

● 論 文

얇은 보 구조물의 횡좌굴에 대한 total Lagrangian 유한요소해석

정 동 원*
(97년 5월 14일 접수)

Total Lagrangian Finite Element Analysis of Lateral Buckling for Thin Beam Structures

Dong-Won Jung*

Key Words : Beam Structure(보구조물), Buckling(좌굴), Finite Element Method(유한요소법), Arc-Length Method(호장법)

Abstract

A finite element analysis is performed for lateral buckling problems on the basis of a geometrically nonlinear formulation for a beam with small elastic strain but with possibly large rotations. The total Lagrangian formulation for a general large deformation, which involves finite rotations, is chosen and the exponential map is used to treat finite rotations from the Eulerian point of view. For lateral buckling, the point of vanishing determinant of the resulting unsymmetric tangent stiffness is traced to examine its relationship to bifurcation points. It is found that the points of vanishing determinant is not corresponding to bifurcation points for large deformations in general, which suggests that the present unsymmetric tangent stiffness is not an exact first derivative of internal forces with respect to displacement. This is illustrated through several numerical examples and followed by appropriate discussion.

기 호 설 명

영문자

A : 보의 단면적
Assem : 요소행렬을 전체계에 대한 행렬로 조합
함을 의미

C : 기준좌표계의 탄성텐서
diag[] : 행렬의 대각항
 E_1^k : k절점 단면벡터의 최초에 변형되지 않
은 기준벡터
 e_i : 공간(spatial)좌표계에서의 단위벡터(i =
1, 2, 3)

* 제주대학교 기계공학과

정 동 원

E_i : 기준(reference)좌표계에서의 단위벡터($i = 1, 2, 3$)
 EA : 축강성(axial stiffness)
 EI_1, EI_2 : 주축굽힘강성(principal bending stiffness)
 E, G : 인장 및 전단강성계수
 F : 내력(internal force)
 GA_1, GA_2 : 전단강성(shear stiffness)
 GJ : 비틀림강성(torsional stiffness)
 I_1, I_2 : 면적주관성모멘트
 I_e^h : 어떤 절점에 관계되는 요소
 J : 비틀림상수(torsion constant)
 K^e : 요소접선강성행렬(element tangent stiffness matrix)
 K : 접선강성행렬
 l : 변형전 보의 전체길이
 L : 변형된 형상에서 보의 x 방향 길이, 즉 x 축에 투영된 길이
 $L[\]$: 선형부분
 m : 공간좌표계상의 모멘트(stress couple)
 M : 기준좌표계상의 모멘트
 \bar{m} : 공간좌표계상의 외부모멘트
 n : 공간좌표계상의 힘(stress resultant)
 N : 기준좌표계상의 힘
 \bar{n} : 공간좌표계상의 외부힘
 N_i : 형상함수
 p_e : 비평형 절점하중(unbalanced nodal force)
 p_o : 비례하중을 표시하는 기준하중벡터
 s : 변형전 보의 도심축에 따른 곡선좌표계(curvilinear coordinate)
 S_e : 요소재료 강성행렬(element material stiffness matrix)
 t : 시간
 T_e : 요소기하학적 강성행렬(element geometric stiffness matrix)

${}^n t_i^k$: 변형단계 n 의 k 절점 단면벡터
 u : 변위
 x : 공간좌표계상의 임의점의 위치

그리스 문자

θ^k : 전체 직각좌표계(global coordinate system)에서의 회전각 벡터
 Θ^k : θ^k 을 축벡터(axial vector)로 하는 스큐대칭텐서(skew symmetric tensor)
 ${}^n \Lambda^k$: k 절점의 변형단계 n 에서의 회전
 Φ_o : 공간좌표계상의 도심점의 위치
 γ : 공간좌표계에서의 변형률
 ω_i : 공간좌표계에서의 곡률($i = 1, 2, 3$)
 Ω : ω_i 을 축벡터로 하는 스큐대칭텐서
 Υ : 기준좌표계에서의 변형률
 k_i : 기준좌표계에서의 곡률($i = 1, 2, 3$)
 K : k_i 을 축벡터로 하는 스큐대칭텐서
 k : 전단계수
 ν : 포와송비
 $\eta(s)$: 임의의 가용변분(admissible variation)
 $\eta_o(s), \theta(s)$: 가용변분의 변위, 회전각 성분
 Π : 6×6 회전텐서
 λ : 비례하중일때의 하중인자
 Δ : 증분량을 의미
 $\Psi(s)$: 회전인자
 π_p : 포텐셜에너지
 β : Nondimensional buckling load $\equiv p l^2 / \sqrt{BC}$
 β_o : classical nondimensional buckling load $\equiv 4.0126$

상첨자

k : 절점
 n : 변형단계
 t : transpose

' : s에 대한 도함수(s-derivatives)

— : 지정된 양을 나타냄(prescribed)

하첨자

i : 좌표계에서의 세 방향을 의미, $I = 1, 2, 3$

중복된 첨자 : summation rule 적용

1. 서론

건축이나 교량 등에 이용되는 고전적인 보 구조물은 응용 특성상 변형이 매우 작게 설계되므로 선형해석으로 충분하였다. 그러나 사람의 활동영역이 해양과 우주로 넓어지고 이에 따라 가늘고 긴 구조물들이 응용되고 있다. 안테나, 전파망원경, 태양집광판 등으로 이용되는 공간 구조물과 해상도시, 석유시추선 등에 사용되는 해양구조물이 그 예들이다. 이들은 그 특성상 무게는 작고 유연성은 커 대변위가 고려된 설계가 필요하다. 그리고 보구조물의 안전성을 검토하기 위한 좌굴후 해석을 할 경우 대변위를 수반하므로 이를 고려한 해석이 필요하다. 비선형 현상의 복잡성으로 인하여 간단한 경우를 제외하고는 해석해가 없어 많은 경우 수치적 방법으로 문제를 해결할 수 밖에 없다.

