⊠연구논문

스트레스 한계가 있는 램프시험하에서 신뢰수명분포의 최우추정: 사용조건에서부터 스트레스를 가하는 경우*

전영록
경남대학교 산업공학과

Maximum Likelihood Estimation of Lifetime Distribution under Stress Bounded Ramp Tests: The Case Where Stress Loaded from Use Condition

Young Rok Chun
Dept. of Industrial Engineering, Kyungnam University

Abstract

This paper considers maximum likelihood (ML) estimation of lifetime distribution under stress bounded ramp tests in which the stress is increased linearly from use condition stress to the stress upper bound. The following assumptions are used: exponential lifetime distributin under a constant stress, an inverse power law relationship between stress and mean of exponential lifetime distribution, and a cumulative exposure model for the effect of changing stress. Likelihood equations for the parameters involved in the model and asymptotic distribution of the estimators are obtained, and a numerical example is given.

*이 논문은 1996년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

1. 서론

제품의 신뢰성보증을 위해서는 제품의 수명에 대한 정보가 필요하며, 이를 위해서 수명시험(life test)을 수행한다. 그러나 제품의 신뢰성이 높아짐에 따라 수명시험에 소요되는 시간이 현실적으로 받아들일 수 없을 만큼 매우 길게 되었다. 이런 경우 원하는 시간 이내에 제품의 사용조건에서의 수명시험으로 수명에 대한 정보를 얻는 것은 불가능하거나 많은 시험비용이 소요된다. 이러한 현실적 어려움의 극복을 위해 사용조건보다 더 열악한 조건하에서 시험하는 가속수명시험(accelerated life tests) 기술을 많이 이용한다.

가속수명시험은 제품의 사용조건에서의 스트레스 —예를 들면, 온도, 전압, 압력 또는 이들의 조합 등— 를 더 열악한 수준으로 변화시켜 수명에 대한 자료를 빨리 얻고, 여기서 관측되는 자료로 부터 사용조건에서의 수명을 추론한다. 가속수명시험의 종류에는 시험제품에 스트레스를 가하는 방법에 따라 사용조건보다 높은 스트레스를 일정하게 가하는 일정형시험(constant stress test), 시간에 따라 스트레스를 계단형으로 변화시키는 계단형시험(step stress test), 그리고 시간에 따라 연속적으로 증가시키는 점진형시험(progressive stress test)이 있다. 특히 점진형 스트레스 시험 중에서 스트레스를 시간에 따라 선형적으로 증가시키는 시험을 램프시험(ramp test)라 한다.

가속수명시험에 대한 지금까지의 연구는 주로 일정형 시험에 대한 것이었다. 일정형 시험은 스트레스 수준을 변화시키지 않고 일정하게 유지하므로 스트레스 수준변화에 대한 수명의 영향을 고려할 필요가 없다는 장점이 있다. 그리고 제품의 실제 사용조건도 스트레스 변화가 없다고 보는 것이 일반적이므로 제품의 실제 상황을 잘 나타낸다는 특성이 있다. Nelson(1990)은 가속수명시험 자료의 분석절차와 최적실험설계에 대한 지금까지의 연구들을 일정형시험을 중심으로 쉽게 정리·설명하고 있다. 계단형 시험은 사용조건보다 높은 스트레스 수준에서 미리 정한 시점까지 시험하고 그 때까지 고장나지 않은 제품에 대해서 더 높은 스트레스 수준에서 계속해서 시험하는 것으로써 시험도중에 스트레스 수준이 변화므로 스트레스 수준변화가 제품수명에 미치는 영향에 대한 가정이 필요하다. Nelson(1980)은 스트레스 수준변화에 대한 가정으로서 누적노출모형(cumulative exposure model)을 제안하고, 제품수명이 와이블 분포를 따르는 경우 계단형 시험에 대한 통계적추론 문제를 다루었다. Shaked와 Singpurwalla (1983)는 충격과 마모과정에 근거하여 스트레스 수준변화가 수명에 미치는 모형을 제안하고, Nelson(1980)의 누적노출모형이 그들이 제안한 모형의 특수한 경우임을 보였으며 제안된 모형에 근거하여 계단형 시험 대한 비모수적 추론방법을 제안하였다.

점진형 시험은 일정형 시험에 비해서 스트레스 수준을 결정할 필요가 없고, 스트레스를 계속해서 증가시키게 되므로 고장자료를 짧은 시간에 얻을 수 있다는 장점이 있다. Yin과 Sheng(1987)은 누적노출모형에 근거하여 제품수명이 와이블 혹은 지수분포를 따를 때, 점진적으로 증가시키는 스트레스 시험에서의 제품의 수명분포를 유도하고, 최우추정량을 구하였다. Lin과 Fei(1991)는 비모수적방법으로 사용조건에서의 수명

분포를 추론하는 문제를 다루었으며, Bai와 Chun(1993)은 Lin과 Fei(1991)의 결과를 임의관측중단된 경우와 다수고장원인이 있는 경우로 확장하였다. 그리고 Bai et al.(1996, 1997)는 램프형 시험에서 스트레스 수준을 무한히 올리는 경우에 고장과정(failure mechanism)의 변화가 있을 수 있음을 고려하여 스트레스 수준의 상한이 있는 경우에 대한 수명분포의 최우추정과 최적시험설계를 다루었다.

