⊠연구논문

이변량 지수모형에서 병렬시스템의 신뢰도 추정 : 이변량 1종 중단 자료이용

조장식 · 김희재
경성대학교 전산통계학과

The Reliability Estimation of Parallel System in Bivariate Exponential Model : Using Bivariate Type 1 Censored Data

Jang Sik Cho · Hee Jae Kim
Dept. of Computer Science and Statistics, Kyungsung University

Abstract

In this paper, we obtain maximum likelihood estimator(MLE) of a parallel system reliability for the Marshall and Olkin's bivariate exponential model with bivariate type 1 censored data. The asymptotic normal distribution of the estimator is obtained. Also we construct an approximate confidence interval for the reliability based on MLE. We present a numerical study for obtaining MLE and approximate confidence interval of the reliability.

1. 서 론

어떤 시스템이 얼마만큼 정상적인 기능을 할 수 있는가에 대한 추정문제는 신뢰도 공학분야에서 중요한 분야중 하나이다. 그래서 다양한 모형에 대해서 시스템의 신뢰도에 대한 추정문제가 많은 사람에 의해 연구되었다.

Bhattacharyya와 Johnson(1974)은 스트레스-스트렝스 모형에서 시스템의 신뢰도에 대한 추정량을 얻었다. Ebrahimi(1982)는 병렬연결된 스트레스-스트렝스 시스템의 신뢰도에 대한 추정문제를 다루었고, Johnson(1988)은 여러모형에 대한 신뢰도에 대한 문제를 포괄적으로 다루었다.

위에 있는 대부분은 부품들의 수명이 독립이면서 동일한 분포를 갖는다는 가정하에서 신뢰도를 추정하였다. 그러나 현실적으로 부품들의 수명이 서로 상관관계가 있으면서 동일한 분포가 아닌 확률변수를 갖는 경우가 많다. 이와같이 서로 상관관계가 있는 두 부품의 수명에 대한 모형으로서 Marshall과 Olkin(1967)은 이변량 지수분포를 제안하면서 그 분포의 여러가지 성질을 밝혔다.

완전한 자료가 관찰되는 경우, Arnold(1968)는 이 모수들에 대한 일치통계량을 계산하였고, Proschan과 Sullo(1976)는 모수들에 대한 최우추정량을 얻었다. 그리고 시스템의 신뢰도에 관한 추정문제는 Klein과 Basu(1985) 그리고 Hanagal(1996)에 의해서 연구되었다.

한편 두 부품에 대한 중단시간이 동일한 일변량 중단된 자료(univariate censored data)로 관찰되는 경우 Hanagal과 Kale(1992)은 모수들에 대한 최우추정량을 구하고 근사적 정규성을 밝혔다.

그러나 현실적으로, 부품들의 수명이 실험자의 의도에 의해서 또는 실험환경의 제약에 의해서 두 부품에 대한 중단시간이 다른 이변량 1종 중단된 자료(bivariate type 1 censored data)로 관찰되는 경우가 많이 발생한다. 예를 들어 두 부품의 수명이 동일한 분포를 갖지않는 경우 두 부품의 중단시간을 일변량 중단모형보다 이변량 중단모형으로 하는 것이 타당하다.

본 논문에서는 Marshall-Olkin의 이변량 지수모형을 따르는 두 부품이 병렬로 이루어진 시스템에서 두 부품의 수명이 이변량 1종 중단된 자료로 관찰되는 경우, 시스템의 신뢰도에 대한 최우추정량을 구하고 그 추정량의 근사적 정규성을 이용하여 근사적 신뢰구간을 구하였다.

2. 개요 및 기호

(X, Y)를 Marshall과 Olkin의 이변량 지수모형을 따르는 두 부품의 수명시간이라고 하면 두 부품의 결합 생존함수 $\overline{F}(x, y)$와 결합 확률밀도함수 $f(x, y)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}\overline{F}(x, y) &= P(X > x,\ Y > y),\quad x, y \geq 0 \\ &= \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 \max(x, y)\},\quad x, y \geq 0,\end{aligned} \tag{1}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)\cdot\exp(-\lambda_1 x-(\lambda_2+\lambda_3)y), & y > x \\ \lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)\cdot\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)x-\lambda_2 y), & x > y \\ \lambda_3\cdot\exp(-\lambda x), & x = y, \end{cases} \tag{2}$$

여기서 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$이다.