대변위에 따른 운동학적 비선형성에 대한 본격적 연구는 Yang¹⁾이 그 효시로 좌표변환과 초기응력강성을 포함한 증분해법을 이용하였고 이후 대변형 보에 대한 많은 연구가 수행되어 여러가지 수치해석 방법이 제시되었고²⁾⁻¹⁰⁾ Simo등^{3,4)}은 완전한 삼차원 보이론으로 대변형에 대한 비선형 수식화를 하여 비대칭접선강성(nonsymmetric tangent stiffness)를 얻었으나 수렴단계(convergence step)에서는 접선강성이 대칭이 됨을 보였다. Cardona⁷⁾등은 Eulerian, total Lagrangian, updated Lagrangian의 관점에서 회전을 처리하여 Eulerian일 때는 보존하중(conservative load)일 경우에도 비대칭접선강성이 됨을 보였고 이는 Simo등⁴⁾의 결과와 일치하고 나머지 total Lagrangian, updated Lagrangian일 경우에는 대칭강성을 얻을 수 있고 특히 updated Lagrangian일 경우에는 임의의 큰 회전도 처리할

수 있음을 보였으며 또 3가지 방법의 장단점을 보였다. Argyris등¹⁰⁾은 전체 직교좌표계(global cartesian coordinate)에서 고정된 축에 대한 회전 자유도를 이용하여 비대칭접선강성을 유도하였고 여기서 Iura등⁶⁾은 회전변수로서 유한회전텐서(finite rotation tensor)의 임의의 3개 독립요소를 사용하여 항상 대칭이 되는 접선강성을 얻었다.

본 연구에서 사용된 수식화는 이미 발표된 연구¹¹⁾의 수식화 과정을 대부분 이용하여 횡좌굴 현상에 적용시켰다. 대변위 현상을 설명하기 위하여 고정된 공간좌표계(fixed spatial coordinate)에서 요소의 변형형상을 기술하는 total Lagrangian 수식표현을 사용한다. 비선형 변형률 - 변위관계를 증분식으로 고치고 비선형 증분 응력 - 변형률 관계를 선형화하고 가상일의 원리(principle of virtual work)를 적용하여 기하학적인 비선형을 고려하는 증분형 비선형 평형방정식(incremental nonlinear equilibrium equation)을 유도한다. 보요소는 절점의 변위와 회전을 각각 독립변수로 하였고 이에 따른 전단잠김(shear locking)을 방지하기 위하여 보중심선을 따라서 제한적분(reduced integration)을 하였다. 이때 형상함수는 보다 정확성을 기하기 위하여 2차 형상함수(quadratic shape function)을 사용하였다. 재료는 등방성 탄성재료로 가정하였으며 단면의 형상과 크기는 변형중에 변하지 않는다. 내부응력성분은 단면내에서 도심방향 인장과 전단 두 성분만 있다.

유한회전이 벡터가 아니기 때문에 삼차원 해석에서는 이에 대한 처리가 중요하다. 본 연구에서 회전에 대한 처리는 다음과 같다. 보단면을 이루는 직교하는 두축과 이에 수직인 축으로 단면좌표계(fiber coordinate)를 정의한다. 증분 유한요소해석(Incremental finite element analysis)에서 구한 회전자유도는 미소회전(infinitesimal rotation)으로 이는 벡터라고 볼 수 있고 이를 축벡터(axial vector)로 하는 스큐대칭텐서(skew-symmetric tensor)의 지수함수는 유한회전을 기술하는 직교텐서(orthonormal tensor)가 된다. 이것으로 단면좌표계를 회전시키면 단면의 궤적을 추적할 수 있다. 또 다른 좌표계로 변형전 보 단면을 이루는 고정 기준좌표계(fixed reference coordinate)를 설정하

여 보의 변형전 단면방향을 나타내고 단면좌표계의 기준이 된다. 유한회전은 더하거나 곱할 수 없으므로 보간할 수 없다. 따라서 유한회전을 벡터로 바꾸어서 보간할 수 밖에 없는데 본 연구논문에서는 Quaternion parameters를 이용하였다. 좌표변환(coordinate transformation)을 위하여 Euler parameter¹²⁾을 이용하였고, 또 다른 방법으로 가상(dummy)절점을 이용하여 공간좌표계에서 변형 전 보의 형상을 구하여 좌표변환을 하였다.

비선형 경계조건문제를 풀기 위한 방법으로 뉴우튼해법(Newton method)과 호장법(Arc-length method)^{13,14)}을 병용하였으며 하중증분과 원호의 길이는 자동조절하는 알고리즘을 채택하여 효율성을 높였다. 반복계산(iteration) 중 수렴 여부는 변위증분과 에너지변화 크기와 이들의 첫번째 계산치를 비교하여 결정한다.

본 연구에서는 세장비가 큰 보구조물의 횡좌굴 현상을 해석하기 위하여 비선형 탄성 유한요소수식화를 total Lagrangian 관점에서 이용하였으며 뉴우튼해법과 호장법을 병용하여 사용하였고 해석을 용이하게 하기 위하여 하중조절(load control)과 변위조절(displacement control)을 동시에 사용할 수 있게 하였다. 예제로 가느다란 얇은 보, 직각 외팔보 구조물(cantilever right-angle frame), 직각 힌지 구조물(hinged right-angle frame)의 횡좌굴 해석을 행하여 기존의 결과들과 비교하였고 극한하중을 찾는 방법을 보단면의 중형비와 관련하여 언급하였다.

2. 유한요소의 수식화 및 수치해법

2.1 보의 형상과 변형의 기술(Configuration and Kinematic Description of Beam)

보요소의 변형에 따른 거동을 기술하기 위한 기본가정은 다음과 같다. 변형에서 보요소내의 변형률은 아주 작지만, 전체적인 변위와 회전에 대한 제한은 없다고 가정한다. 단면의 형상과 크기는 변하지 않으며 전단응력으로 인하여 보 중심축에 수직이 아닐 때도 있다. 단면의 모양이 변하지 않으므로 보 내부의 응력상태는 단면내 두 성분의 전단

응력과 길이방향 인장응력만으로 단순화된다.

본 연구에서 사용한 좌표계는 Fig. 1과 같다. $s \in [0, L]$ 은 변형 전 보(beam)의 도심축에 따른 곡선좌표계(curvilinear coordinate)을 나타낸다. 공간좌표계(spatial coordinate)는 보의 형상과 변형을 기술하기 위하여 고정시킨 좌표계이다. 변형중에 단면의 방향을 나타내기 위하여 단면좌표계를 사용하는데 단면좌표계는 변형중에 하나의 좌표축이 단면에 수직하도록 잡은 좌표계이다. 변형전 단면의 방향을 나타내기 위하여 기준좌표계를 사용하는데 변형전 단면좌표계와 일치한다. 절점의 단면벡터(단면좌표계 단위벡터)와 공간좌표계에서의 절점위치로 보의 형상은 결정된다.

