

# 부유체 주위의 2차원 회절 문제를 위한 내울적 비정렬 격자 유한 요소 해법

정 구 창\*  
(97년 5월 23일 접수)

## An Implicit Unstructured Finite Element Method for Diffraction of Water Waves by Two-Dimensional Floating Breakwaters

Goo-Chang Chung\*

**Key Words** : Floating Breakwater(부소파제), Unstructured Grid(비정렬 격자), Finite Element Method(유한요소법), Diffraction Problem(회절문제), Matrix Solver(행렬해법)

### Abstract

A hybrid element method is presented for two-dimensional diffraction problem of water waves. In this method, only a limited fluid domain close to irregular bodies is discretized into conventional finite elements, while the remaining infinite domain is treated as one element with analytical representations of high accuracy. A finite element grid is automatically generated by using Delaunay triangulation based on the Bowyer's algorithm and A linear system of equations is approximately solved with the ILU-CGS algorithm. To validate the present scheme, Computational results are compared with the existing experimental data and other numerical solutions.

### 1. 서 론

부유체 주위의 파랑의 회절(diffraction) 및 방사(radiation) 문제에 대한 수치 해법으로는 크게 Green 함수를 이용하여 적분 방정식을 유도하고 연립 방정식으로 변환하여 수치적으로 푸는 경계 요소법(boundary element method)과 지배 방정식인 Laplace 방정식을 적분 형태인 weak form으로

변환시켜 해석 영역을 공간 이산화하여 수치적으로 푸는 유한 요소법(finite element method)으로 분류할 수 있다.<sup>1)</sup> 그 중 유한 요소법은 컴퓨터의 급속한 발전에 힘입어 과거에는 간단한 구조 해석에 국한되었던 것이 현재는 자동차, 항공, 전기 공학등 공학 여러 분야에서 폭 넓게 적용되고 있는 막강한 수치 도구로 자리잡고 있다.

유한 요소법은 해석 영역을 유한 개의 요소로

\* 삼성중공업(주) 조선플랜트연구소

나누어 요소별로 적용하므로 기하학적인 유연성을 지니고 있어 비정렬 격자를 사용하는데 문제가 없고<sup>2)</sup>, 경계 조건의 처리가 수월하며 기존의 구조 해석용 프로그램들이 대부분 유한 요소법을 사용하기 때문에 구조물과의 상호 작용과 같은 복합적인 문제에도 적용 가능하리라 본다.

본 연구에서는 이러한 유한 요소법을 비정렬 격자계<sup>3)</sup>를 도입하여 Fig. 1과 같은 부유체의 형상 및 해저 지형이 복잡하거나 수중 구조물이 존재하는 파랑 전달 문제를 해결하기 위하여 부유체가 고정된 2차원 회절 문제(diffraction problem)<sup>4)</sup>에 도입하고자 한다.

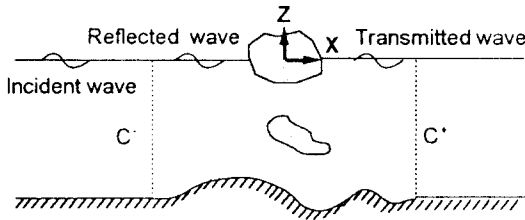


Fig. 1 Definition sketch

사용된 비정렬 격자 생성법으로는 Bowyer 알고리즘<sup>5)</sup>에 기초한 Delaunay 삼각화 기법<sup>6), 9)</sup>이며, 행렬 해법(matrix solver)으로는 3차원 문제나 비정렬 격자계에서 대두되어지는 과도한 컴퓨터 기억용량을 줄일 수 있는 Packed storage method<sup>10)</sup>를 이용한 ILU-CGS(Incomplete Conjugate Gradient Squared) 해법<sup>11)</sup>을 이용하여 보다 효율적으로 행렬식을 풀고자 한다.

## 2. 지배 방정식과 수치 해법

### 2.1 지배 방정식

부유체가 고정되어 있는 2차원 회절 문제(diffraction problem)는 유동장을 비압축성, 비회전성이라 가정하고, 입사파의 파고가 충분히 작고, 자유 수면에서의 경계 조건을 선형화시키면, 아래와 같은 속도 포텐셜을 이용한 Laplace 방정식을 사용하여 문제를 해석할 수 있다.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

in the fluid domain (2.1.1)

이 때, 파랑이 각주파수,  $\omega$ 에 따라 시간적으로 변화하는 정현 함수라고 가정하면, 속도 포텐셜<sup>12)</sup>은 아래와 같은 복소 함수로 표현할 수 있다.

$$\phi(x, z, t) = \text{Re}\{\Phi(x, z) \exp(-i\omega t)\} \quad (2.1.2)$$

또한, 위에서 정의된 속도 포텐셜은 입사 파(Incident wave)와 회절 파(Diffracted wave)의 합으로 생각할 수 있는데, 각각 아래와 같은 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\Phi = \Phi_I + \Phi_D \quad (2.1.3)$$

$$\Phi_I = \left( \frac{-igA}{\omega} \right) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \exp(+ikx) \quad (2.1.4)$$

여기서,  $k$ 는 파수(wave number)로서 dispersion relation,  $\omega^2 = gk \tanh kh$  으로부터 결정되어지며, 지배 방정식인 Laplace 방정식과 아래와 같은 고체 경계 및 자유 수면과 원 해역(far field)에서의 경계 조건으로 2차원 경계치 문제를 해석할 수 있게 된다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on the body} \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \Phi = 0 \quad \text{on the free surface} \quad (2.1.6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on the bottom} \quad (2.1.7)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} \mp ik \right) \left( \Phi - \Phi_I \right) \rightarrow 0 \quad \text{as } kx \rightarrow \pm \infty \quad (2.1.8)$$

