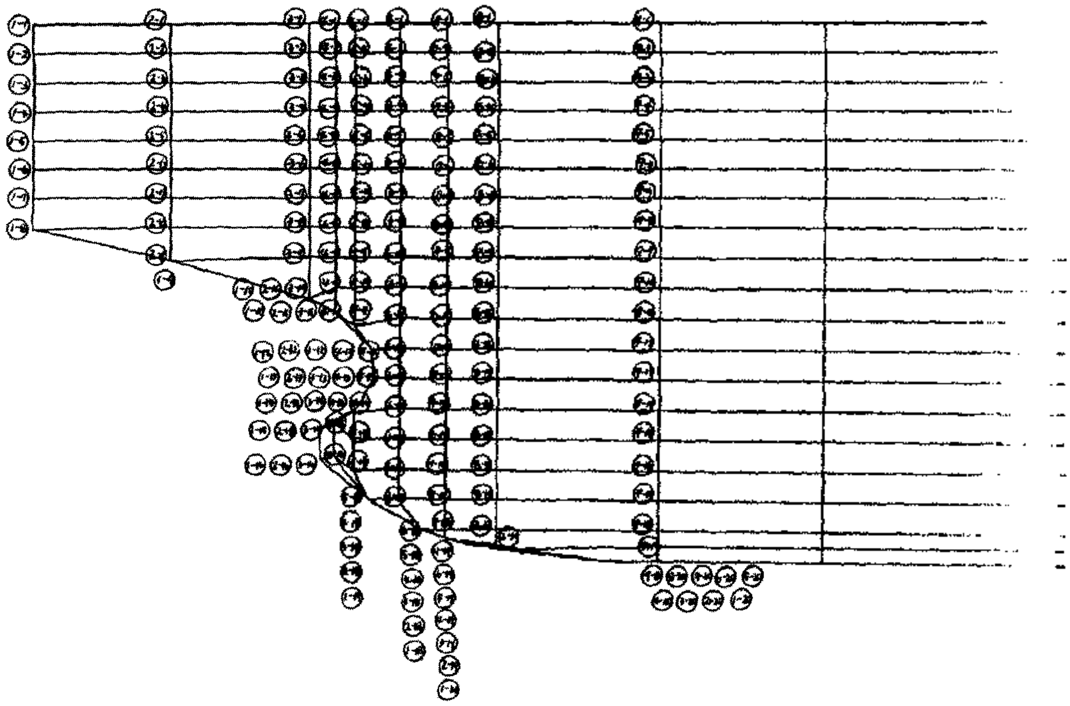


Fig. 5. The method of matrix generation using the offset data.

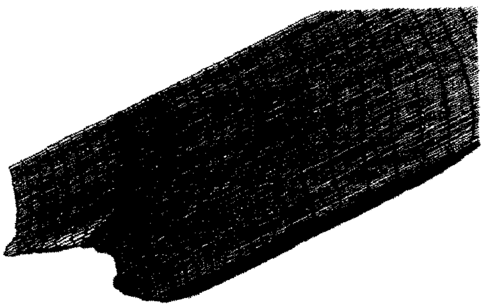


Fig. 6. The result of actual hullform design of ship (aft-body).

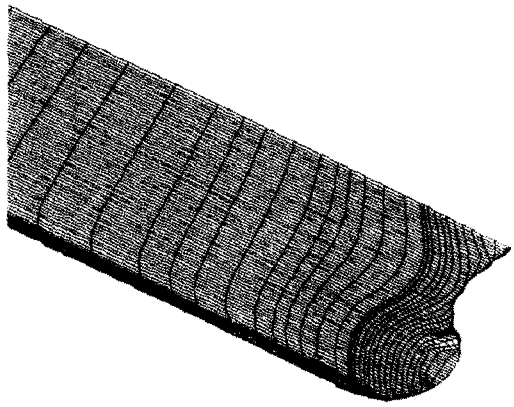


Fig. 7. The result of actual hullform design of ship (fore-body).

