⊠응용논문

체계수명자료를 이용한 이중부품부하분배체계의 신뢰도 추정

홍연웅
동양대학교 산업공학과
권용만
조선대학교 통계학과

Estimation of Reliability for a Two-Component Shared Parallel System Using System Life Data

Yeon-Woong Hong
Dept. of Industrial Engineering, Dongyang University
Yong-Man Kwon
Dept. of Statistics, Chosun University

Abstract

This paper considers the problem of estimating parameters and reliability of shared parallel system with two identical components using type II censored system life data. Likelihood functions are derived and maximum likelihood estimates of parameters and reliability are discussed numerically.

1. 서론

두 개의 부품을 가지는 병렬체계에서 어느 한 부품이 고장나면 고장난 부품이 분담하던 부하가 고장나지 않은 부품에 전가되어 정상부품의 고장률에 영향을 줄 경우 두 부품의 수명은 상호 종속적이다. 예를 들면 쌍발엔진을 장착한 비행기, 두 대의 냉각기를 갖춘 냉동시스템 등의 기계체계나 신장, 허파, 안구 등의 쌍을 이루는 생체기관과 같이 부하가 늘어나는 경우가 있고, 반대로 구성요소가 경쟁적 입장에 있을 경우에는 한 요소의 고장이 다른 요소의 부하를 경감시키는 경우도 있다.

이와같은 병렬구조를 가지는 체계(부하분배체계라 함)의 상호종속적인 두 부품의

수명을 묘사하는 확률모형에는 여러 가지가 있지만 개별 부품의 수명이 지수분포를 따를 때 대표적인 모형으로 Freund(1961)모형이 있다. Freund는 순간고장률이 각각 α와 β이며 서로 독립인 지수분포를 따르는 두 개의 부품이 병렬구조를 이루는 체계에서 두 부품은 동시에 고장나지 않으며, 어느 한 부품이 먼저 고장나는 순간 다른 부품은 고장난 부품이 분담하던 부하를 이전받아 순간고장률이 α에서 α' 또는 β에서 β'으로 변화하는 경우에 두 부품의 결합수명분포를 식 (1)과 같이 유도하고 모수의 통계적 성질 등을 밝혔다.

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \alpha\beta' e^{-\beta' y-(\alpha+\beta-\beta')x}, & 0 < x < y \\ \alpha'\beta e^{-\alpha' x-(\alpha+\beta-\alpha')y}, & 0 < y < x \end{cases} \tag{1}$$

Weier(1981)는 Freund 모형에서 $\alpha=\beta=\lambda$이고 $\alpha'=\beta'=\theta\lambda$인 — 동일한 두 개의 부품으로 구성된—경우에 모수와 결합생존확률에 대한 베이즈 추정량을 구하였다. Klein과 Basu(1985)는 Freund모형과 밀접한 관련이 있는 Marshall과 Olkin(1967) 및 Block와 Basu(1974)모형에 대하여 결합생존확률을 추정하였다. Kunchur와 Munoli (1994)는 두 부품의 수명이 Freund의 이변량지수분포를 따를 때 부하분배체계의 신뢰도에 대한 최소분산불편추정량을 구하였다. Hanagal(1996)은 강도가 Freund의 이변량분포 등을 따르는 부하강도체계의 신뢰도를 추정하였다.

체계를 구성하는 부품의 수명이 종속일 경우 부품단위의 수명시험으로는 종속성을 반영할 수 없으므로 체계단위의 수명시험을 실시하여야 한다. 그러나 사용현장에서 얻어지는 자료(field data)이거나 실험실에서 체계단위의 수명시험을 실시하는 경우에도 체계의 구조적 특성 또는 수명관측기술적 한계 등의 이유로 부품의 수명관측이 불가능하고 체계의 수명만 관측되는 경우가 있다. 이와같은 배경에서 본 연구에서는 체계를 구성하는 두 부품의 수명을 각각 X와 Y라할 때 체계의 수명 $\max(X,\, Y)$만이 관측되어지는 상황을 전제로하며 아울러 두 부품의 고장은 동시에 발생하지 않는다고 가정한다.