각각의 확률변수에 대한 조건부 생존함수들은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\overline{F}_{X\mid Y=y}(x)=P(X>x\mid Y=y)$$
$$=\begin{cases}\exp(-\lambda_1 x), & y>x\\ \lambda_2(\lambda_2+\lambda_3)^{-1}\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)x+\lambda_3 y), & x\geq y,\end{cases} \tag{3}$$

$$\overline{F}_{Y\mid X=x}(y)=P(Y>y\mid X=x)$$
$$=\begin{cases}\exp(-\lambda_2 y), & x>y\\ \lambda_1(\lambda_1+\lambda_3)^{-1}\exp(-(\lambda_2+\lambda_3)y+\lambda_3 x), & x\leq y.\end{cases} \tag{4}$$

여기서 두 부품으로 이루어진 시스템이 서로 병렬로 연결되어 있다고 할 때, 어떤 시각 t에서 시스템의 신뢰도 $R(t)$는 다음과 같이 주어진다.

$$R(t)=P[\max(X,Y)>t]$$
$$=\exp[-(\lambda_1+\lambda_3)t]+\exp[-(\lambda_2+\lambda_3)t]-\exp(-\lambda t). \tag{5}$$

한편 본 논문에서 사용되는 기호들을 소개하면 다음과 같다.

$t_{x_i},\ i=1,2,\cdots,n$: X에 대한 i번째 관찰치의 중단시간.

$t_{y_i},\ i=1,2,\cdots,n$: Y에 대한 i번째 관찰치의 중단시간.

$I(\cdot)$: 지시함수.

$G_{1i}=I(X_i>t_{x_i}),\ G^*_{1i}=1-G_{1i},\ i=1,2,\cdots,n.$

$G_{2i}=I(Y_i>t_{y_i}),\ G^*_{2i}=1-G_{2i},\ i=1,2,\cdots,n.$

$R_{1i}=I(X_i<Y_i),\ R^*_{1i}=1-R_{1i},\ i=1,2,\cdots,n.$

$R_{2i}=I(X_i>Y_i),\ R^*_{2i}=1-R_{2i},\ i=1,2,\cdots,n.$

$R_{3i}=I(X_i=Y_i),\ R^*_{3i}=1-R_{3i},\ i=1,2,\cdots,n.$

$\underline{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3).$

3. 신뢰도에 대한 최우추정량

이변량 1종 중단된 자료가 관찰되는 경우, 각각의 부품들에 대해서 다음과 같은 세 가지 경우가 발생할 수 있다.

(1) 두개의 부품들이 모두 관찰되는 경우($G_{1i}^{*}G_{2i}^{*}=1$).
(2) 하나의 부품만 관찰되고 다른 하나의 부품은 중단되는 경우($G_{1i}G_{2i}^{*}+G_{1i}^{*}G_{2i}=1$).
(3) 두개의 부품들이 모두 중단되는 경우($G_{1i}G_{2i}=1$).
부품들의 i번째 수명시간 (x_i, y_i)은 다음과 같이 관찰된다.

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_i, y_i), & x_i < t_{x_i}, \ y_i < t_{y_i} \\ (t_{x_i}, y_i), & x_i > t_{x_i}, \ y_i < t_{y_i} \\ (x_i, t_{y_i}), & x_i < t_{x_i}, \ y_i > t_{y_i} \\ (t_{x_i}, t_{y_i}), & x_i > t_{x_i}, \ y_i > t_{y_i}, \end{cases} \tag{6}$$