### 2.2 유한 요소법

위의 2.1절에서 제시된 경계치 문제에 유한 요소법을 적용하기 위하여 식(2.1.1)에 residual을 취하고 가중 함수(weight function)를 곱하여 공간 적분을 수행하면 아래와 같은 적분 형태의 방정식<sup>13)</sup>을 만들 수 있다.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in the fluid domain} \quad (2.2.1)$$

$$\text{residual} \cong \nabla^2 \phi \quad (2.2.2)$$

$$\int \int_{\Omega} \nu \nabla \cdot \nabla \phi \, d\Omega = \int \int_{\Omega} \nu \nabla^2 \phi \, d\Omega = 0 \quad (2.2.3)$$

위의 적분 방정식에 Gauss-divergence theorem을 적용하여 경계 조건을 포함하는 형태의 weak formulation으로 바꾸면 다음과 같다.

$$\int \int_{\Omega} \nu \nabla \cdot (\nabla \phi) \, d\Omega = 0, \\ \therefore \int \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\nu \nabla \phi) - \nabla \phi \cdot \nabla \nu] \, d\Omega = 0, \quad (2.2.4)$$

$$\therefore \int \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \nu \, d\Omega - \int \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nu \nabla \phi) \, d\Omega = 0, \quad (2.2.5)$$

$$\therefore \int \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \nu \, d\Omega - \int_{\partial \Omega} (\nu \nabla \phi \cdot \vec{n}) \, d\Omega = 0 \quad (2.2.6)$$

여기서, 법선 벡터,  $\vec{n}$ 은 유한 요소의 바깥쪽으로 수직인 단위 벡터이다.

공간 이산화 과정으로 선형 형상 함수(linear shape function)를 이용하여 trial function,  $\phi$  및 test function,  $\nu$ 를 표현하면 다음과 같다.

$$\phi = \sum_{j=1}^3 \phi_j \Psi_j(x, z), \quad (2.2.7)$$

$$\nu = \sum_{j=1}^3 \nu_j \Psi_j(x, z) \quad (2.2.8)$$

위의 식(2.2.7), (2.2.8)을 식(2.2.6)에 대입하고, 임의의 test function에 대하여 정리하면 아래와 같은 일차 연립 방정식이 된다.

$$\sum_{j=1}^{Ne} K_{ij}^e \phi_j = \sigma_i^e \quad \text{where } i=1,2,\dots,Ne, \quad (2.2.9)$$

$$K_{ij}^e = \int \int_{\Omega} \nabla \Psi_i^e \cdot \nabla \Psi_j^e \, d\Omega, \quad (2.2.10)$$

$$\sigma_i^e = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \phi}{\partial n} \Psi_i^e \, ds \quad (2.2.11)$$

여기서, 경계 적분안에 포함된 속도 포텐셜의 구배는 다음과 같은 일반화된 Natural 경계 조건으로

표현될 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -p(s) \phi + r(s) = -p(s) \left( \sum_{j=1}^3 \phi_j^e \Psi_j^e \right) + r(s),$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = - \sum_{j=1}^3 (P(s) \Psi_j^e) \phi_j^e + r(s) \quad (2.2.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i^e &= \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \phi}{\partial n} \Psi_i^e \, ds \\ &= \int_{\partial \Omega} \left[ - \sum_{j=1}^3 (P(s) \Psi_j^e) \phi_j^e + r(s) \right] \Psi_i^e \, ds \\ &= - \sum_{j=1}^3 \left[ \int_{\partial \Omega} P(s) \Psi_i^e \Psi_j^e \, ds \right] \phi_j^e + \int_{\partial \Omega} r(s) \Psi_i^e \, ds, \\ \sigma_i^e &= - \sum_{j=1}^3 P_{ij}^e \phi_j^e + r_i^e \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

그러므로, 위의 식(2.2.13)를 식(2.2.11)에 대입하여 전체 유동장에 대하여 정리하면 다음과 같은 간략한 형태의 유한요소 방정식이 만들어 진다.

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} \phi_j = \Gamma_i, \quad \text{where } i=1,2,3,\dots,N, \quad (2.2.14)$$

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^E (K_{ij}^e + P_{ij}^e), \quad (2.2.15)$$

$$\Gamma_i = \sum_{e=1}^E r_i^e, \quad (2.2.16)$$

$$K_{ij}^e = \int \int_{\Omega^e} (\nabla \Psi_i^e \cdot \nabla \Psi_j^e) \, d\Omega, \quad (2.2.17)$$

$$P_{ij}^e = \int_{\partial \Omega^e} [P(s) \Psi_i^e \Psi_j^e] \, ds, \quad (2.2.18)$$

$$r_i^e = \int_{\partial \Omega^e} [r(s) \Psi_i^e] \, ds \quad (2.2.19)$$

### 2.3 경계 조건

경계 조건은 크게 Dirichlet 경계 조건과 Natural 경계 조건이 있는데, 유한 요소법에서의 경계 조건은 weak form안에 경계 적분이 포함되어 있어서 특별한 경우이외에는 Natural 경계 조건의 부여가 불 필요하다. 앞의 2.1절에서 제시된 경계 조건에는 Dirichlet 경계 조건을 포함하고 있지 않으며, 모두 Natural 경계 조건으로 주어지므로 다음과 같

이 경계 조건의 처리가 무척 간략히 이루어진다.

① 자유 수면 경계 조건

$$p(s) = -\frac{w^2}{g}, \quad r(s) = 0 \quad (2.3.1)$$

② 고체 벽면 경계 조건

$$p(s) = 0, \quad r(s) = 0 \quad (2.3.2)$$

③ (+)원해역 방사 조건

$$r(s) = -ik, \quad p(s) = 0 \quad (2.3.3)$$

④ (-)원해역 방사 조건

$$p(s) = -ik, \quad r(s) = -2ik\Phi_r(x, z) \quad (2.3.4)$$

위의 원해역 경계 조건은 물체에서 무한히 멀리 떨어진 지점에서 적용해야 하는데, 대개의 경우 계산 영역이 지나치게 커지는 것을 방지하기 위하여 방사 조건이 계산에 영향을 미치지 않는 범위인 입사 파의 파장(wave length)의 3배 ~ 5배 떨어진 위치에서 적용<sup>1)</sup>하게 된다. 본 연구에서는 효율적인 수치 계산을 위해서 부유체로부터 멀리 떨어진 원해역(far field)은 수심이 일정하다는 가정하에 속도 포텐셜의 엄밀해법을 적용하고 부유체 주위의 유동장은 변동 수심에 대해 유한요소법을 적용하는 Hybrid Element Method<sup>14)</sup>를 사용하여 근해역과 원해역의 공통 경계인 정합면에서 아래와 같은 정합 조건을 적용시켜 두 영역의 속도 포텐셜을 연결하였다.