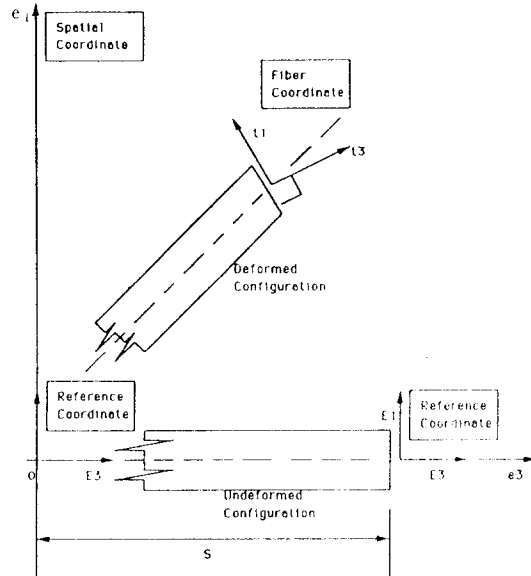


Fig. 1 Undeformed and deformed configuration. Defined coordinate system

단면벡터를 변형단계 n 의 형상에서 $n+1$ 로 개정해야 되는데 회전이 큰 경우 단면벡터 개정은 유한회전으로 다루어야 한다^{9,15,16)}. 유한회전은 직교텐서로 기술되고 이는 세가지 독립성분을 갖는다. 미소회전이 되면 이는 스쿠대칭텐서가 되고 이의 축벡터를 벡터양이라 볼 수 있다. 따라서 k 절점의 회전자유도 θ^k 가 미소양이면 다음과 같이

나타낼 수 있다.

$$\theta^k = \theta_1^k e_1 + \theta_2^k e_2 + \theta_3^k e_3 \quad (2.1)$$

위의 회전벡터를 축벡터로 하는 스큐대칭텐서를 Θ^k 라고 하면 이에 대한 회전의 정확한 표현은 $\exp(\Theta^k)$ 이므로 이를 변형단계 n 의 단면벡터 ${}^n t_i^k$ 에 작용하면 다음과 같다

$${}^{n+1} t_i^k = \exp(\Theta^k) {}^n t_i^k, \quad i=1, 3 \quad (2.2)$$

식(2.2)는 단면벡터를 정확하게 회전시켜 개정한다. 텐서의 지수함수는 부록[A]와 같이 계산하여 직교텐서를 얻는다.

단면좌표계는 각 절점에서 정의된다. 최초로 변형되지 않은 기준좌표계의 단위벡터를 각 하중단계마다 절점의 회전자유도로 직교변환하여 개정되어지는 좌표계이다. 변형단계 n 의 형상에서 k 절점 단면벡터를 변형되지 않은 기준벡터와 관련 지우면 다음과 같다

$${}^n t_i^k = \exp({}^{n-1}\Theta^k) \exp({}^{n-2}\Theta^k) \cdots \exp({}^0\Theta^k) E_i^k \quad (2.3)$$

여기서 회전(rotation)을 다음과 같이 정의한다.

$${}^n \Lambda^k = \exp({}^{n-1}\Theta^k) \exp({}^{n-2}\Theta^k) \cdots \exp({}^0\Theta^k) \quad (2.4)$$

2.2 힘과 모우멘트(Stress Resultants and Couples)

비대칭 1차 Piola-Kirchhoff 응력텐서, $P \equiv T_i \otimes E_i$ 에 의해 현재 형상에서 단면 $\Gamma \subset R^2$ 에 걸친 공간좌표상의 힘(stress resultant) $n = n_i e_i$ 와 모우멘트(stress couple) $m = m_i e_i$ 은 아래와 같이 표현된다.

$$n = \int_{\Gamma} T_3 d\Gamma, \quad m = \int_{\Gamma} [x - \Phi_0(s,t)] \times T_3 d\Gamma \quad (2.5)$$

단, x : 공간 좌표상의 임의점의 위치

Φ_0 : 공간 좌표상의 도심점의 위치

기준좌표계에서의 힘 $N = N_i E_i$ 와 모우멘트 $M = M_i E_i$ 는 식(2.4)의 회전을 이용하여 구할 수 있다.

$$n(s,t) = \Lambda(s,t)N(s) \quad (2.6)$$

$$m(s,t) = \Lambda(s,t)M(s)$$

공간좌표계와 기준좌표계에서의 변형률과 곡률은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \text{공간좌표계 : 변형률 } \gamma &= \frac{\partial \Phi_0(s,t)}{\partial s} - t_3 \\ \text{곡률 } \omega & \end{aligned} \quad (2.7a)$$

$$\begin{aligned} \text{기준좌표계 : 변형률 } \gamma &= \Lambda^t \frac{\partial \Phi_0(s,t)}{\partial s} - E_3 \\ \text{곡률 } \kappa &= \Lambda^t \omega \end{aligned} \quad (2.7b)$$

윗식에서 구한 변형률과 곡률로부터 기준좌표계의 힘과 모우멘트를 다음과 같이 구한다.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

여기서 C 는 기준좌표계의 탄성텐서(elasticity tensor)로 아래와 같이 나타내진다.

$$C = \text{diag}[GA_1, GA_2, EA, EI_1, EI_2, GJ] \quad (2.9)$$

A_1 과 A_2 는 $A_1 = A_2 = kA$ 로 전단계수¹⁷⁾ (shear coefficient)에 의해 관계 지워지고 직사각형 단면의 경우는 아래와 같다.

$$k = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad (2.10)$$

2.3 평형방정식의 약세형 수식화(Weak Form of Balance Equations : Tangent Operator)

공간좌표상에서 국부평형법칙(local balance law)은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial s} n + \bar{n} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s} m + \frac{\partial \Phi_o}{\partial s} \times n + \bar{m} = 0 \quad (2.11)$$

윗식에 임의의 가용변분(admissible variation) $\eta(s) = (\eta_o(s), \theta(s))$ 을 곱하여 형상의 약제형 평형방정식(변분식)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(\Phi, \eta) = \int_{[o, \eta]} \left[\left(\frac{dn}{ds} + \bar{n} \right) \cdot \eta_o + \left(\frac{dm}{ds} + \frac{d\Phi_o}{ds} \times n + \bar{m} \right) \cdot \theta \right] ds = 0 \quad (2.12)$$