램프형시험에 대한 지금까지의 연구는 전부 스트레스를 0에서 선형적으로 증가시키는 것이었다. 그러나 스트레스를 0에서 증가시키는 램프형시험은 스트레스가 0이 되는 수준이 어느 정도인지를 파악하는 것이 어려울 뿐만아니라 기술적으로 스트레스 수준을 0으로 만드는데 많은 비용이 수반될 수 있으며, 시험의 결과를 분석하는데 있어서 시험제품이 받은 스트레스의 양을 잘못 계산하여 결과적으로 틀린 해석을 할 여지가 있다. 이러한 램프형시험의 한계를 극복하는 간단한 방법중의 하나는 스트레스를 제품의 사용조건에서부터 증가시키는 것이다. 이 논문에서는 기존의 램프시험의 이러한 한계를 극복할 수 있도록 스트레스를 제품의 사용조건에서부터 시간에 따라 선형적으로 스트레스 상한까지 증가시켜 이 스트레스 상한에서 시험을 계속하는 램프형 가속수명시험을 제안하고, 이러한 시험하에서 얻은 수명자료를 통계적으로 분석하는 방법을 제시한다. 제품의 수명이 지수분포를 따르고, 스트레스와 수명이 역거듭제곱(inverse power law)의 관계에 있으며, 누적노출모형이 만족된다고 가정한다. 제2절에서는 이 논문에서 제안하는 램프시험절차를 설명하고, 이 시험하에서의 수명분포모형을 유도한다. 제3절에서는 수명분포의 최우추정량를 구하고, 최우추정량의 점근분포를 구한다. 그리고 제4절에서는 예제를 통하여 최우추정량과 추정량의 점근분포를 구하는 과정을 설명한다.

2. 모형

가속수명시험 자료의 통계적분석을 위해서는 스트레스 수준과 수명과의 관계를 나타내는 모형과 스트레스 수준의 변화가 제품수명에 미치는 효과를 설명하는 모형이 필요하다. 이 절에서는 이 논문에서 고려하는 램프시험의 형태와 사용되는 기본적인 가정들을 정리하고, 램프시험하에서 제품의 수명분포를 유도한다.

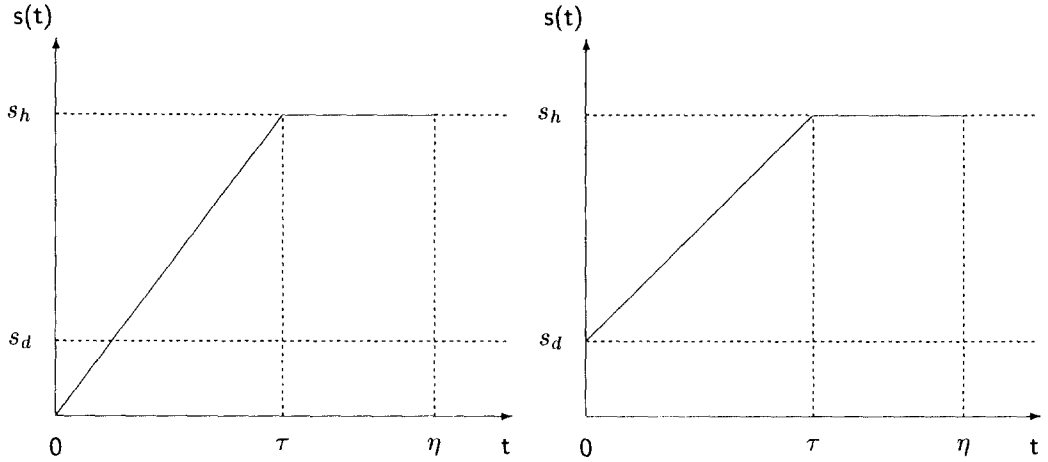
2.1 시험 절차

이 논문에서 고려하는 램프시험의 절차는 다음과 같다.

i. n개의 시험제품을 사용조건 s_d에서 기울기를 k로 하여 선형적으로 증가시키는 램프스트레스하에서 시험한다.

ii. 스트레스 수준이 스트레스의 상한 s_h에 이르면, 스트레스를 이 수준으로 고정하여 미리 정한 관측중단시점 η까지 시험한다.

<그림 1>은 이 시험의 스트레스 수준의 시간에 따른 변화를 그래프로 나타낸 것이다. <그림 1(a)>는 기존의 램프시험을 나타낸 것이고, <그림 1(b)>는 이 논문에서 고려하는 램프시험을 나타낸 것이다.