2.4 정합 조건

물체에서 멀리 떨어진 수심이 일정한 원해역에서의 속도 포텐셜의 엄밀해는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} + A_0^+ W_0^+ + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^+ W_m^+, \quad (2.4.1)$$

$$A_0^+ = -\frac{igA}{w} R_0^+, \quad (2.4.2)$$

$$W_0^+ = \frac{\cosh k_0^+(z+h)}{\cosh k_0^+ h} \exp(\pm ik_0^+ x), \quad (2.4.3)$$

$$A_m^+ = \frac{igA}{w} R_m^+, \quad (2.4.4)$$

$$W_m^+ = \frac{\cos k_m^+(z+h)}{\cos k_m^+ h} \exp(\mp k_m^+ x) \quad (2.4.5)$$

여기서,  $R_m^+$ 는 결정해야 할 미지상수(unknown coefficients)로서  $m=0$ 일 때는 각각 투과 계수(transmission coefficient)와 반사 계수(reflected coefficient)를 나타내며,  $k^+$ 는 전달 및 산란 모드(propagating and evanescent modes)의 파수(wave number)로서 각각 다음과 같이 구한다.

$$w^2 = gk_0 \tanh k_0 h, \quad m=0$$

$$w^2 = -gk_m \tan k_m h, \quad m \geq 1 \quad (2.4.6)$$

또한, 정합면에서 식(2.4.1)를 다시 쓰면 식(2.4.7)와 같이 표시할 수 있다.

$$\Phi^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} + [W^+][A^+] \quad (2.4.7)$$

정합 조건으로 식(2.4.8)와 식(2.4.9)의 속도 포텐셜을  $C^+$  정합면과  $C^-$  정합면에서 정합시켜 두 영역의 속도 포텐셜을 연결시킨다.

$$\Phi = \Phi^+ \quad (2.4.8)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi^+}{\partial n} = \pm \frac{\partial \Phi^+}{\partial x} \quad (2.4.9)$$

따라서, 위의 식(2.4.7)을 식(2.4.8)와 식(2.4.9)에 대입하여 정리하면 각각 다음과 같은 하나의 정합조건을 얻는다.

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} = [V^+][W^+]^{-1} \{ \Phi \} \text{ at } x = C^+ \quad (2.4.10)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} = [V^-][W^-]^{-1} \{ \Phi \} - [V^-][W^-]^{-1} \{ \Phi_0 \}$$

$$- \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} \text{ at } x = C^- \quad (2.4.11)$$

### 3. 행렬 해법(Matrix Solver)

앞에서 기술된 지배 방정식의 유한요소 방정식은 결국 다음과 같은 행렬식을 푸는 문제로 귀결되어진다.

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (3.1)$$

여기서, 계수행렬(coefficient matrix),  $[A]$ 는 대칭(symmetric)이며, 격자 수가 많을수록 매우 크고 성글기 때문에 Gauss 소거법(gauss elimination)과 같은 기존에 잘 알려진 행렬 해법(matrix solver)으로는 기억해야 할 요소의 개수가 과다하여 많은 컴퓨터 기억 용량을 소요할 뿐만아니라, 행렬식을 푸는데 상당한 시간을 요구하게 되므로 대량의 계산에서는 부적합하다. 가령, Fig. 2에서와 같이 6개의 요소로 구성된 격자계와 그에 따른 계수 행렬,  $[A]$ 의 행렬 형태가 주어졌을 때, 계수 행렬  $[A]$ 의 요소 중 0인 요소가 차지하는 비율은 전체의 약 37%이며, 격자계의 크기가 증가할수록 0인 요소가 차지하는 비율은 점점 증가할 것이다. 그러므로, 본 연구에서는 3차원 문제나 비정렬 격자계에서 대두되어지는 컴퓨터의 과다한 기억 용량을 줄이기 위하여 계수 행렬,  $[A]$ 의 0이 아닌 요소만을 기억하여 계산에 이용하는 Packed storage method<sup>10)</sup>를 사용하였으며, 또한 행렬식 계산에는 반복법의 하나인 ILU-CGS(Incomplete Lower Upper-Conjugate Gradient Squared) 알고리즘<sup>11)</sup>을 사용하여 기존의 유한요소법의 단점으로 지적된 행렬식의 수렴율을 상당히 향상시킬 수 있었다.

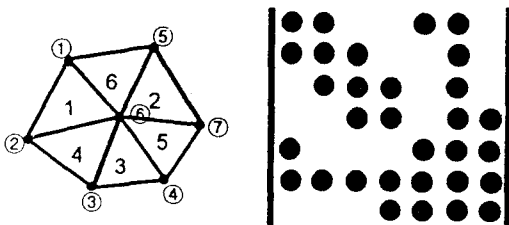


Fig. 2 Unstructured Mesh System and Matrix Form

### 3.1 Preconditioner

반복법으로 위의 행렬식(3.1)을 풀 때, 해의 수렴율은 계수 행렬,  $[A]$ 의 특성에 따라 방정식을 푸는 수렴율이 다르게 되는데, 대개의 경우 계수 행렬,  $[A]$ 의 condition number( $=\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ )에 따라 수렴율이 좌우된다. 따라서, 계수 행렬,  $[A]$ 가 condition number가 큰 ill-conditioned 행렬이라면, 아래와 같이 condition number를 작게 할 수 있는 행렬(preconditioner)을 좌변과 우변에 각각 곱하여 전체적으로 행렬식의 수렴율을 향상시킨다.<sup>15), 16)</sup>

$$(P^{-1} * A)x = (P^{-1} * b) \quad (3.1.1)$$

행렬식 계산에 있어서 해의 수렴율은 Preconditioner,  $P$ 의 형태에 따라 좌우되는데,  $P$ 가  $A$ 와 근사하게 될수록 수렴율이 향상되며,  $P$ 가  $A$ 와 같으면 직접법과 동일한 결과를 나타낸다. 본 연구에서는  $P$ 의 Inverse matrix인  $P^{-1}$ 를  $A$ 의 sparsity pattern과 일치하는 요소만으로 구성된 Incomplete LU factorized matrix를 사용하여 Packed storage method에 의한 계산 효율성을 유지하였다.