윗식에서 $\Phi = (\Phi_o, \Lambda)$ 이고 변분 $\eta(s)$ 는 경계(boundary)에서 없어지기 때문에 윗식을 부분적분하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(\Phi, \eta) = \int_{[o, \eta]} \left\{ n \cdot \left[\frac{d\eta_o}{ds} - \theta \times \frac{d\Phi_o}{ds} \right] + m \cdot \frac{d\theta}{ds} \right\} ds - \int_{[o, \eta]} (\bar{n} \cdot \eta_o + \bar{m} \cdot \theta) ds \quad (2.13)$$

윗식을 기준좌표계에서 나타내면 아래식과 같다.

$$G(\Phi, \eta) = \int_{[o, \eta]} \left\{ N \cdot \Lambda \left[\frac{d\eta_o}{ds} - \theta \times \frac{d\Phi_o}{ds} \right] + M \cdot \Lambda \left[\frac{d\theta}{ds} \right] \right\} ds - \int_{[o, \eta]} (\bar{n} \cdot \eta_o + \bar{m} \cdot \theta) ds \quad (2.14)$$

임의의 중간 평형상태 $\Phi = \widehat{\Phi}$ 에서의 $G(\Phi, \eta)$ 의 선형부분은 다음과 같다.

$$L[G(\widehat{\Phi}, \eta)]_{\Phi = \widehat{\Phi}} = G(\widehat{\Phi}, \eta) + DG(\widehat{\Phi}, \eta) \cdot \Delta \Phi \quad (2.15)$$

윗식에서 $G(\widehat{\Phi}, \eta)$ 항은 $\Phi = \widehat{\Phi}$ 에서 비평형힘(unbalanced force)을 나타내고 $DG(\widehat{\Phi}, \eta)$ 는 접선강성을 나타낸다. 식(2.14)은 부록[B]에 있는 R, r, Ξ 과 같은 표기법(notiation)을 도입하고 \bar{r} 가 지정(prescribe)된 r 을 나타낸다면 아래식과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(\Phi, \eta) = \int_{[o, \eta]} [(\Xi^t \eta) \cdot (\Lambda R) - \eta \cdot \bar{r}] ds \quad (2.16)$$

식(2.16)을 선형화하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$DG(\widehat{\Phi}, \eta) \cdot \Delta \Phi = D_1 G(\widehat{\Phi}, \eta) \cdot \Delta \Phi + D_2 G(\widehat{\Phi}, \eta) \cdot \Delta \Phi \quad (2.17)$$

윗식의 첫번째 항 $D_1 G(\widehat{\Phi}, \eta)$ 은 내력(internal force) R 의 선형화에 의한 접선강성행렬의 재료부분(material part)에 해당하고, 두번째 항 $D_2 G(\widehat{\Phi}, \eta)$ 은 연산기호(operator) $[EM]$ 의 선형화로 부터 나온 접선강성의 기하학적 부분(geometric part)에 해당한다.

$$D_1 G(\widehat{\Phi}, \eta) \cdot \Delta \Phi = \int_{[o, \eta]} (\Xi^t \eta) \cdot (\widehat{C} \Xi^t \Delta \Phi) ds \quad (2.18)$$

윗식에서 \widehat{C} 는 $\widehat{C} = \widehat{N} \widehat{C} \widehat{N}^t$ 로 공간좌표계에서의 탄성텐서(elasticity tensor)의 형태이다.

$$D_2 G(\widehat{\Phi}, \eta) \cdot \Delta \Phi = \int_{[o, \eta]} (\Psi^t \eta) \cdot (\widehat{B} \Psi^t \Delta \Phi) ds \quad (2.19)$$

윗식에서 Ψ 와 B 는 부록[C]에 나와있다.

2.4 유한요소 수식화 (Finite Element Formulation)

변위와 회전각은 아래와 같이 보간(interpolation)된다.

$$u_\alpha^h(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) u_i^h, \quad \theta_e^h(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \theta_i^h \quad (2.20)$$

윗식에서 형상함수는 부록[D]에 언급되어 있고 아래식과 같이 나타낼 수 있다.

$$G^h(\widehat{\Phi}, \eta^h) = \sum_{e=1}^E G_e^h(\widehat{\Phi}, \eta^h) \quad (2.21)$$

단, E 는 총 요소수이다.

절점 I 에 관계되는 요소 I_e^h 에서 비평형절점하중 p_{et}^h 와 G_e^h 은 아래와 같다.

$$p_{et}^h(\widehat{\Phi}) = \int_{I_e^h} \left(\widehat{\Xi}_i \left(\begin{array}{c} n_e^h \\ m_e^h \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} N_i I & 0 \\ 0 & N_i I \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} \bar{n} \\ \bar{m} \end{array} \right) \right) ds \quad (2.22)$$

$$G_e^h(\Phi, \eta^h) = \eta_e^h \cdot p_e^h(\Phi) = \sum_{i=1}^3 \eta_i^h \cdot p_{ei}^h(\Phi) \quad (2.23)$$

식(2.23)의 선형부분은 아래식과 같이 나타낼 수 있다.

$$L[G_e^h(\Phi, \eta^h)] = \eta^h \cdot [(S_e^h(\Phi) + T_e^h(\Phi)) \cdot \Delta \Phi_e^h + f_e^h(\Phi)] \quad (2.24)$$

여기서 S_e^h 와 T_e^h 는 각각 요소재료 강성행렬(element material stiffness matrix)과 요소기하학적 강성행렬(element geometric stiffness matrix)를 나타낸다. S_{eij}^h 와 T_{eij}^h 가 S_e^h 와 T_e^h 에서 절점 I 와 J 의 중첩(coupling)된 하부행렬(submatrice)이고 부록[E]에 표현되어 있다. 따라서 요소접선 강성행렬은 아래식과 같다.

$$K^e = S_e^h + T_e^h \quad (2.25)$$

전체 행렬식은 요소행렬로부터 다음과 같이 조합된다

$$K \Delta u = \Delta P$$

단, $K = \text{Assem}(e=1, E)K^e$
 $\Delta P = \text{Assem}(e=1, E)\Delta p_e$ (2.26)

Δu 는 전체계의 일반화된 변위증분벡터이고 K 는 접선강성이다. ΔP 는 비평형하중이고 Assem은 운동학적 경계조건을 고려하여 요소행렬의 적절한 위치에 조합시키는 것을 의미한다. K^e 와 Δp_e 은 e 요소의 접선강성과 비평형하중이다. 식(2.26)은 경계조건 문제로 증분과 반복계산의 조합으로 풀다.