< 그림 1 > 램프형시험의 스트레스 수준변화

2.2 기본 가정

이 연구에서는 다음 사항을 가정한다.

i. 일정 스트레스 수준 s에서 제품의 수명은 모수 $\theta(s)$인 지수분포를 따른다. 즉, 스트레스 수준 S에서의 수명의 분포함수(cumulative distribution function) $F^*(t;s)$는

$$F^*(t;s) = 1 - \exp\left\{-\frac{t}{\theta(s)}\right\}, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

이다.

ii. 스트레스 수준 S와 모수 $\theta(s)$는 역거듭제곱의 관계가 있다. 여기서는 역거듭제곱모형으로

$$\theta(s) = e^{\alpha_0}(s_h/s)^{\alpha_1} \tag{2}$$

를 고려한다.

iii. 제품의 고장과정은 스트레스수준의 상한 s_h보다 낮은 경우에는 변화하지 않는다.

iv. 누적노출모형이 성립한다.

v. 시험제품의 수명은 모두 서로 독립이다.

2.3 램프 시험하에서의 수명분포

스트레스를 <그림 1(b)>와 같이 변화시킬 때 시점 t에서의 스트레스 수준 $s(t)$는

$$s(t)=\begin{cases} s_d+kt, & 0\le t<\tau, \\ s_h, & t\ge\tau. \end{cases} \tag{3}$$

로 나타낼 수 있다. 스트레스 $s(t)$하에서의 수명분포는 일정 스트레스하에서의 수명이 지수분포를 따르고, 스트레스와 수명의 관계가 역거듭제곱모형일 때, 누적노출모형을 고려하면

$$F(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ 1-\exp\left\{-e^{-\alpha_0}\int_0^t (s(u)/s_h)^{\alpha_1}du\right\}, & t\ge 0. \end{cases} \tag{4}$$

임을 보일 수 있다(Yin과 Sheng(1989)). 식(4)의 적분 $\int_0^t (s(u)/s_h)^{\alpha_1}du$는 t의 값에 따라 달라지며,

$$\int_0^t \left(\frac{s(u)}{s_h}\right)^{\alpha_1}du=\begin{cases} c_1(t), & 0<t<\tau, \\ c_1(\tau)+(t-\tau), & t\ge\tau, \end{cases} \tag{5}$$

$$c_1(t)=\frac{s_h}{k(\alpha_1+1)}\left\{\left(\frac{s_d+kt}{s_h}\right)^{\alpha_1+1}-\left(\frac{s_d}{s_h}\right)^{\alpha_1+1}\right\}$$

로 구할 수 있다. 여기서 $\Delta = s_d/s_h$, $A = \tau/[(\alpha_1+1)(1-\Delta)]$ 그리고 $\phi(t) = \Delta + (1-\Delta)t/\tau$로 두면, $c_1(t) = A\{[\phi(t)]^{\alpha_1+1} - \Delta^{\alpha_1+1}\}$로 나타낼 수 있고, $c_2(t) = A(1-\Delta^{\alpha_1+1}) + (t-\tau)$라 하면, 스트레스 $s(t)$하에서의 수명 T의 분포함수는

$$F(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1-\exp\{-e^{-\alpha_0}c_1(t)\}, & 0\le t<\tau \\ 1-\exp\{-e^{-\alpha_0}c_2(t)\}, & t\ge\tau \end{cases} \tag{6}$$

임을 알 수 있다. 또한 T의 확률밀도함수는 식(6)을 미분하여

$$f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha_0}[\phi(t)]^{\alpha_1}\exp\{-e^{-\alpha_0}c_1(t)\}, & 0\le t<\tau \\ e^{-\alpha_0}\exp\{-e^{-\alpha_0}c_2(t)\}, & \tau\le t<\infty \end{cases} \tag{7}$$

로 구할 수 있다.

3. 최우추정과 추정량의 점근분포

모수 α_0, α_1의 추정을 위해서 최우법을 고려한다. 제1종관측중단된 자료의 경우에는 최우법외에 사용할 수 있는 방법이 별로 없으므로 대부분의 경우에 최우법을 사용하여 모수들의 추정치를 구한다. 이는 추정량을 구하기가 쉬울 뿐만아니라 추정량의 점근분포도 잘 알려져 있기 때문이라고 볼 수 있다.

3.1 대수우도함수

식 (3)의 스트레스하에서 미리 정한 관측중단시점 η까지 시험하는 제1종 관측중단의 경우를 고려한다. $D_1=\{t\mid 0\le t<\tau\}$, $D_2=\{t\mid \tau\le t<\eta\}$라 하고, $u_i(t)=I_{D_i}(t)$, $i=1, 2$, $u_3(t)=1-u_1(t)-u_2(t)$라 하자. 여기서 $I_\chi(\cdot)$는 다음과 같이 정의되는 지시함수이다.

$$I_\chi(x)=\begin{cases} 1, & x\in\chi\text{인 경우} \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

모든 제품에 가해지는 스트레스가 동일하므로 제품의 수명은 서로 독립이고 동일하다. 따라서 하나의 표본에 대해서 대수우도함수를 구하여 더하면 n개 표본에 대한 대수우도함수가 된다. 하나의 표본 t에 대한 대수우도함수는 $L\equiv L(\alpha_0,\alpha_1)$라 하면

$$L=-\alpha_0\sum_{i=1}^{2}u_i(t)+u_1(t)\alpha_1\ln\phi(t)-e^{-\alpha_0}\left\{\sum_{i=1}^{2}u_i(t)c_i(t)+u_3(t)c_2(\eta)\right\} \tag{8}$$

로 구할 수 있다.