본 연구에서는 두 개의 동일한 부품이 병렬구조를 가지는 부하분배체계에서 부품수명의 결합분포가 $\alpha=\beta=\lambda$이고 $\alpha'=\beta'=\theta\lambda$인 Freund 모형을 따르는 n개의 체계를 수명시험하여 미리 정해진 수 (r)의 체계가 고장나면 시험을 종결하고 이때까지 얻어진 체계의 수명자료를 이용하여 모형의 모수와 체계신뢰도에 대한 최우추정치를 구하고자 한다. 또한 2절에서 언급되겠지만 부품의 수명이 지수분포를 따를 때 이중부품부하분배체계와 이중부품대기체계(standby redundant system)의 신뢰도함수는 동일한 형태를 가지므로 본 연구의 방법과 결과는 대기체계의 수명시험에도 적용가능함을 밝혀둔다.

2. 체계의 수명분포

동일한 순간고장률 λ를 가지는 두 개의 부품으로 구성된 부하분배체계에서 먼저 고장난 부품이 고장나지 않은 부품의 순간고장률을 $\lambda\theta$, $\theta>0$로 변화시키는 상황을 고려해보자. 여기서 $\theta=1$이면 두 부품의 수명은 서로 독립이며 한 부품의 고장이 다른 부품의 수명에 영향을 미치지 않는 경우를 의미하며 전형적인 병렬체계로 부품 단위의 수명시험자료만 있어도 충분한 해석이 용이하다. $\theta>1$이면 작동하는 부품의 부하가 증가되어 평균수명이 감소하며, $0<\theta<1$이면 작동하는 부품의 부하가 감소되어 평균수명이 증가하게 된다. 즉 $\theta\neq1$인 경우 θ는 두 부품수명의 상호종속성을 반영하는 모수임을 알 수 있다. 특히 $\theta=2$이면 작동하는 부품은 자체의 초기 순간고장률과 고장난 부품의 순간고장률을 합한 경우가 된다.

식 (1)에서 $\alpha=\beta=\lambda$이고 $\alpha'=\beta'=\theta\lambda$이면 두 부품의 수명을 나타내는 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수는

$$f_0(x,y)=\theta\lambda^2\exp\{-2\lambda\min(x,y)-\theta\lambda|x-y|\},\quad x,\ y>0 \tag{2}$$

이다. 여기서 $U=\min(X,Y)$, $V=\max(X,Y)$로 변환을 하면 U와 V의 결합분포는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$f(u,v)=2\theta\lambda^2\exp\{-(2\lambda-\theta\lambda)u-\theta\lambda v\},\quad 0<u<v. \tag{3}$$

따라서 체계의 수명을 나타내는 V의 확률밀도함수는

$$\begin{aligned} g(v) &= \int_0^v f_2(u,v)\,du \\ &= \begin{cases} \dfrac{2\theta\lambda}{2-\theta}\{\exp(-\theta\lambda v)-\exp(-2\lambda v)\}, & \theta\neq2 \\ (2\lambda)^2 v\exp(-2\lambda v)/\Gamma(2), & \theta=2 \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

이고 V의 생존함수, 즉 체계의 신뢰도함수 $S(t)$는

$$S(t)=\begin{cases} \dfrac{2}{2-\theta}\exp(-\theta\lambda t)-\dfrac{\theta}{2-\theta}\exp(-2\lambda t), & \theta\neq2, \\ (1+2\lambda t)\exp(-2\lambda t), & \theta=2. \end{cases} \tag{5}$$

이며, 체계의 기대수명 μ는 다음과 같다.

$$\mu = 1/(2\lambda) + 1/(\theta\lambda) \tag{6}$$

본 연구에서 다루고자 하는 것은 식 (4)를 따르는 n개의 체계를 수명시험하여 r개의 체계에서 고장이 발생하는 순간 시험을 종결하고 그 때까지 얻어진 체계의 수명자료를 이용하여 모형의 모수 λ와 θ, 신뢰도 함수 및 평균기대수명 μ를 추정하는 문제이다.

특히 식 (5)는 지수분포를 가지는 두 개의 부품으로 이루어진 대기체계의 신뢰도와 동일한 형태를 가지도록 정리(reparameterizing)할 수 있다[Kapur와 Lamberson(1977), pp. 218-221]. 즉 식 (5)에서 $\theta \neq 2$일 경우는 $\lambda = \lambda_2/2$와 $\theta = 2\lambda_1/\lambda_2$로 치환하면 두 부품의 고장률이 λ_1과 λ_2인 대기체계의 신뢰도를, $\theta = 2$일 경우에는 부품의 고장률이 2λ로 동일한 대기체계의 신뢰도를 나타낸다. 따라서 본 연구의 방법은 체계의 수명만 관측가능하며 완전한 스위칭이 이루어지는 두 개의 부품을 가지는 대기체계의 수명시험자료를 해석할 경우에도 동일하게 적용할 수 있을 것이다.