2.5 비선형 유한요소해석을 위한 수치해법(Numerical Method for Nonlinear Finite Element Analysis)

좌굴이 있는 구조물의 비선형 유한요소해석의 수치해석에서는 하중이 변위의 단조함수로 표현되지 않으므로 변위를 독립변수로 하거나 하중을 독립변수로 하는 다가함수(multiple valued function)로 표현되게 된다. 이러한 경우 증분시킬 변수 결

정 및 증분량 결정에 어려움이 많다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 여러가지의 알고리즘이 제시되었으나 Crisfield의 호장법¹⁴⁾이 수치해석의 안정성과 효율성의 면에서 가장 좋은 것으로 평가되고 있다. 이 방법은 Riks¹⁸⁾가 제시한 수치해석방법을 유한요소해석에 접합하도록 수정한 것으로 각 증분단계마다 변위증분벡터의 크기를 일정하게 제한시키면서 증분해를 구하는 방법이다. 이 방법의 개요는 다음과 같다.

구조물에 작용하는 하중이 비례하중이라면 하중인자 λ 를 도입하여 i 번째 축차(iteration)까지의 하중인자 증분량을 $\lambda^{(i)}$, i 번째 축차에서의 축차에 의한 증분량을 $\Delta \lambda^{(i)}$ 로 표현하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$${}^t K^{(i)} \Delta u^{(i)} - \Delta \lambda^{(i)} p_o = {}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} p_o - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \quad (2.27)$$

윗식에서 첨자 $t + \Delta t$ 가 하중스텝을 나타내고 p_o 는 비례하중을 표시하는 기준하중벡터이다. 한 축차에서의 변위증분량 $\Delta u^{(i)}$ 를 다음과 같이 두 성분으로 나눈다.

$$\Delta u^{(i)} = \Delta u^I \Delta \lambda^{(i)} + \Delta u^{II(i)}$$

$$\Delta u^I = {}^t K^{-1} p_o \quad (2.28)$$

$$\Delta u^{II(i)} = {}^t K^{-1} [{}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} p_o - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)}]$$

각각의 양에 대한 도식적인 표시는 Fig. 2와 같이 표시된다. 식(2.27), (2.28)은 유한요소모델의 총 자유도수를 N 이라 하면 $(N+1)$ 개의 미지수를 갖는 N 개의 방정식이 되는데 여기서 호장에 관한 다음과 같은 방정식을 추가시키면 증분량을 구할수 있다¹³⁾.

$$k \lambda^{(i)^2} + u^{(i)^T} u^{(i)} = s^2 \quad (2.29)$$

여기서 s 는 호장이며 k 는 호장을 채는데 있어서의 하중인자에 대한 비례계수(scaling parameter)로 본 연구에서는 $k=0$ 로 하였다. 식(2.27)과 (2.28)을 (2.29)에 대입하면 다음과 같은 방정식이 얻어진다.

때 하중방향으로 어느 정도 처진 후에 횡좌굴이 일어나 횡방향 곡률이 증가하게 된다. Peters등¹⁹⁾의 연구를 바탕으로 아래와 같은 2가지 결과(식(3.1)과 (3.2))를 얻을 수 있다.

s : arc length of deformed beam shear center axis
 ζ : slope in plane of greatest flexural rigidity
 N₁ : shear force in plane of least flexural rigidity
 N₂ : shear force in plane of greatest flexural rigidity
 λ : curvature in plane of least flexural rigidity
 κ : curvature in plane of greatest flexural rigidity

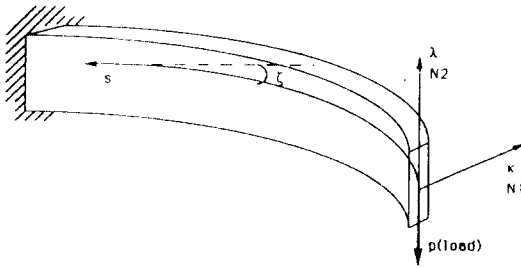


Fig. 3 Lateral buckling shape of uniform slender cantilever beam

$$x_0 = -\frac{d\zeta}{ds} \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} + \frac{P}{A} \cos \zeta = 0$$

여기서, 경계조건은 $s = 0$ 에서 $\frac{d\zeta}{ds} = 0$, $s =$

l 에서 $\zeta = 0$ 이고,

ζ 는 최대 굴곡면의 경사(slope in plane of greatest flexural rigidity),

A 는 최대 굴곡면의 굽힘강성(bending stiffness in plane of greatest flexural rigidity),

l 은 보의 길이(length of beam)이다.

그리고, 두번째 결과는 아래와 같다.

$$\frac{1}{P} \frac{dN_1}{ds} = \tau \cos \zeta - \lambda \sin \zeta$$

$$B \frac{d\lambda}{ds} + (A - C)x_0\tau + N_1 = 0 \quad (3.2)$$

$$C \frac{d\tau}{ds} - (A - B)x_0\lambda = 0$$

여기서, B 는 최소 굴곡면의 굽힘강성(bending stiffness in plane of least

flexural rigidity), C 은 비틀림강성(torsion stiffness constant rigidity),

τ 은 비틀림의 탄성률(elastic rate of twist) 이다.

식(3.2)에서 N_1 을 소거하고 $c^2 = \frac{C}{A}$, $b^2 = \frac{B}{A}$

라 두면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\lambda}{ds^2} &= \frac{c^2 - 2}{b^2} \tau \frac{P}{A} \cos \zeta + \frac{c^2 - 1}{b^2} k_0 \tau + \frac{1}{b^2} \frac{P}{A} \lambda \sin \zeta \\ \frac{d\tau}{ds} &= \frac{1 - b^2}{c^2} k_0 \lambda \end{aligned} \quad (3.3)$$

식(3.1)의 x_0 대신 $-\frac{d\zeta}{ds}$ 을 대입하고 정리하면 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\lambda}{ds^2} &= \frac{c^2 - 2}{b^2} \tau \frac{P}{A} \cos \zeta + \left(1 - \frac{1}{c^2}\right) \left(\frac{1}{b^2} - 1\right) \lambda \zeta'^2 + \frac{1}{b^2} \frac{P}{A} \lambda \sin \zeta \\ \frac{d\tau}{ds} &= \frac{b^2 - 1}{c^2} \zeta' \lambda \end{aligned} \quad (3.4)$$

여기서, 경계조건은 $\lambda(0) = 0$,
 $\lambda(l) = 0$,
 $\tau(0) = 0$ 이다.