3.2 최우추정량

n개의 제품으로 시험할 때, n_1을 $(0,\tau]$에서 고장난 제품수, n_2를 $(\tau,\eta]$에서 고장난 제품수라 하면, $n_3=n-n_1-n_2$개의 제품은 시점 η에서 관측중단 된다. t_{1i}를에

$(0, \tau]$에서 고장난 제품 j의 고장시간, t_{2j}를 $(\tau, \eta]$에서 고장난 제품 j의 고장시간이라 하면, <부록(A)>의 일차편미분식으로부터 다음의 우도방정식을 얻을 수 있다.

$$-(n_1+n_2)+e^{-\alpha_0}\left\{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}c_i(t_{ij})+n_3c_2(\eta)\right\}=0 \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n_1}\ln\phi(t_{1j})-e^{-\alpha_0}\left\{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{dc_i(t_{ij})}{d\alpha_1}+n_3\frac{dc_2(\eta)}{d\alpha_1}\right\}=0 \tag{10}$$

식 (9)와 (10)에서 α_0를 소거하면, α_1만의 식

$$\frac{Q_1^a(\alpha_1)+Q_2^a(\alpha_1)}{n_1+n_2}=\frac{Q_1^b(\alpha_1)+Q_2^b(\alpha_1)}{\sum_{j=1}^{n_1}\ln\phi(t_{1j})} \tag{11}$$

를 얻을 수 있다. 여기서 $Q_i^a(\alpha_1)$와 $Q_i^b(\alpha_1)$는 주어진 자료로부터 다음과 같이 계산된다.

$$Q_1^a(\alpha_1)=A\left\{\sum_{j=1}^{n_1}[\phi(t_{1j})]^{\alpha_1+1}-n_1\Delta^{\alpha_1+1}\right\},$$

$$Q_2^a(\alpha_1)=(n_2+n_3)\{A(1-\Delta^{\alpha_1+1})-\tau\}+\sum_{j=1}^{n_2}t_{2j}+n_3\eta,$$

$$Q_1^b(\alpha_1)=A\sum_{j=1}^{n_1}[\phi(t_{1j})]^{\alpha_1+1}\ln\phi(t_{1j})-\frac{A}{\alpha_1+1}\sum_{j=1}^{n_1}[\phi(t_{1j})]^{\alpha_1+1}$$
$$-n_1A\Delta^{\alpha_1+1}\left(\ln\Delta-\frac{1}{\alpha_1+1}\right),$$

$$Q_2^b(\alpha_1)=-(n_2+n_3)A\left\{\frac{1}{\alpha_1+1}+\Delta^{\alpha_1+1}\left(\ln\Delta-\frac{1}{\alpha_1+1}\right)\right\}.$$

식 (11)을 만족하는 값이 α_1의 최우추정량 $\widehat{\alpha_1}$이다. 이는 이분법(bisection method)과 같은 간단한 수치해법으로 해를 구할 수 있다. 그리고 α_0의 최우추정량은 식 (9)로부터

$$\widehat{\alpha_0}=\ln\left[Q_1^a(\widehat{\alpha_1})+Q_2^a(\widehat{\alpha_1})\right]-\ln(n_1+n_2) \tag{12}$$

로 구한다.

3.3 추정량의 점근분포

대수우도함수를 α_0, α_1에 대해서 이차편미분한 식에 (-1)을 곱하고, 관측값 t를 확률밀도함수가 식(7)인 확률변수로 하여 기대값을 구한 것이 피셔정보행렬 F의 원소가 된다. 행렬 F를

$$F \equiv F(\alpha_0, \alpha_1) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \tag{13}$$

라 할 때, f_{11}, $f_{12}=f_{21}$, f_{22}는 각각

$$f_{11} = 1 - \exp(-\omega_2), \quad f_{12} = -\frac{1}{\alpha_1+1}\int_0^{\omega_1}[\ln\varphi(y)]e^{-y}dy,$$

$$f_{22} = Ae^{-\alpha_0}\left\{\frac{1}{(\alpha_1+1)^2}\int_0^{\omega_1}\varphi(y)[\ln\varphi(y)-1]^2dy - \Delta^{\alpha_1+1}\left(\ln\Delta - \frac{1}{\alpha_1+1}\right)^2\right.$$

$$\left. + \frac{(2-\Delta^{\alpha_1+1})e^{-\omega_1}}{(\alpha_1+1)^2}\right\} + \frac{1}{(\alpha_1+1)^2}\{1-(1+\omega_1)e^{-\omega_1}\}$$