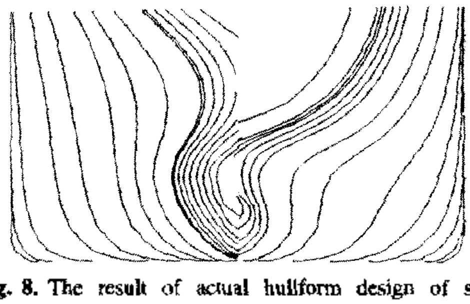


Fig. 8. The result of actual hullform design of ship (body plan).

선박을 정면에서 일정한 간격으로 선박의 길이 방향에 90°로 intersection 시킨 라인들의 집합이다. Fig. 6은 선미부, Fig. 7은 선수부의 형상이다. Fig. 8은 선박의 선형설계에서의 정면도를 나타내고 있으며, "." 은 꼭 지나야할 offset data이고 line은 발생된 곡면에 대한 intersection line들이다. 중첩을 피하고 명확한 표시를 위하여 "."을 character string, pixel 단위로 나타내어 조금의 차이가 발생하지만 "." 표시로 나타난 설계 데이타의 정확한 위치는 "."를 중앙에 두고 정사각형을 그려 왼쪽 밑 끝부분이므로, 주어진 offset data의 위치와 거의 일치(ε=0.0001 m)함을 알 수 있다.

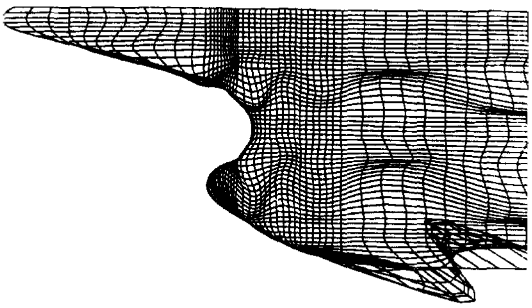


Fig. 9. The result by chord length method.

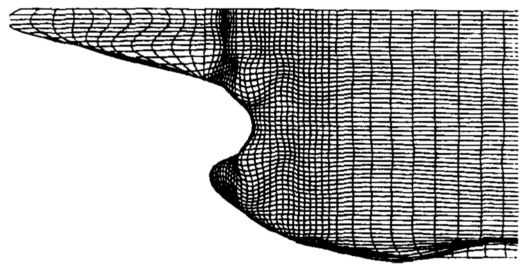


Fig. 10. The result by centripetal method.

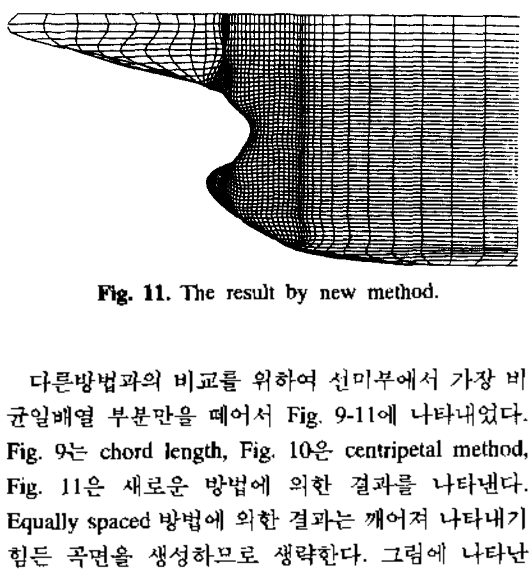


Fig. 11. The result by new method.

다른방법과의 비교를 위하여 선미부에서 가장 비균일배열 부분만을 떼어서 Fig. 9-11에 나타내었다. Fig. 9는 chord length, Fig. 10은 centripetal method, Fig. 11은 새로운 방법에 의한 결과를 나타낸다. Equally spaced 방법에 의한 결과는 깨어져 나타내기 힘든 곡면을 생성하므로 생략한다. 그림에 나타난 바와같이 새로운 방법이 가장 매끄러운 곡면을 형성시켜주고 있다.