### 3.2 CGS의 알고리즘

CGS의 알고리즘은 error vector인  $r = P^{-1}(Ax - b)$ 를 최소화시키는  $x$ 가 바로 식(3.1.1)의 해가 된다는 개념으로서, error vector를 최소화시키는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r_0 &= P^{-1}(Ax_0 - b), \quad \hat{r}_0 = r_0 \\ q_0 &= P^{-1}r_0, \quad \rho_{-1} = 1 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

위의 초기 가정하에서 다음의 과정을 해가 수렴할 때까지 반복한다.

$$\begin{aligned} \rho_k &= \hat{r}_0^T r_k, \quad \beta_k = \rho_k / \rho_{k-1} \\ u_k &= r_k + \beta_k q_k \\ p_k &= u_k + \beta_k (q_k + \beta_k p_{k-1}) \\ v_k &= P^{-1}(AP_k) \end{aligned}$$

$$\sigma_k = \widehat{r}_0^T \nu_k, \quad \alpha_k = \rho_k / \rho_k \quad (3.2.2)$$

$$q_{k+1} = u_k - \alpha_k \nu_k$$

$$\nu_k = \alpha_k (u_k + q_{k+1})$$

$$x_{k+1} = x_k - \nu_k$$

$$r_{k+1} = r_k - P^{-1}(A \nu_k)$$

위에서  $k$ 는 반복횟수를 나타내며,  $r$ 은 error vector,  $p$ 는 direction vector를 각각 나타낸다.

### 3.3 ILU-CGS 알고리즘의 수렴율

본 연구에서 사용된 행렬 해법인 ILU-CGS의 수렴율을 알아보기 위하여 삼성 SPC7600P 486-DX PC환경하에서 행렬 계산에 소요된 CPU 시간을 살펴 보았다. ILU-CGS의 수렴율을 비교할 행렬 해법으로는 각각 Gauss 소거법(gauss elimination)과 LU 분해법을 이용하였으며, 아래의 Table 1.과 같이 크게 세가지의 파랑제어 모델에 대하여 수렴율을 비교한 결과 Fig. 3과 같이 ILU-CGS의 수렴율은 격자 수가 증가할수록 다른 해법에 비해서 적게는 17배에서 많게는 88배까지 빠른 수렴 특성을 보이고 있다. 그러므로, 본 연구에서 사용된 행렬 해법은 유한요소법과 같이 행렬의 크기가 큰 수치 계산시 소요되는 계산 시간을 파격적으로 줄일 수 있었다.

Table 1. Comparison of the Convergence rates of ILU-CGS solver

		ILU-CGS	Gauss 소거법	LU 분해법
상자형 부소파제	요소수 : 728	5.98 sec	104.69 sec	104.14 sec
	절점수 : 406			
수 중 평 판	요소수 : 1416	16.42 sec	925.49 sec	925.21 sec
	절점수 : 779			
외해형 부소파제	요소수 : 2060	39.71 sec	3472.28 sec	3490.18 sec
	절점수 : 1193			

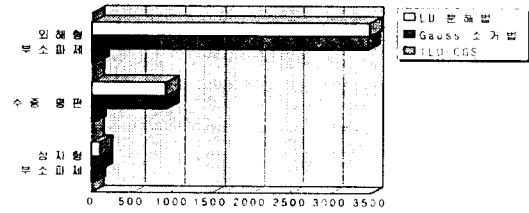


Fig. 3 Comparison of the Convergence rates of ILU-CGS solver

## 4. 소파 효율 및 파력 계산

앞의 3장에서 식(3.1)의 행렬식을 풀면 전 유동장에서의 포텐셜,  $\phi$ 의 값을 구하게되며, 이것으로부터 각각 소파 효율 및 부유체에 미치는 파력을 계산하게 된다.

### 4.1 소파 효율

부유식 소파제의 소파 성능 고려시 가장 중요한 Parameters중 하나인 투과 계수와 반사 계수는 정합면에서 구해진 수치해와 식(4.1.2)으로 주어진 해석해로부터 구할 수 있다.

$$\phi^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_l^+ \end{pmatrix} + \phi_D^+, \quad (4.1.1)$$

$$\phi_D^+ = \left( \frac{-igA}{w} \right) \sum_{m=0}^{\infty} R_m^+ \frac{\cosh k_m(z+h^-)}{\cosh k_m h} e^{\pm ik_m x}, \quad (4.1.2)$$

$$= \left( \frac{-igA}{w} \right) \left[ R_0^+ \frac{\cosh k_0(z+h^-)}{\cosh k_0 h} e^{\pm ik_0 x} \right] + \left( \frac{-igA}{w} \right) \left[ \sum_{m=1}^{\infty} R_m^+ \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} e^{\mp ik_m x} \right]$$

여기서, 반사 계수(reflected coefficient) 및 투과 계수(transmitted coefficient)는 각각  $R_0^+$ 와  $R_0^+$ 를 가리키며,  $m=0$ 일 때는 propagating mode를 나타내며 dispersion relation,  $w^2 = gk_0 \tanh k_0 h$ 로부터 구하며,  $m \geq 1$ 일 때는 evanescent mode를 나타내며,  $w^2 = -gk_m \tan k_m h$ 로부터 구하게 된다.