로 구할 수 있다(이차편미분식과 피셔정보행렬의 유도과정은 부록을 참고하기 바란다).

n개의 제품에 대한 피셔정보 F_0는 시험 제품 각각의 수명이 서로 독립이고 동일한 분포를 따르므로 $F_0 = nF$이다. $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_0, \alpha_1)$이라 할 때, 최우추정량 $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1)$의 점근 공분산행렬(asymptotic covariance matrix) $\boldsymbol{\Sigma}$는 $n\boldsymbol{\Sigma} = F^{-1}$로 구할 수 있으며, 표본의 크기 n이 충분히 클 때 $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha})$은 평균벡터 $\mathbf{0}$, 공분산행렬 $\boldsymbol{\Sigma}$인 이변량정규분포로 근사한다. 모수들에 대한 신뢰구간과 가설검정은 위의 분포를 이용하면 간단히 구할 수 있다. 수명자료로부터 신뢰구간과 가설검정을 구하는 방법에 대해서는 Lawless(1982)와 Nelson(1982,1990)에서 자세히 설명하고 있다.

< 표 1 > 가상적인 램프시험자료

고 장 시 간 (단위: 초(seconds))							
1283.23	1228.69	1157.62	976.65	940.59	1309.68	588.74	1303.54
1025.39	1338.24	1212.84	410.47	1361.77	822.86	1476.55	820.78
1031.79	865.72	1006.78	819.05	1331.38	695.72	961.08	1440.29
1114.75	644.14	897.64	1049.16	1047.91	1312.44	1301.06	1098.71
1291.68	1083.85	1329.89	1168.47	876.50	1532.42	1247.23	1055.28
960.47	409.87	1097.43	1259.55	1066.68	871.36	940.65	1492.07
1429.36	1197.20	823.45	1289.80	856.60	532.72	846.00	784.72
1061.98	704.67	496.81	870.13	1288.80	1127.56	739.10	1239.42
1509.31	1244.11	682.52	1017.69	663.59	1361.46	1276.56	1312.02
1350.83	1427.34	838.90	784.20	1414.06	1236.82	972.45	1077.21
838.36	1119.11	967.18					

4. 수치예제

이 절에서는 제3절에서 제시한 최우추정량과 추정량의 점근분포를 이용해서 제품의 신뢰성을 분석하는 과정을 예제를 이용해서 설명한다.

<표 1>의 자료는 $\alpha_0=6.0$, $\alpha_1=9.0$, $s_d=20(\mathrm{kV})$, $s_h=40(\mathrm{kV})$, $k=20(\mathrm{V/sec})$ 그리고 $\eta=1,600(\mathrm{sec})$로 하여 가상적으로 발생시킨 100개의 자료중에서 고장이 관측된 자료 87개를 정리한 것이다. 이 자료로부터 α_0와 α_1의 최우추정치를 구해보자. α_1의 최우추정치는 방정식(11)을 풀어서 구할 수 있고, 이분법으로 해를 구하면 $\widehat{\alpha_1}=8.9447$이다. 그리고 α_0의 최우추정치는 $\widehat{\alpha_1}=8.9447$를 식(12)에 대입하여 구하면 $\widehat{\alpha_0}=5.6906$이다.

이제 피셔정보행렬의 추정치를 구한다. 식(13)의 피셔정보행렬에 α_0와 α_1의 최우추정치를 대입하여 피셔정보행렬의 추정치 $\widehat{F_0}=n\cdot F(\widehat{\alpha_0}, \widehat{\alpha_1})$를 구하고, 이 행렬의 역행렬로 최우추정량 $(\widehat{\alpha_0}, \widehat{\alpha_1})$의 점근공분산행렬 $\boldsymbol{\Sigma}_0$를 구하면

$$\widehat{F}_0=\begin{bmatrix} 49.266 & -6.3117\times10^{-5} \\ -6.3117\times10^{-5} & 8.0462\times10^{-1} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Sigma}_0=\begin{bmatrix} 2.0298\times10^{-2} & 1.5947\times10^{-6} \\ 1.5947\times10^{-6} & 1.2428 \end{bmatrix}$$

이다. 피셔정보행렬의 원소 f_{22}는 두 개의 적분식을 포함하고 있으며, 이 적분은 수치적으로 구할 수 있다. 여기서는 Romberg 적분법을 사용하였다. 따라서 최우추정량

$\hat{\alpha}_0$ 와 $\hat{\alpha}_1$ 의 점근분산(asymptotic variance: Asvar)과 점근공분산(asymptotic covariance: Ascov)의 추정치는 각각 $\widehat{\text{Asvar}}(\hat{\alpha}_0)=2.0298\times10^{-2}$, $\widehat{\text{Asvar}}(\hat{\alpha}_1)=1.2418$ 그리고 $\widehat{\text{Ascov}}(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1)=1.5947\times10^{-6}$이다.