여기서 중단시간 t_{x_i}와 t_{y_i}, $i=1,2,\cdots,n$는 미리 정해진 값이며, 같은 값으로 하는 경우가 많다. 특히, $t_{x_i}=t_{y_i}$인 경우는 일변량 1종 중단모형이 된다.
따라서 우도함수는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} L(\lambda) = & \prod_{i=1}^{n} \{[f(x_i, y_i)]^{G_{1i}^{*}G_{2i}^{*}} \cdot [\overline{F}(x_i, y_i)]^{G_{1i}G_{2i}} \cdot \\ & [\overline{F}_{X|Y=y}(x_i) f_Y(y_i)]^{G_{1i}G_{2i}^{*}} \cdot [\overline{F}_{Y|X=x}(y_i) f_X(x_i)]^{G_{1i}^{*}G_{2i}}\}^{(R_{1i}+R_{2i}+R_{3i})} \\ & = \lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}\lambda_3^{n_3}(\lambda_1+\lambda_3)^{n_4}(\lambda_2+\lambda_3)^{n_5}\exp[-\lambda_1 x_s-\lambda_2 y_s-\lambda_3(x_s+y_s-t_s)]. \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $f_X(x)=(\lambda_1+\lambda_3)\cdot\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)x)$, $f_Y(y)=(\lambda_2+\lambda_3)\cdot\exp(-(\lambda_2+\lambda_3)y)$,
$n_1=\sum_{i=1}^{n}(R_{1i}G_{1i}^{*}G_{2i}^{*}+R_{2i}^{*}G_{1i}^{*}G_{2i})$, $n_2=\sum_{i=1}^{n}(R_{2i}G_{1i}^{*}G_{2i}^{*}+R_{1i}^{*}G_{1i}G_{2i}^{*})$, $n_3=\sum_{i=1}^{n}R_{3i}G_{1i}^{*}G_{2i}^{*}$,
$n_4=\sum_{i=1}^{n}R_{2i}G_{1i}^{*}$, $n_5=\sum_{i=1}^{n}R_{1i}G_{2i}^{*}$, $x_s=\sum_{i=1}^{n}x_i$, $y_s=\sum_{i=1}^{n}y_i$, $t_s=\sum_{i=1}^{n}\min(x_i, y_i)$.
그리고 $n_1, n_2, \cdots, n_5$는 확률변수이며, 이들의 기대값은 다음과 같이 계산되어 진다.
먼저 $E(n_1)=\sum_{i=1}^{n}E(R_{1i}G_{1i}^{*}G_{2i}^{*}+R_{2i}^{*}G_{1i}^{*}G_{2i})$이므로, 여기서

$$\begin{aligned} E(R_{1i}G_{1i}^{*}G_{2i}^{*}) &= P(0<X_i<t_{x_i},\ 0<Y_i<t_{y_i},\ X_i<Y_i) \\ &= \int_0^{t_x}\int_x^{t_y}\lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)\exp(-\lambda_1 x-(\lambda_2+\lambda_3)y)dydx \\ &= \lambda_1/\lambda-\lambda_1\exp(-\lambda t_{x_i})/\lambda+\exp(-\lambda t_{y_i})-\exp(-(\lambda_2+\lambda_3)t_{y_i}), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(R_{2i}^{*}G_{1i}^{*}G_{2i}) &= E(R_{1i}G_{1i}^{*}G_{2i}+R_{3i}G_{1i}^{*}G_{2i}) \\
&= P(X_i < t_{x_i},\ Y_i > t_{y_i},\ X_i < Y_i) + P(X_i < t_{x_i},\ Y_i > t_{y_i},\ X_i = Y_i) \\
&= \int_{t_y}^{\infty}\int_0^{t_x} \lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)\exp(-\lambda_1 x-(\lambda_2+\lambda_3)y)dxdy \cdot I(t_{x_i}< t_{y_i}) \\
&\quad + \int_{t_y}^{t_x} \lambda_3 \exp(-\lambda x)dx \cdot I(t_{y_i}< t_{x_i}) \\
&= (1-\exp(-\lambda_1 t_{x_i}))\cdot \exp(-(\lambda_2+\lambda_3)t_{y_i})\cdot I(t_{x_i}< t_{y_i}) \\
&\quad + \lambda_3(\exp(-\lambda t_{y_i})-\exp(-\lambda t_{x_i}))/\lambda \cdot I(t_{y_i}< t_{x_i})\}.
\end{aligned}
$$

따라서, $E(n_1)=\sum_{i=1}^{n}\{\lambda_1/\lambda-\lambda_1\exp(-\lambda t_{x_i})/\lambda+\exp(-\lambda t_{y_i})-\exp(-(\lambda_2+\lambda_3)t_{y_i})$

$$
\begin{aligned}
&+(1-\exp(-\lambda_1 t_{x_i}))\cdot \exp(-(\lambda_2+\lambda_3)t_{y_i})\cdot I(t_{x_i}< t_{y_i}) \\
&+\lambda_3(\exp(-\lambda t_{y_i})-\exp(-\lambda t_{x_i}))/\lambda \cdot I(t_{y_i}< t_{x_i})\}.
\end{aligned}
$$