4.2 파력 계산

부유체가 받는 파력은 부유체에 작용하는 압력을 적분함으로써 구할 수 있는데, 2차원인 경우 각각 X, Z 방향의 힘과 Y 방향의 모멘트로 구분할 수 있다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) + gz = 0 \quad (4.2.1)$$

$$p(x, z, t) \cong -\rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = i\rho w \Phi(x, z) \exp(-i\omega t), \quad (4.2.2)$$

$$p(x, z, t) = p(x, z) \exp(-i\omega t) \quad (4.2.3)$$

$$p(x, z) = i\rho w \Phi(x, z) \quad (4.2.4)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{F}(x, z) \\ \vec{M}(x, z) \end{pmatrix} = \int_{\partial \Omega_n} P(x, z) \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{n} \times \vec{n} \end{pmatrix} ds, \quad (4.2.5)$$

$$F_x = i\rho w \int_{\partial \Omega_n} \Phi(x, z) n_x ds, \quad (4.2.6)$$

$$F_z = i\rho w \int_{\partial \Omega_n} \Phi(x, z) n_z ds, \quad (4.2.7)$$

$$M_y = i\rho w \int_{\partial \Omega_n} \Phi(x, z) (zn_x - xn_z) ds \quad (4.2.8)$$

여기서, 식(4.2.6), (4.2.7), (4.2.8)를 각각 무차원시키면 다음과 같다.

$$F_x^* = \frac{F_x}{\rho g B A}, \quad (4.2.9)$$

$$F_z^* = \frac{F_z}{\rho g B A}, \quad (4.2.10)$$

$$M_y^* = \frac{M_y}{1/2 \rho g B^2 A}, \quad (4.2.11)$$

5. 격자 생성법

비정렬 격자는 복잡한 물체 및 그러한 물체 주위의 영역을 유한 개의 요소로 분할하는데 사용되는 격자로서 Quadtree/Octree Method, 전방진진기법(Advancing Front Method), Delaunay 삼각화 등이 비교적 효율적으로 영역을 분할하는 것으로 알려져 있다.<sup>3)</sup>

Delaunay 삼각화<sup>8)</sup>는 주어진 점들로부터 가장 최적의 격자를 생성하는 것으로 알려져 있는데, 이는 1850년 Dirichlet에 의해서 수학적으로 정립된

이래로 항공, 자동차, 전기공학 등 여러 분야에서 활발히 연구되고 사용되고 있다.

본 연구에서는 Delaunay 삼각화를 사용하여 주어진 영역을 삼각형 요소로 분할하였으며, Bowyer가 제안한 외접원의 성질을 이용한 알고리즘<sup>5)</sup>에 기초하였다.

5.1 Voronoi tessellation 과 Delaunay 삼각화

분할하고자 하는 영역을 유한개의 삼각형 요소로 나누는 방법인 Delaunay 삼각화는 1850년 Dirichlet에 의해서 수학적으로 정립되었으며, 기하학적인 Topology로써 일종의 영역 분할법인 Voronoi tessellation 또는 Dirichlet tessellation과 쌍을 이룬다. 여기서, Voronoi tessellation이라는 것은 어떤 주어진 위치에서 그 위치를 둘러싼 영역 중 다른 어떤 곳 보다도 주어진 그 위치에 제일 가까운 영역을 할당하여 영역을 분할하는 것을 말한다. 이를 수학적 정의를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\{V_i\} = \{p \mid \|p - p_i\| < \|p - p_j\|, \forall j \neq i\} \quad (5.1)$$

식 (5.1)에서  $V_i$  는 점집합으로 구성된 Voronoi tessellation이고,  $P_i$  는  $V_i$  에 대응하는 점이며,  $P_j$  는 다른 점들을 나타낸다. Delaunay 삼각화는 위에서 정의된 Voronoi tessellation의 공통경계를 사이에 두고 있는 각각의 점들을 연결함으로써 이루어진다. 이를 그림으로 설명하자면, Fig. 4 에서 점선이 Voronoi tessellation을, 실선이 Dirichlet 삼각화를 나타내고 있다.

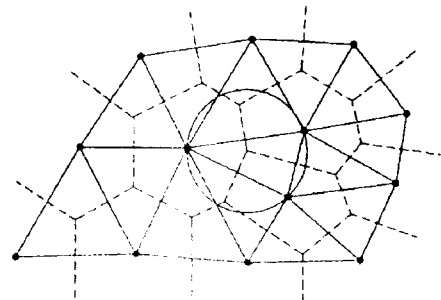


Fig. 4 Voronoi tessellation and Delaunay triangulation

### 5.2 Bowyer scheme

Fig. 5, Fig. 6, Fig. 7과 같이 분할하고자 하는 영역내에 새로운 점이 추가되었을 때에 그 점을 포함한 외접원을 이루는 삼각형 요소는 없어지고 새로운 삼각형 요소가 만들어지는데, 이렇게 삼각형의 외접원의 성질을 이용하여 주어진 영역을 삼각화하는 방법을 Bowyer scheme이라 한다.

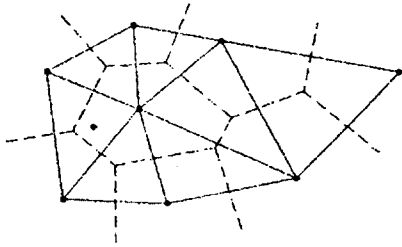


Fig. 5 Insertion of New point (1)

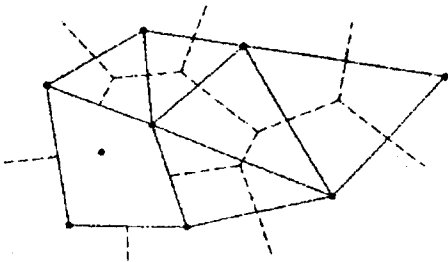


Fig. 6 Insertion of New point (2)

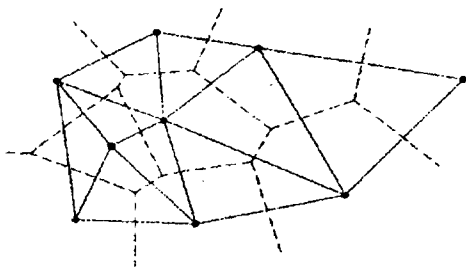
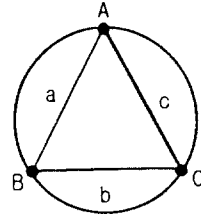