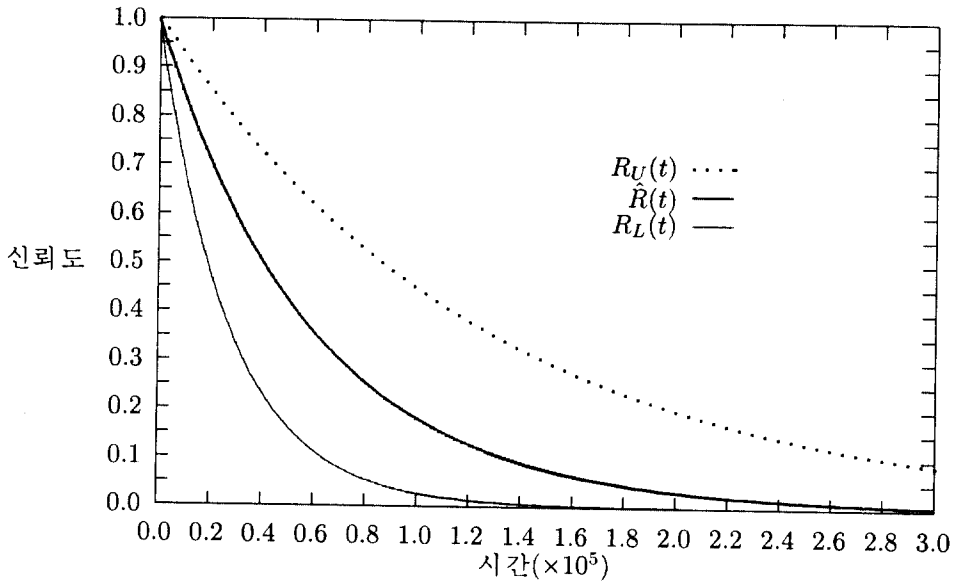
사용조건 스트레스 20(kV)에서의 대수 평균수명 $\ln\theta(s_d)$의 추정치는 $\ln\hat{\theta}(s_d)=\hat{\alpha}_0+\hat{\alpha}_0\ln(s_h/s_d)=11.8906$이고, 점근분산은 $\widehat{\text{Asvar}}(\ln\hat{\theta}(s_d))=\widehat{\text{Asvar}}(\hat{\alpha}_0)+[\ln(s_h/s_d)]^2\widehat{\text{Asvar}}(\hat{\alpha}_1)+2\ln(s_h/s_d)\widehat{\text{Ascov}}(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1)=2.0298\times10^{-2}+[\ln(2)]^2\times1.2428+2\times\ln(2)\times1.5947\times10^{-6}=0.6174$이다. $\ln\theta(s_d)$의 95% 신뢰구간은 점근정규분포를 고려하면 $11.8906\pm1.96\sqrt{0.6174}\equiv(10.351, 13.431)$로 구할 수 있다.

$\ln\theta$의 $100(1-\alpha)$%신뢰구간이 $L\le\ln\theta\le U$일 때, 모수 θ의 식으로 표현되는 평균수명 θ, 고장률 $\lambda=1/\theta$, 제 $100p$ 백분위수 $t_p=-\theta\ln(1-p)$ 그리고 특정시점 t_0에서의 신뢰도 $R(t_0)=e^{-t_0/\theta}$의 신뢰구간은 다음과 같이 구한다.

- 평균수명 θ의 신뢰구간: $e^L\le\theta\le e^U$
- 고장률 λ의 신뢰구간: $e^{-U}\le\theta\le e^{-L}$
- 제 $100p$ 백분위수 t_p의 신뢰구간: $-e^L\ln(1-p)\le t_p\le-e^U\ln(1-p)$
- 시점 t_0에서의 신뢰도 $R(t_0)$의 신뢰구간: $e^{-t_0e^{-L}}\le R(t_0)\le e^{-t_0e^{-U}}$

< 표 2 > $\hat{t}_p$와 t_p의 95% 신뢰하·상한($\times10^5$)

p	$\hat{t}_p$	신뢰하한	신뢰상한	p	$\hat{t}_p$	신뢰하한	신뢰상한
.01	.01466	.00314	.06842	.50	1.0112	.21687	4.7188
.05	.07483	.01605	.34920	.60	1.3368	.28669	6.2380
.10	.15371	.03297	.71728	.70	1.7565	.37670	8.1964
.20	.32554	.06982	1.5191	.80	2.3480	.50357	10.957
.30	.52035	.11160	2.4282	.90	3.3592	.72044	15.676
.40	.74524	.15983	3.4776	.99	6.7184	1.4409	31.351



< 그림 2 > $\hat{R}(t)$와 $R(t)$의 95% 신뢰 하·상한

따라서 $\theta(s_d)$의 95% 신뢰구간은 $(e^{10.351}, e^{13.431}) = (3.12883\times 10^{4}, 6.80784\times 10^{5})$, 고장률 λ의 95% 신뢰구간은 $(1.1353\times 10^{-6}, 3.1961\times 10^{-5})$로 구할 수 있다. <표 2>는 p의 여러 가지 값에 대해서 t_p의 최우추정치와 95% 신뢰하·상한을 정리한 것이다.