3. 모수 및 체계신뢰도의 추정

3.1 우도함수

체계를 구성하는 두 부품의 결합수명분포가 식 (4)를 따르는 n개의 체계를 수명시험하여 고장난 체계를 교체하지 않으면서 $r(\leq n)$개가 고장날 때까지 얻어지는 체계의 수명자료를 순서대로 $v_{(1)} \leq v_{(2)} \leq \cdots \leq v_{(r)}$이라하면, $\theta \neq 2$일 경우에 우도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L(\lambda, \theta | data) \propto & \prod_{i=1}^{r} \left[\frac{2\theta\lambda}{2-\theta} \{ \exp(-\lambda\theta v_{(i)}) - \exp(-2\lambda v_{(i)}) \} \right] \\ & \cdot \left\{ \frac{2}{2-\theta} \exp(-\lambda\theta v_{(r)}) - \frac{\theta}{2-\theta} \exp(-2\lambda v_{(r)}) \right\}^{n-r} \end{aligned} \tag{7}$$

위의 우도함수를 각 모수에 관하여 편미분한 두 개의 비선형 우도방정식으로부터 λ와 θ에 대한 폐쇄형 표현식을 유도하는 것이 불가능하므로, 본 연구에서는 수치해석적 방법을 이용하여 최우추정치를 구한다. 체계의 수명자료가 완전히 얻어지는 경우에도 마찬가지다.

$\theta = 2$일 경우의 대수우도함수는

$$\ln L(\lambda|data) = 2r\ln\lambda + \sum_{i=1}^{r}\ln v_{(i)} - 2\lambda\sum_{i=1}^{r} v_{(i)} + (n-r)\ln[1+2\lambda v_{(r)}\exp(-2\lambda v_{(r)})] + constant \tag{8}$$

임을 알 수 있으며, λ에 대하여 위로 볼록한 단봉함수임을 수치적으로 확인 할 수 있다. 특히 체계의 수명자료가 완전히 얻어지는 경우에는 식 (4)의 감마분포로부터 λ의 최우추정치는 $\hat{\lambda} = n/\sum_{i=1}^{n} v_{(i)}$임을 알 수 있고 $\hat{\lambda}$을 식 (5)와 식 (6)에 대입하면 체계신뢰도와 기대수명의 최우추정치도 얻을 수 있다.

3.2 수치예제

$\lambda=1.0$, $\theta=1.5$에 대하여 식 (1)을 따르는 크기 20의 이변량자료를 IMSL을 이용하여 생성하면 (.0344, .2201), (.3344, .1068), (.2662, .3691), (2.0870, .1072), (.1686, .2575), (3.4390, 3.0771), (.0129, .6197), (.9654, .1354), (.1094, 1.4644), (2.2188, .1197), (2.0203, .7365), (1.1188, .3807), (.4735, .4167), (1.3572, .1906), (.9425, .7739), (.6973, .2072), (.4318, .4160), (.9289, 1.9433), (2.1932, .6881), (2.0880, .4841)이고 실제로 관측되어지는 값은 $v_i = \max(x_i, y_i)$이므로 이들을 서열화하면 .2201, .2575 .3344, .3691, .4318, .4735, .6197, .6973, .9425, .9654, 1.1188*, 1.3572*, 1.4644*, 1.9433*, 2.0203*, 2.0870*, 2.0880*, 2.1932*, 2.2188*, 3.4390*이다. 여기서 $r=10$이라하면 $v_{(10)}=.9654$이므로 [*] 표시된 값은 계산과정에서 관측중단 처리된다.

위의 자료가 주어졌을 때 모수에 대한 추정치의 관심영역을 $0.0<\hat{\lambda}\le 2.0$ 및 $0.5\le\hat{\theta}\le 2.5$으로 정하고 영역내부에서 λ와 θ의 값을 0.0001간격으로 변화시키면서 이에 대응하는 대수우도함수값을 계산하는 전면탐색법(full search method)으로 최우추정치를 구한다. 실험결과 '모수의 참값±1'의 영역은 식 (7)의 우도함수에 대해서 충분한 범위임을 알 수 있었으며 영역내부에서 대수우도함수는 항상 수렴함을 수치적으로 확인할 수 있었다.