Fig. 7 Insertion of New point (3)

이때, 새로운 점의 분포 방법에는 경계점만으로 삼각화를 이룬뒤 삼각형 요소의 질을 판단해서 점을 추가하는 방법(6)과 삼각화전에 미리 난수 발생등으로 무작위로 점을 추가하는 방법, 정렬 격자의 형태로 점을 분포시키는 방법<sup>9)</sup>, 배후면 격자의 정보로부터 점을 추가하는 방법<sup>9)</sup>등이 있는데, 본 연구에서는

삼각형의 격자 질을 판단해서 새로운 점을 추가시키고 여기에 Bowyer 알고리즘을 이용하여 삼각화하는 방법을 택하였다. 이 때, 삼각형의 격자의 질은 Fig. 8과 같이 해당 삼각형의 외접원의 반지름과 내접원의 지름의 비로부터 계산할 수 있는데, 참고로 정삼각형은 1의 값을 갖으며 삼각형의 질(quality)의 값이 1에 가까울수록 격자의 질이 좋아진다.



$$quality = \frac{8(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}, \quad (0 \leq quality \leq 1)$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Fig. 8 Quality of triangle

## 6. 계산 결과 및 검토

본 연구에서 제시된 유한요소법의 타당성과 정확성을 보이기 위하여 다음과 같이 세 종류의 고정된 물체주위의 2차원 회절문제(diffraction problem)에 대한 수치 계산을 수행하였다. 이 때, 입사파는 각 주파수( $\omega$ )에 따라 시간적으로 변화하는 정현함수인 규칙파(regular wave)로 가정하고, 4장에서 언급된 투과계수, 반사계수 그리고 소파제에 작용하는 동유체력을 중심으로 수치 결과를 검토하였다.

### 6.1 상자형(Pontoon) 부소파제<sup>12)</sup>

Fig. 9와 같이 수심이 0.5 m인 파랑장에 폭(breadth)이 0.5 m, 흘수(draft)가 0.1 m인 상자형 부소파제가 설치되어 있을 때, 입사파의 파장(wave length)을 변화시켜 가면서 부체의 소파 효율 및 부체가 받는 파력을 살펴보았다.

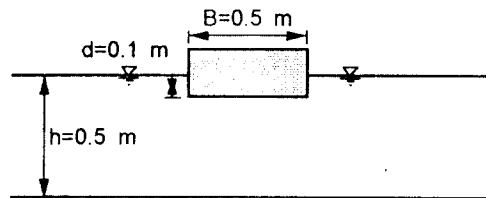


Fig. 9 Pontoon type breakwater



Fig. 10는 계산에 사용된 비정렬 격자계로서 속도 포텐셜의 정합 조건이 적용되어지는 정합면의 위치를 대략 부체의 폭 정도의 크기를 갖게 하여 정합면의 위치에 따른 수치 계산의 오차를 줄일 수 있었다.

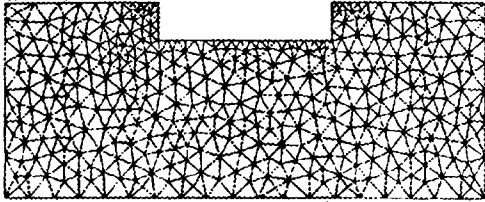


Fig. 10 Unstructured meshes around Pontoon type breakwater

Fig. 11에서는 상자형 부소파재의 투과계수를 나타낸 것으로 부체 폭을 기준으로 입사파의 파장을 무차원시켜 나타내었다.  $\lambda/B$ 가 대략 3.4를 기준으로 실험치와 수치해의 약간이 차이가 보이는데, 이것은 부체의 동요로 인해 발생한 교란이 회절파와 간섭을 일으켜 발생한 효과로 보여진다.

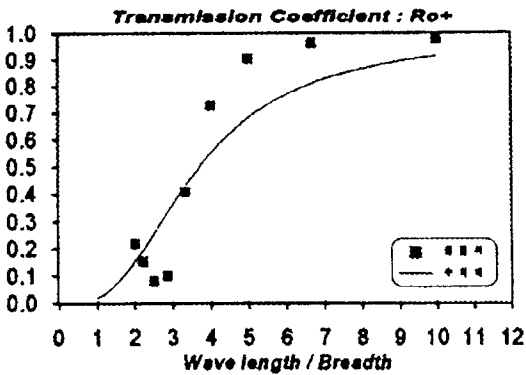


Fig. 11 Transmitted coefficient of Pontoon type breakwater

Fig. 12, 13에서는 각각 부체주위의 파랑장의 등포텐셜선과 등압력선도를 나타낸 것으로, 해양환경을 최대한 보존하면서 소파 효율을 극대도 하는 부소파재 설계의 기초 자료로서 충분히 활용될 수 있으리라 사료되어진다.

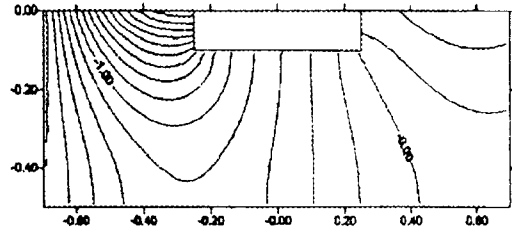


Fig. 12 Iso-potential lines around Pontoon type breakwater

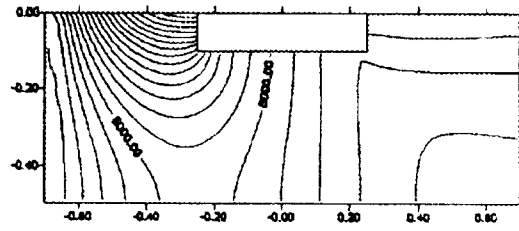


Fig. 13 Iso-pressure lines around Pontoon type breakwater

Fig. 14에서는 부체가 받는 동유체력인 힘과 모멘트를 나타낸것으로 한국해양연구소의 수치결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