<그림 2>는 신뢰도함수 $R(t)$의 최우추정치와 95% 신뢰하·상한을 그래프로 나타낸 것이다. 이 그래프로부터 특정시점 t_0에서의 신뢰도 $R(t_0)$의 최우추정치와 95% 신뢰하·상한을 구할 수 있다.

5. 결론

램프형 시험은 고장자료를 짧은 시간내에 얻을 수 있다는 장점이 있으므로 제품 개발단계에서의 부품의 신뢰성 검증에 폭넓게 사용될 수 있다. 이 연구에서는 스트레스를 0에서 시간에 따라 선형적으로 증가시키는 기존의 연구를 확장하여, 스트레스를 제품의 사용조건에서 증가시키고, 스트레스 수준의 한계가 있는 램프시험을 제안하였다. 제품의 수명이 일정스트레스에서 지수분포를 따르고, 수명과 스트레스와의 관계가 역거듭제곱 모형일 때, 이 논문에서 제안한 램프시험하의 수명분포를 유도하고, 제1종

관측중단하는 시험에 대해서 모수들의 최우추정량을 간단한 수식을 수치해법으로 풀어서 구할 수 있음을 보였고, 추정량의 점근분포를 구했다.

이 논문에서는 지수수명분포일 경우에 대한 통계적 추론에 대해서만 다루었다. 가속수명시험에서 최적시험설계 또한 중요한 연구분야 중의 하나이다. 현재 이 경우에 대한 가속수명시험의 최적설계와 수명분포가 와이블 혹은 대수정규분포인 경우의 통계적 추론과 최적시험설계에 대해서 연구를 계속하고 있다.

참고문헌

[1] Bai, D.S. and Chun, Y.R.(1993), "A Nonparametric Inferences for Ramp Stress Tests under Random Censoring," *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 41, pp. 217-223.

[2] Bai, D.S., Chun, Y.R. and Cha, M.S.(1996), "Time-Censored Ramp Tests with Stress Bound for Exponential Lifetime Distribution," *J. of the Korean Institute of Industrial Engineers*, Vol. 22, pp. 459-471.

[3] Bai, D.S., Chun, Y.R. and Cha, M.S.(1997), "Time-Censored Ramp Tests with Stress Bound for Weibull Lifetime Distribution," *IEEE Trans. on Reliability* (Accepted for publication).

[4] Lin, Z. and Fei, H.(1991), "A Nonparametric Approach to Progressive Stress Accelerated Life Testing," *IEEE Trans. on Reliability*, Vol. 40, pp. 173-176.

[5] Lawless, J.F.(1982), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley & Sons, New York.

[6] Nelson, W.(1980), "Accelerated Life Testing --- Step Stress Models and Data Analysis," *IEEE Trans. on Reliability*, Vol. R-29, pp. 103-108.

[7] Nelson, W.(1982), *Applied Life Data Analyses*, John Wiley & Sons, New York.

[8] Nelson, W.(1990), *Accelerated Testing --- Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses*, John Wiley & Sons, New York.

[9] Shaked, M. and Singpurwalla, N.D.(1983), "Inference for Step-Stress Accelerated Life Tests," *J. of Statistical Planning and Inference*, Vol.7, pp. 295-306.

[10] Yin, X.K. and Sheng, B.Z.(1987), "Some Aspects of Accelerated Life Testing by Progressive Stress," *IEEE Trans. on Reliability*, Vol. R-39, pp. 150-155.

부 록

A. 일·이차편미분식

식(7)의 대수 우도함수를 α_0, α_1에 대해서 일차편미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_0} = -\sum_{i=1}^{2} u_i(t) + e^{-\alpha_0}\left\{\sum_{i=1}^{2} u_i(t)c_i(t) + u_3(t)c_2(\eta)\right\},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = u_1(t)\ln\phi(t) - e^{-\alpha_0}\left\{\sum_{i=1}^{2} u_i(t)\frac{dc_i(t)}{d\alpha_1} + u_3(t)\frac{dc_2(\eta)}{d\alpha_1}\right\}.$$

여기서 $dc_1(t)/d\alpha_1 = A\{[\phi(t)]^{\alpha_1+1}[\ln\phi(t) - 1/(\alpha_1+1)] - \Delta^{\alpha_1+1}[\ln\Delta - 1/(\alpha_1+1)]\}$,
$dc_2(t)/d\alpha_1 = -A/(\alpha_1+1) - A\Delta^{\alpha_1+1}\{\ln\Delta - 1/(\alpha_1+1)\}$,
그리고 $dc_2(\eta)/d\alpha_1 = -A/(\alpha_1+1) - A\Delta^{\alpha_1+1}\{\ln\Delta - 1/(\alpha_1+1)\}$이다.