또 경계조건으로 아래와 같이 가정할 수 있다.

$$\lambda'(0) = \frac{1}{l} \quad (3.5)$$

식(3.5)의 경계조건은 λ의 크기가 고유치 문제로 정해지지 않고, 또 식(3.4)가 λ와 τ에 대하여 선형적이기 때문에 해에 영향을 미치지 않는다. 위의 식들과 경계조건을 슈팅으로 풀었는데 푸는 방안은 다음과 같다. 먼저 식(3.1)과 경계조건을 슈팅 방법(shooting method)을 이용하여 풀고 이때 풀려진 ζ, ζ' 값을 식(3.4)에 대입한다. 다음 적절한 b값을 가정하는데 이때 비교하고자 하는 유한요소 해석결과로 b값을 가정하면 계산시간을 줄일 수 있다. 경계조건 λ(0) = τ(0) = 0 와 식(3.5)로 식(3.4)를 푸는데 이때 얻어진 λ(l)값과 λ(l)=0의 경계조건으로 부터 역보간법(inverse interpolation)을 이용하여 보다 정확하게 수렴된 b값을 얻을 수

있다. 즉, $\lambda_1(l) - \lambda_0(l) = \frac{\partial \lambda}{\partial b}(b_1 - b_0)$ 에서 $\lambda_1(l) = 0$ 이므로 개선된 b값 b_1 은 아래와 같다.

$$b_1 = b_0 - \frac{\lambda_0(l)}{\frac{\partial \lambda}{\partial b}} \quad (3.6)$$

같은 과정을 되풀이 하게 되면 어느 정도 정확한 b값을 얻을 수 있다. Fig. 4에서 본 연구의 유한요소해석으로 얻은 결과와 슈팅으로 풀은 결과를 비교하였다. 비교적 정확히 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 각 경우에 이차 보요소 열개를 사용하였다.

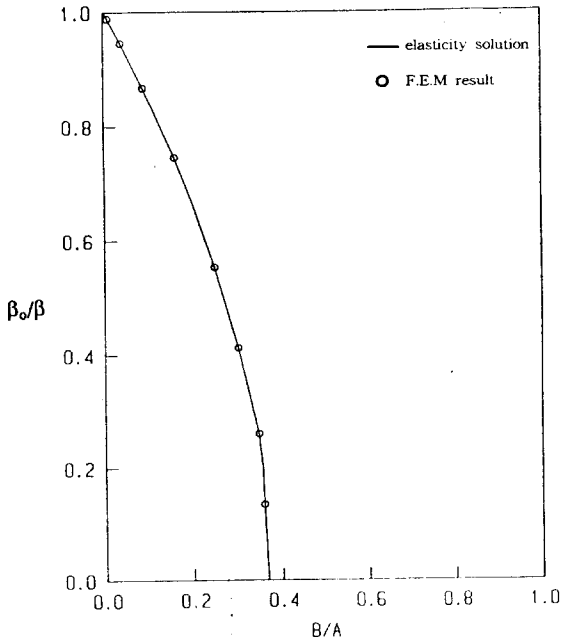


Fig. 4 Lateral buckling of uniform slender cantilever beam

또 좌굴하중을 정확히 수치적으로 구하기 위하여 점선강성행렬식(determinant)이 영(zero)이 될 때 하중을 좌굴 하중이라 볼 수 있다. 그러나 본 연구의 경우 처짐이 작은 상태에서 횡좌굴이 일어날 때는 정확히 $\text{Det}[K] = 0$ 일때 하중이 횡좌굴 하중을 나타내었으나 처짐이 커진 상태에서 횡좌굴이

일어날때는 정확히 일치하지 않고 어느 정도 차이를 보였다. 즉 이 사실은 처짐이 커진 상태에서 횡좌굴이 일어날 때(보단면의 종횡비가 클때)는 현재의 점선강성행렬이 변위에 관한 내력의 일차 도함수와 정확히 일치하지 않음을 시사해 주고 있는데 여러 가지 보단면의 종횡비에 대해 해석을 수행하여 관찰한 바에 의하면 보단면의 종횡비가 $\frac{1}{10}$ 보다 커지면 오차가 점점 커짐을 발견할 수 있었다.

3.2 직각 외팔보 구조물의 횡좌굴 해석

Fig. 5와 같은 형상에서 탄성계수(E) = 71240, 포와송비(ν) = 0.31의 재료를 해석하였다. 단면의 종횡비(aspect ratio)는 다음과 같다.

$$\frac{\text{thickness}}{\text{height}} = \frac{1}{50}$$

Fig. 5에서 보여지는 것 처럼 구조물의 선단 안쪽에서 바깥방향으로 고정된 방향의 하중을 작용시켰다. 구조물의 선단 옆면에 수직방향으로 횡좌굴이 일어날 때까지 교란하중(perturbation load)을 조금 가하여 횡좌굴 모드로 유도하였다. 해석방법

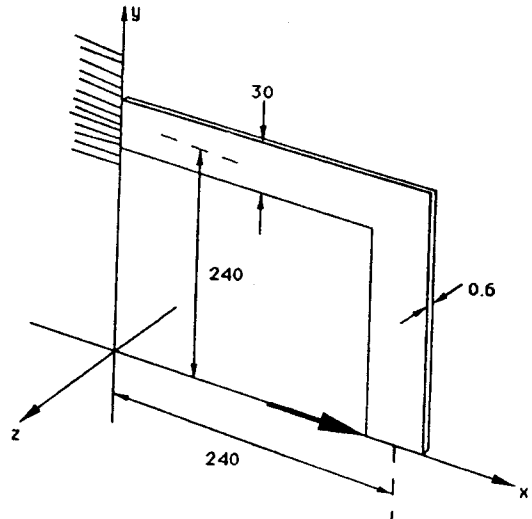


Fig. 5 Lateral buckling of cantilever right-angle frame under end load geometric characteristics

은 변위조절(displacement control)를 사용하였고 이차 보요소 20개를 사용하였다. 1.088 정도의 극한하중을 얻을 수 있었고 Fig. 6에서 유한요소해석 결과를 Simo⁴⁾와 Argyris²⁰⁾의 결과와 비교하였는데 작은 변위 범위에서는 기존의 결과들과 잘 일치하였으나 큰 변위 범위에서는 기존의 결과들 보다 약간 작은 하중값을 얻었다.