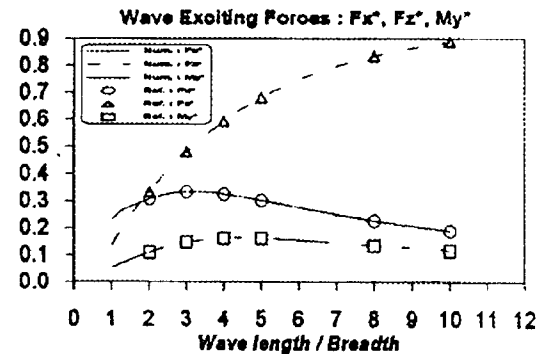


Fig. 14 Wave exciting forces on the floating body

## 6.2 물수형 평판주위의 파랑 변형<sup>17)</sup>

Fig. 15에서는 폭이 0.6 m, 두께가 0.003 m 인 물수형 평판이 수심 0.2 m에 놓여 있을 때, 평판에 의한 소파 성능을 살펴보고자 한다.

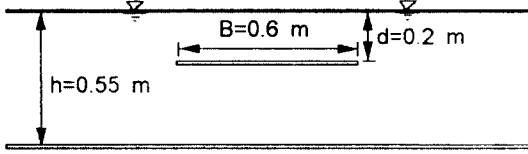


Fig. 15 Submerged flat plate

Fig. 16에서는 계산에 사용된 비정렬 격자계를 보여주고 있는데, 평판주위의 파랑장을 잘 묘사하고 있다.

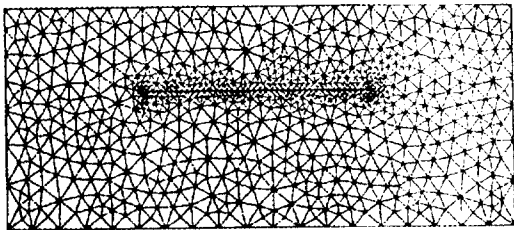


Fig. 16 Unstructured Meshes around submerged flat plate

평판에 의한 소파성능은 Fig. 17와 같이 반사계수를 참고문헌 [17]의 실험치와 비교하여 살펴보았는데, 상당히 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

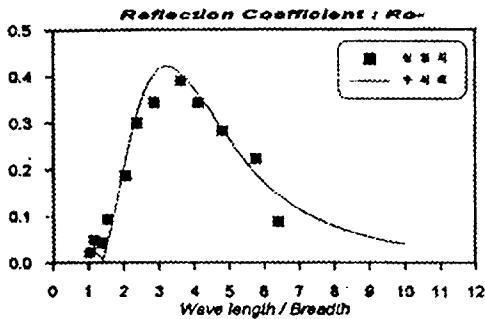


Fig. 17 Reflected coefficient of submerged flat plate

Fig. 18에서는 물수형 평판 주위의 등포텐셜 선도를 나타내었는데, 여기서 주목할 점은 평판위에 거의 평판의 길이에 해당하는 균일류가 만들어진다 것이 특이할 만하다.

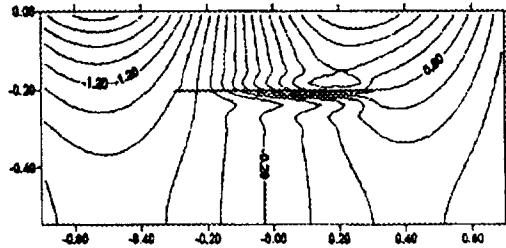


Fig. 18 Iso-potential lines around submerged flat plate

### 6.3 외해형 부소파제<sup>18-19)</sup>

Fig. 19에서 제시된 부소파제는 1993년에 일본 미쯔비시 중공업에서 시공된 것으로 실제 해역에서 설치되어 운용중인 외해형의 부소파제이다.

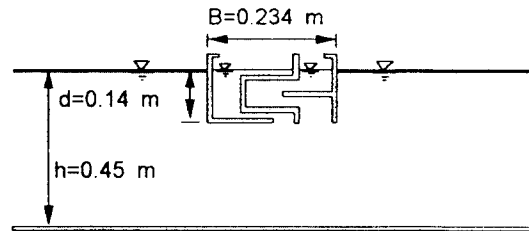


Fig. 19 Open-sea type breakwater

Fig. 20에서는 부소파제주위의 비정렬 격자계의 모습을 보여주고 있으며, Fig. 21에서는 부소파제의 소파 특성을 알 수 있는 투과계수를 참고문헌 [18]에서 제시된 실험치와 비교하였다. 수치해와 실험치의 정성적인 특성은 유사하지만, 수치해가 실험치와 상당부분 차이는 이유는 소파 기구중 내부자유수면의 동요 및 부체 내부의 수류의 점성 마찰 효과 그리고 부체의 동요로 인한 방사 효과를 반영하지 못한 이유인것 같다.