이차편미분식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_0^2} = -e^{-\alpha_0}\left\{\sum_{i=1}^{2} u_i(t)c_i(t) + u_3(t)c_2(\eta)\right\},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1} = e^{-\alpha_0}\left\{\sum_{i=1}^{2} u_i(t)\frac{dc_i(t)}{d\alpha_1} + u_3(t)\frac{dc_2(\eta)}{d\alpha_1}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_1^2} = -e^{-\alpha_0}\left\{\sum_{i=1}^{2} u_i(t)\frac{d^2 c_{i(t)}}{d\alpha_1^2} + u_3(t)\frac{d^2 c_2(\eta)}{d\alpha_1^2}\right\}.$$

단, $d^2c_1(t)/d\alpha_1^2 = A\{[\phi(t)]^{\alpha_1+1}[\ln\phi(t) - 1/(\alpha_1+1)]^2 - \Delta^{\alpha_1+1}[\ln\Delta - 1/(\alpha_1+1)]^2 + [(\phi(t))^{\alpha_1+1} - \Delta^{\alpha_1+1}]\}$, $d^2c_2(t)/d\alpha_1^2 = A\{(2-\Delta^{\alpha_1+1})/(\alpha_1+1)^2 - \Delta^{\alpha_1+1}[\ln\Delta - 1/(\alpha_1+1)]^2\}$, 그리고 $d^2c_2(\eta)/d\alpha_1^2 = A\{(2-\Delta^{\alpha_1+1})/(\alpha_1+1)^2 - \Delta^{\alpha_1+1}[\ln\Delta - 1/(\alpha_1+1)]^2\}$ 이다.

B. 피셔정보행렬의 원소

정규조건하에서 일차편미분식의 기대값은 0이므로 다음의 식이 성립한다.

$$e^{-\alpha_0}E\left[\sum_{i=1}^{2} u_i(t)c_i(t) + u_3(t)c_2(\eta)\right] = E[u_1(t) + u_2(t)],$$

$$e^{-\alpha_0}E\left[\sum_{i=1}^{2}u_i(t)\frac{dc_i(t)}{d\alpha_1}+u_3(t)\frac{dc_2(\eta)}{d\alpha_1}\right]=E[u_1(t)\ln\phi(t)]$$

따라서 $f_{11}=-E[\partial^2L/\partial\alpha_0^2]=E[u_1(t)]+E[u_2(t)]$, $f_{12}=f_{21}=-E[\partial^2L/\partial\alpha_0\partial\alpha_1]=-E[u_1(t)\ln\phi(t)]$, 그리고 $f_{22}=-E[\partial^2L/\partial\alpha_1^2]=e^{-\alpha_0}\{E[u_1d^2c_1(t)/d\alpha_1^2]$ $E[u_2d^2c_2(t)/d\alpha_1^2]+E[u_3(t)](d^2c_2(\eta)/d\alpha_1^2)\}$ 이고, 여기서

$$E\left[u_1(t)\frac{d^2c_1(t)}{d\alpha_1^2}\right]=A\left\{E\left[u_1(t)[\phi(t)]^{\alpha_1+1}\left(\ln\phi(t)-\frac{1}{\alpha_1+1}\right)^2\right]\right.$$

$$\left.+\frac{E[u_1(t)[\phi(t)]^{\alpha_1+1}]}{(\alpha_1+1)^2}-\Delta^{\alpha_1+1}\left[\left(\ln\Delta-\frac{1}{\alpha_1+1}\right)^2+\frac{1}{(\alpha_1+1)^2}\right]E[u_1(t)]\right\},$$

$$E\left[u_2(t)\frac{d^2c_2(t)}{d\alpha_1^2}\right]=A\left\{\frac{(2-\Delta^{\alpha_1+1})}{(\alpha_1+1)^2}-\Delta^{\alpha_1+1}\left(\ln\Delta-\frac{1}{\alpha_1+1}\right)^2\right\}E[u_2(t)]$$

이다. 그리고, $\omega_1=e^{-\alpha_0}c_1(\tau)$, $\omega_2=e^{-\alpha_0}c_2(\eta)$라 하면, $E[u_1(t)]=1-e^{-\omega_1}$, $E[u_2(t)]$ $=e^{-\omega_1}-e^{-\omega_2}$, $E[u_1(t)\ln\phi(t)]=(\alpha_1+1)^{-1}\int_0^{\omega_1}\ln\varphi(y)e^{-y}dy$ $E[u_1(t)[\phi(t)]^{\alpha_1+1}]=\Delta^{\alpha_1+1}(1-e^{-\omega_1})+e^{\alpha_0}[1-(\omega_1+1)e^{-\omega_1}]/A$, $E[u_1(t)[\phi(t)]^{\alpha_1+1}(\ln\phi(t)-1/(\alpha_1+1))^2]=(\alpha_1+1)^{-2}\int_0^{\omega_1}\varphi(y)[\ln\varphi(y)-1]^2e^{-y}dy$ 이다. 단, 여기서 $\varphi(y)=\Delta^{\alpha_1+1}+e^{\alpha_0}y/A$ 이다. 이들을 정리하면, 식(13)의 정보행렬을 얻을 수 있다.