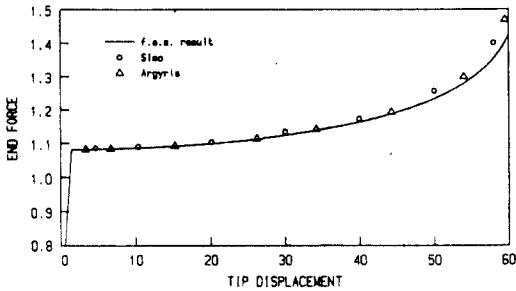


Fig. 6 Lateral buckling of cantilever right-angle frame under end load

3.3 직각 힌지 구조물의 횡좌굴 해석

Fig. 7에서와 같이 양단에 모우멘트를 가할때 일어나는 횡좌굴 현상을 해석하였다. 형상이 대칭이므로 구조물의 절반만 모델링하였다. 힌지끝 점이 x축을 따라서 움직이고 z축을 중심으로 회전한다. 구조물의 정점은 y-z평면에서만 움직이도록 구속되어진다. 이 문제는 아주 큰 3차원회전을 포함하

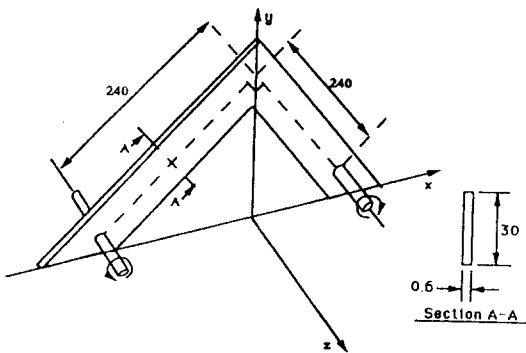


Fig. 7 Lateral buckling of hinged right-angle frame subject to fixed end moment geometric characteristics

고 3차원 보모델의 수행능력을 엄격히 시험해 볼 수 있다. 힌지끝 점의 회전이 0° 에서 360° 까지 변할때 지지점을 연결하는 축에 대하여 구조물이 회전하여 원래 처음 상태로 되돌아 온다. 변형중에 구조물의 다리가 아주 큰 양의 비틀림을 받는다. 이 문제는 Argyris등²⁰⁾에 의해서 준접선 회전(semi-tangential rotation)의 개념에 기초를 둔 수식으로 처음으로 해석되어 졌다. 본 해석에서는 12개의 요소를 사용하였고 정확한 극한모우멘트는 626정도이나 본 연구에서는 617.95의 극한모우멘트를 얻었다. 이 차이는 처음에 좌굴모드로 유도하기 위한 교란하중 때문인 것으로 짐작된다. Fig. 8 과 Fig. 9 에서 본 연구의 유한요소해석 결과를 Simo⁴⁾와 비교하였는데 정확히 잘 일치하였다.

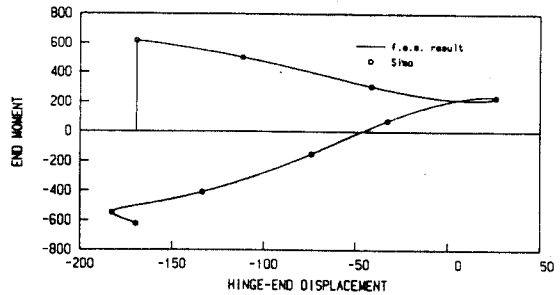


Fig. 8 Lateral buckling of hinged right-angle frame subject to fixed end moment (end moment - hinge end displacement)

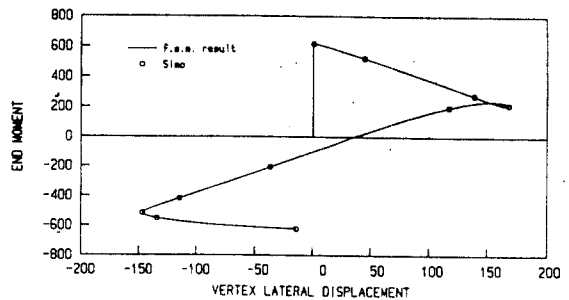


Fig. 9 Lateral buckling of hinged right-angle frame subject to fixed end moment (end moment - vertex lateral displacement)

4. 결론

기존의 수식화¹¹⁾을 이용하여 얇은 보 구조물의

횡좌굴을 total Lagrangian방법을 이용하여 해석하였다. 좌굴해석에 안정적이고 효율적인 호장법(Arc-length method)을 횡좌굴 해석에도 적용하였고 하중조절(load control)과 변위조절(displacement control)를 동시에 사용할 수 있게 하였다.

한 예제에서는 기존의 유한탄성론 지배방정식들을 슈팅(shooting) 방법으로 풀은 결과와 비교하여 정확히 일치하는 결과를 얻을 수 있었고, 나머지 예제들은 기존의 결과들과 비교하여 비슷하게 일치하는 경향을 보였다.

횡좌굴 현상에서 극한하중을 정확히 찾기 위하여 접선강성의 행렬식(determinant)을 각 수렴단계마다 구하여 영(zero)에 아주 가까워졌을 때 이때의 하중을 극한하중으로 취하였다. 그러나 보단면의 종횡비(= $\frac{\text{thickness}}{\text{height}}$)가 $\frac{1}{10}$ 이하일 때는 행렬식이 영이 될 때 정확히 극한하중을 나타내었으나 $\frac{1}{10}$ 보다 커짐에 따라 오차가 커짐을 발견할 수 있었다. 즉 이것은 횡좌굴 현상에서 종횡비가 어느 정도 커짐에 따라 접선강성행렬이 변위에 관한 내력의 일차도함수와 정확히 일치하지 않음을 의미해 주고 있다.