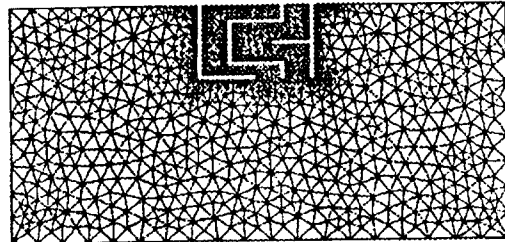


Fig. 20 Unstructured meshes around Open-sea type breakwater

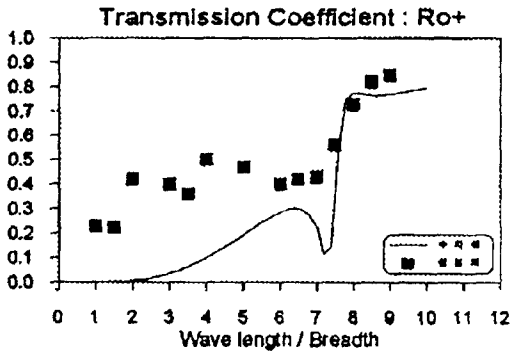


Fig. 21 Transmitted coefficient of Open-sea type breakwater

## 7. 결 론

본 연구에서는 부유체가 고정된 2차원 회절 문제(Diffraction Problem)에 비정렬 격자계와 ILU-CGS 행렬 해법을 도입한 유한요소법을 적용시켜 보았다. 본 연구의 타당성과 정확성을 검토하기 위해 종래의 수치 및 실험 결과와 비교한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. Bowyer 알고리즘에 기초한 Delaunay 삼각화를 이용하여 부체주위의 파랑장을 쉽게 자동 격자화 할 수 있었으며, 생성된 격자의 질도 만족할 만한 결과를 얻을 수 있었다.
2. Nonzero인 행렬 요소만을 기억하여 계산에 이용하는 Packed Storage Method를 이용한 ILU-CGS 행렬 해법을 사용하여 유한요소법의 단점으로 지적된 컴퓨터의 과도한 기억 용량 및 행렬 계산 시간에서 상당한 이득을 가져올 수 있었다.
3. 유한요소법의 경계 조건의 처리가 무척 간략히 이루어 졌으며, 특히 부체 주위의 정합면에서 속도와 압력의 정합 조건을 사용하여 원방 경계 조건을 처리함으로써, 수치 계산량을 상당히 줄이면서 만족할 만한 결과를 얻을 수 있었다.
4. 부소파제의 소파 기구에는 크게 고정 부체에 의한 입사파를 회절시키는 소파 기구, 부체의 동요에 의한 역위상의 방사파를 이용한 소파

기구, 내부 자유 수면의 움직임에 의한 소파 기구와 부체 내부 수류의 점성 마찰로 인한 소파 기구로 분류할 수 있는데, 본 연구에서 살펴본 2차원 회절 문제만으로는 부소파제의 정확한 소파 성능을 예측하기가 어려웠다. 그러므로, 본 연구의 향후 과제로는 이러한 부소파제의 정확한 소파 성능을 예측하기 위하여 부체의 동요를 고려한 방사 문제 및 부체 내부의 자유 수면을 포함한 파랑전달 문제를 해결할 수 있도록 에너지 감쇄 기구를 개발하여 프로그램을 확장하는 것이 남아 있다.

## 후 기

본 연구는 한국기계연구원과 공동으로 진행중인 “대형 해상 복합플랜트” 과제 중 단위 과제인 해역 정온화를 위한 부유식 소파제의 개발에 대한 수치 결과이다.

## 참 고 문 헌

- 1) Chiang C.Mei, "THE APPLIED DYNAMICS OF OCEAN SURFACE WAVES", Advanced Series in Ocean Engineering, Vol. 1, World Scientific, 1989
- 2) R.Lohner, "An Adaptive Finite Element Scheme for Transient Problems in CFD", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 61, pp. 323-338, 1987
- 3) Gregory S.Spragle, William R.McGrory, and Jiunn Fang, "Comparison of 2D Unstructured Grid Generation Techniques", AIAA 91-0726, pp.1-19, 1991
- 4) Dick K.P.Yue, Hsuan s.Chen and Chiang C.Mei, "A Hybrid Element Method For Diffraction of Water Waves By Three-Dimensional Bodies", International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 12, pp. 245-266, 1978

- 5) A. Bowyer, "Computing Dirichlet Tessellation", The Computer journal, Vol. 24, No. 2, pp. 162-166, 1981
- 6) Klaus A.Hoffmann and Steve T.Chiang, "Computational Fluid Dynamics For Engineers", Engineering Education System, Vol. 2, pp. 236-264, 1993
- 7) R.Lohner, "Some Useful Data Structures for the Generation of Unstructured Grids", Communications in Applied Numerical Methods, Vol. 4, pp.123-135, 1988
- 8) 김형석, "Delaunay 삼각화를 이용한 3차원 자동요소분할", 전기학회 논문지, 37권 12호, 1988
- 9) 하태성, 김종태, 맹주성, "정렬 배후면 격자계를 이용한 Delaunay 삼각화", 항공우주학회지, 제 22권, 제 4호, 1994
- 10) M.P.Robichad and P.A.Tanguy, "FEM solution of Three dimensional Incompressible Fluid problems by a preconditioned conjugate residual method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 447-457, 1987
- 11) O.Dahl and S.O.Wille, "An ILU Preconditioner with Coupled Node Fill-In Iterative Solution of the Mixed Finite Element Formulation of the 2D and 3D Navier-Stokes Equations", International journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 15, pp. 525-544, 1992
- 12) 송원오, 외, "A Study on the Environmental Loadings on Maritime Structures and the Basic Experimental Facilities", 한국해양연구소 연구 보고서, pp. 80-95, 1989
- 13) Eric B.Becker, Graham F.Carey, and J.Tinsley Oden, "FINITE ELEMENTS : An Introduction", Vol. 1, Prentice-Hall, 1981
- 14) J. A. Aranha, C.C.Mei and D.K.P.Yue, "Some Properties Of A Hybrid Element Method For Water Waves", International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 14, pp. 1627-1641, 1979
- 15) Auke van der Ploeg, "Preconditioning Technique for Non-Symmetric Matrices with Application to Temperature Calculations of Cooled Concrete", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 35, pp. 1311-1328, 1992
- 16) Erik O.Einset and Klavs F.Jensen, "A Finite Element Solution of Three-Dimensional Mixed Convection Gas Flows in Horizontal Channels Using Preconditioned Iterative Matrix Methods", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 14, pp. 817-841, 1992
- 17) 조일형, 김현주, "경사파중 물수형 평판에 의한 파랑변형", 해양공간이용 대형 복합플랜트 개발(I) 연구 보고서, 한국기계연구원, 1996
- 18) 高木儀昌, "浮消波堤による養殖場沖合化の取り組み", 日本造船學會誌, Vol. 809, pp.805-809, 1996
- 19) 大橋 丹, 柏木 正, 他, "内部自由水を利用する浮消波堤の消波性能に関する研究", 日本造船學會論文集, Vol. 169, pp. 215-222, 1991