전면탐색결과 모수의 추정치는 $\hat{\lambda}=1.2838$ 및 $\hat{\theta}=0.8416$으로 $\hat{\lambda}$은 과대추정(over estimation)하고 $\hat{\theta}$은 과소추정(under estimation)하는 경향이 있음을 알 수 있다. 또한 $\lambda=1.0$, $\theta=1.5$이고 $t=0.1$일 때 식 (5)로부터 신뢰도를 계산하면 $S(0.1)=0.9027$인데, 이의 최우추정치는 0.8104가 되어 신뢰도의 참값을 과소추정하며, 기대수명에 대해서는 참값이 2.1667일 때 최우추정치가 1.3150으로 오차가 매우 큼을 알 수 있다.

<표 1>은 $\lambda=2.0$, $\theta=3.0$에 대하여 표본크기 (n)와 관측중단개수 (r)의 변화에 따른 모수와 $t=0.1$에서의 신뢰도[$S(0.1)$]를 '모수의 참값±1'인 관심영역에서 전면탐색하여 5,000회 반복하여 추정하고 이의 평균치를 나타낸 것이다. λ와 θ 및 $S(t)$의 추정치는 전술한 바와 유사한 경향을 보이며, 표본크기가 클수록 추정치의 편의가 감소하는 경향이 있음을 알 수 있다.

이와 같은 과소추정 또는 과대추정 현상은 관측중단 비율이나 표본크기에 영향을 받지 않음을 수치적으로 알 수 있었는데 부품의 수명자료의 절반수준인 체계의 수명자료를 이용한데서 비롯되었다고 사료된다. 그러나 언급한 바와 같이 부품의 수명관측이 불가능 하고 최우추정량이 폐쇄형이 아니기 때문에 오차를 감소시키려는 노력은 향후에 연구되어야 할 부분이다.

< 표 1 > $\lambda=2.0$, $\theta=3.0$, $S(0.1)=0.9133$일 때
모수 및 신뢰도의 추정치(5,000회 반복)

n	r	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{S}(0.1)$
20	5	2.5435	2.5642	0.8224
	10	2.3572	2.7134	0.8593
	20	2.1645	2.8227	0.8985
30	5	2.4561	2.6495	0.8357
	10	2.3982	2.7541	0.8697
	20	2.2654	2.8059	0.8879
	30	2.1293	2.8462	0.9056

4. 결론

본 연구에서는 수명이 동일한 지수분포를 따르는 두 개의 부품으로 구성된 부하분배체계의 모수와 신뢰도에 대한 추정하기 위하여 수명자료가 제2종 관측중단된 형태로 얻어질 경우에 우도함수를 유도하고 최우추정치를 수치적으로 구하는 방법을 제시하였다.

종속적인 부품으로 구성된 체계에서 체계의 수명자료만이 관측가능할 경우에 추정방법을 제안하였다는 점에서 본 연구의 특징이 있으며, 끝으로 상이한 부품으로 구성된 부하분배체계 또는 세 개 이상의 부품으로 구성된 체계에서 체계의 수명자료만 유일하게 관측가능할 경우에 신뢰도를 추정하는 문제는 향후의 과제로 남겨둔다.

참고문헌

[1] Block, H.W. & Basu, A.P.(1974). A Continious Bivariate Exponential Extension. *J. of Amer. Statist. Assoc.*, 69, pp. 1031-1037.

[2] Freund, J.E.(1961). A Bivariate Extension of the Exponential Distribution, *J. Amer. Statist. Assoc.* 56, pp. 971-977.

[3] Hanagal, D.D.(1996). Estimation of System Reliability from Stress-Strength Relationship, *Commun. Statist. Theory and Methods*, 25(8), pp. 1783-1797.

[4] Klein, J.P. & Basu, A.P.(1985). Estimating Reliability for Bivariate Exponential Distributions, *Sankhya : The Indian Journal of Statistics*, B47(3), pp. 346-353.

[5] Kunchur, S.H. & Munoli, S.B.(1994). Estimation of Reliability in Freund Model for Two Component System, *Commun. Statist. Theory and Methods*, 23(11), pp. 3273-3283.

[6] Marshall, A.W. & Olkin, I.(1967). A Multivariate Exponential Distribution, *J. of Amer. Statist. Assoc.*, 62, pp. 30-40.

[7] Weier, D.R.(1981). Bayes Estimation for a Bivariate Survival Model Based on Exponential Distributions, *Commun. Statist. Theory and Methods*, 10(14), pp. 1415-1427.