참 고 문 헌

- 1) Yang, T.Y., "Matrix Displacement Solution To Elastica Problems of Beams and Frames", Int. J. Solids Structures, vol. 9, pp. 829-842, 1973
- 2) Bathe, K.J. and Bolourchi, S., "Large Displacement Analysis of Three-D. Beam Structures", Int. J. for Num. Methods in Eng., vol. 14, pp. 961-986, 1979
- 3) Simo, J.C., "A Finite Strain Beam Formulation. The 3-D Dynamic Problem. Part I", Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng., vol. 49, pp. 55-70, 1985
- 4) Simo, J.C. and Vu-Quoc, L., "A Three-Dimensional Finite-Strain Rod Model. Part 2: Computational Aspects", Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng., vol. 58, pp. 79-116, 1986
- 5) Iura, M. and Alturi, S.N., "On a Consistent Theory, and Variational Formulation of Finitely Stretched and Rotated 3-D Space Curved Beams", Computational Mechanics, vol. 4, pp. 73-88, 1989
- 6) Iura, M. and Alturi, S.N., "Dynamic Analysis of Finitely Stretched and Rotated Three-Dimensional Space-Curved Beams", Computers & Structures, vol. 29, No. 5, pp. 875-889, 1988
- 7) Cardona, A. and Geradin, M., "A Beam Finite Element Non-linear Theory with Finite Rotations", Int. J. for Num. Methods in Eng., vol. 26, pp. 2403-2438, 1988
- 8) Geradin, M. and Cardona, A., *Kinematics and Dynamics of Rigid and Flexible Mechanisms Using Finite Elements and Quaternion Algebra*, Computational Mechanics, (in press)
- 9) Argyris, J., "An Excursion into Large Rotations", Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng., vol. 32, pp. 85-155, 1982
- 10) Argyris, J.H., Dunne, P.C. and Scharpf, D.W., "On Large Displacement-Small Strain Analysis of Structures with Rotational Degrees of Freedom", Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng., vol. 14, pp. 401-451, 1978
- 11) 정동원, 임세영, "유연한 보구조물의 탄성유한 요소해석", 대한기계학회 논문집(A) 제20권 제11호, pp. 3441-3453, 1996
- 12) Parviz E. Nikraves, "Computer-aided Analysis of Mechanical Systems"
- 13) Forde, B.W.R. and Stiemer, S.F., "Improved Arc Length Orthogonality Method for Nonlinear Finite Element Analysis", Computers and Structures, vol. 27, No. 5, 625-663, 1987
- 14) Crisfield, M.A., "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles Snap-Through", Computers and Structures, vol. 13,

- pp. 55-62, 1981
- 15) Pietraszkiewicz, W. and Badur, J., "Finite Rotations in the Descriptions of Continuum Deformations", Int. J. Eng. Sci., vol. 21, No. 9, pp. 1097-1115, 1983
 - 16) Beatty, M.F., "Vector Analysis of Finite Rigid Rotations", J.A.M., vol. 44, pp. 501-502, 1977
 - 17) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1963
 - 18) Riks, E., "An Incremental Approach to the Solution of Spanning and Buckling Problems", Int. J. Solid and Struct., vol. 15, pp. 529-551, 1979
 - 19) Hodges, D. H., and Peters, D. A., "On The Lateral Buckling of Uniform Slender Cantilever Beams", Int. J. Solids Structures, vol. 11, pp. 1269-1280, 1975
 - 20) Argyris, J. H., Balmer, H., Doltsinis, J. St., Dunne, P. C., Haase, M., Kleiber, M., Malejannakis, G. A., Mlejnek, J. P., Muller, M., and Scharpf, D. W., "Finite Element Method-The Natural Approach", Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg, vol. 17-18, pp. 1-106, 1979

부록 A.

$$e = \theta/\|\theta\|, \quad \bar{\theta} = \tan \frac{1}{2} \|\theta\| e \quad (\text{부1})$$

윗식을 이용하면

$$\exp[\Theta] = I + \frac{2}{1+\|\bar{\theta}\|^2} (\bar{\theta} + \bar{\theta}^{-2}) \quad (\text{부2})$$

부록 B.

$$R = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}, \quad r = \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \Pi R \quad (\text{부3})$$

$$\text{여기서 } \Pi = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}$$

$$\Xi^t = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} \mathbf{1} & [\Phi'_o \times] \\ 0 & \frac{d}{ds} \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (\text{부4})$$

여기서,

$$[\Phi'_o \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\Phi'_{o3} & \Phi'_{o2} \\ \Phi'_{o3} & 0 & -\Phi'_{o1} \\ -\Phi'_{o2} & \Phi'_{o1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{ds} \mathbf{1} = \text{diag} \left[\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds}, \frac{d}{ds} \right]$$

부록 C.

$$\Psi = \begin{bmatrix} \left(\frac{d}{ds}\right)\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(\frac{d}{ds}\right)\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (부5)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & [-n \times] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [-m \times] \\ [n \times] & \mathbf{0} & [n \otimes \Phi'_0 - (n \cdot \Phi'_0)\mathbf{1}] \end{bmatrix} \quad (부6)$$

여기서 \mathbf{B} 는 소위 말하는 기하학적강성행렬이다.

부록 D.

$$\begin{aligned} N_1(\zeta) &= \frac{1}{2}(\zeta-1)\zeta \\ N_2(\zeta) &= (1+\zeta)(1-\zeta) \\ N_3(\zeta) &= \frac{1}{2}\zeta(1+\zeta) \end{aligned} \quad (부7)$$

단, $-1 \leq \zeta \leq 1$

부록 E.

$$S_{eIJ}^h = \int_{I_e^h} \hat{\Xi}_I^h c_e^h \hat{\Xi}_J^h ds \quad (\text{부8})$$

여기서,

$$\hat{\Xi}_I^h = \begin{bmatrix} N_I' \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -N_I [\hat{\Phi}_0 \times] & N_I' \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

또, c_e^h 는 spatial tangent elastic moduli로써

$$c_e^h = \Pi^h C \Pi^{h'}$$

$$\begin{aligned} T_{eIJ}^h &= \int_{I_e^h} \Psi_I^h B_e^h \Psi_J^h ds \\ &= \int_{I_e^h} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -[\hat{\mathbf{n}} \times] N_I' N_J \\ [\hat{\mathbf{n}} \times] N_I N_J' & \{-[\hat{\mathbf{m}} \times] N_I' N_J + [\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\Phi}_0' - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\Phi}_0') \mathbf{1}] N_I N_J \} \end{bmatrix} ds \end{aligned} \quad (\text{부9})$$