4. 결 론

일반적으로 설계 수행시 자주 발생하는 불균일 배열의 설계 데이타를 이용한 NURBS Surface Global Interpolation를 위하여 새로운 방법을 제안하였다. 이 방법은 새로운 개념을 도입하여 설계 데이타에 할당되는 파라메타값들을 구하고, 기존의 역행렬을 이용하는 직접법이 아닌 점진적인 접근을 시도하는 반복법을 사용하여 제어점들을 용이하게 계산하도록 하였다. 새로운 방법을 선박의 선형설계에 적용한 결과 해의 정도를 충분히 보장하면서 주어진 offset data를 통과하는 효율적인 3차원 NURBS 곡면을 생성하였다. 새로운 방법은, 기존의 방법들이 파라메타값을 구하는 데 설계데이타 사이의 거리를 유일한 해의 창구로 이용한 데 반하여, 새로운 접근 방법을 사용함으로서, 앞으로 종래의 방법과의 혼합을 통한 다각도의 연구가 요청된다.

참고문헌

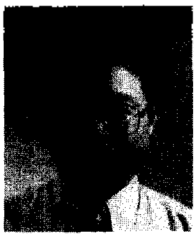
1. Piegl, L., "On NURBS: A Survey", *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 10, No. 1, pp. 55-71, 1991.
2. Piegl, L. and Tiller, W., *The NURBS Book*, Springer, Berlin, pp. 361-382, 1995.
3. Lee, E.T.Y., "Choosing nodes in parametric curve interpolation", *CAD*, Vol. 21, pp. 363-370, 1989.
4. Farin, G.E., *Curves and Surfaces for Computer aided Geometric Design - A Practical Guide*, Academic Press, Boston, pp. 144-148, 1993.
5. 정형배, 나승수, *선박 형상 모델링을 위한 기반 기술 개발 I*, 한국기계연구원 보고서, Feb. 1996.
6. 정형배, 나승수, *선박 형상 모델링을 위한 기반 기술 개발 II*, 한국기계연구원 보고서, Dec. 1996.
7. Piegl, L., "Modifying the Shape of Rational B-Spline. PartII: surfaces", *CAD*, Vol. 21, No. 9, pp. 539-546, 1989.
8. Tiller, W., "Rational B-splines for Curve and Surface Representation", *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 3, No. 10, pp. 61-68, 1983.
9. Hoschek, J., *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*, B.G. Teubner, Stuttgart, pp. 157-184, 1989.
10. Mortenson, M.E., *Geometric Modeling*, John Wiley and Sons, New York, pp. 125-146, 1985.

정 형 배

1977년 서울대학교 공업교육과 학사
1990년 독일 베를린공대 공학석사
1992년 독일 베를린공대 공학박사
1992년 ~ 현재 목포대학교 선박해양공학과 교수
관심분야 : Surface modeling, Computer graphics

나 승 수

1980년 서울대학교 조선공학과 학사
1982년 서울대학교 조선공학과 석사
1989년 서울대학교 조선공학과 박사
1983년 - 1990년 대우조선 영업설계부
1991년 ~ 1994년 한국기계연구원 조선시스템연구부
1995년 ~ 현재 목포대학교 선박해양공학과 교수
관심분야 : 조선 CAD/CAM



박 종 환

1979년 서울대학교 조선공학과 학사
1981년 서울대학교 조선공학과 석사
1992년 The University of Michigan 박사
1994년 ~ 1996년 삼성중공업 중앙연구소 수석연구원
1996년 ~ 현재 목포대학교 선박해양공학과 교수
관심분야 : 선박설계, 전산유체운동해석