같은 방법으로 계산을 한다면,

$$
\begin{aligned}
E(n_2) = \sum_{i=1}^{n}\{&\lambda_2/\lambda-\lambda_2\exp(-\lambda t_{y_i})/\lambda+\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)t_{x_i}-\lambda_2 t_{y_i})-\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)t_{x_i}) \\
&+(1-\exp(-\lambda_2 t_{y_i}))\cdot \exp(-(\lambda_1+\lambda_3)t_{x_i})\cdot I(t_{y_i}< t_{x_i}) \\
&+\lambda_3(\exp(-\lambda t_{x_i})-\exp(-\lambda t_{y_i})))/\lambda \cdot I(t_{x_i}< t_{y_i})\},
\end{aligned}
$$

$$
E(n_3) = \sum_{i=1}^{n}\{(\lambda_3-\lambda_3\exp(-\lambda \min(t_{x_i}, t_{y_i})))/\lambda\},
$$

$$
\begin{aligned}
E(n_4) = \sum_{i=1}^{n}\{&\lambda_2/\lambda-\lambda_2\exp(-\lambda t_{y_i})/\lambda+\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)t_{x_i}-\lambda_2 t_{y_i})-\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)t_{x_i}) \\
&+[\exp(-\lambda_2 t_{y_i})\cdot[1-\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)t_{x_i})] \\
&+(\lambda_1+\lambda_3)\cdot(\exp(-\lambda t_{x_i})-1)/\lambda]\cdot I(t_{x_i}> t_{y_i})\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(n_5) = \sum_{i=1}^{n}\{&\lambda_1/\lambda-\lambda_1\exp(-\lambda t_{x_i})/\lambda+\exp(-\lambda t_{y_i})-\exp(-(\lambda_2+\lambda_3)t_{y_i}) \\
&+\lambda_1\exp(-\lambda t_{x_i})/\lambda-\exp(-(\lambda_2+\lambda_3)t_{y_i}-\lambda_1 t_{x_i})\}.
\end{aligned}
$$

또한 로그-우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
\log L(\underline{\lambda}) = {} & n_1\log\lambda_1+n_2\log\lambda_2+n_3\log\lambda_3+n_4\log(\lambda_1+\lambda_3)+n_5\log(\lambda_2+\lambda_3) \\
&-\lambda_1 x_s-\lambda_2 y_s-\lambda_3(x_s+y_s-t_s).
\end{aligned} \tag{8}
$$

따라서 식 (8)의 로그-우도함수를 모수들에 대해서 일차 편미분한 우도방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \log L(\underline{\lambda}) = \frac{n_1}{\lambda_1} + \frac{n_4}{\lambda_1+\lambda_3} - x_s = 0. \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \log L(\underline{\lambda}) = \frac{n_2}{\lambda_2} + \frac{n_5}{\lambda_2+\lambda_3} - y_s = 0. \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_3} \log L(\underline{\lambda}) = \frac{n_3}{\lambda_3} + \frac{n_4}{\lambda_1+\lambda_3} + \frac{n_5}{\lambda_2+\lambda_3} - (x_s + y_s - t_s) = 0. \tag{11}$$

모수 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$에 대한 최우추정량($\widehat{\lambda_1}, \widehat{\lambda_2}, \widehat{\lambda_3}$)은 위의 우도방정식 (9)-(11)을 뉴턴-랍슨과 같은 반복적 방법에 의해 얻을 수 있다.
따라서 $\sqrt{n}\ (\underline{\hat{\lambda}} - \underline{\lambda})$의 분포는 표본의 크기가 증가하면서 근사적으로 평균벡터가 영이고 분산-공분산행렬이 $I^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$인 다변량 정규분포를 따름을 알 수 있다 (Lehmann(1983), 6장 참조). 즉,

$$\sqrt{n}\left((\widehat{\lambda_1}, \widehat{\lambda_2}, \widehat{\lambda_3})^T - (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T \right) \rightarrow N(\underline{0}, I^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)), \tag{12}$$

여기서 →는 분포수렴을 의미한다. 그리고 $I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = ((I_{ij}))$, 여기서
$I_{ij} = E\left[-\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i \partial\lambda_j} \log L(\underline{\lambda}) \right]$; $i, j = 1, 2, 3$이며,

$$I_{11} = E(n_1)/\lambda_1^2 + E(n_4)/(\lambda_1+\lambda_3)^2,\ \ I_{12} = 0,\ \ I_{13} = E(n_4)/(\lambda_1+\lambda_3)^2,$$

$$I_{22} = E(n_2)/\lambda_2^2 + E(n_5)/(\lambda_2+\lambda_3)^2,\ I_{23} = E(n_5)/(\lambda_2+\lambda_3)^2,$$

$$I_{33} = E(n_3)/\lambda_3^2 + E(n_4)/(\lambda_1+\lambda_3)^2 + E(n_5)/(\lambda_2+\lambda_3)^2.$$

따라서 최우추정량의 불변성(invariance property)에 의해 어떤 시각 t에서 시스템의 신뢰도에 대한 최우추정량 $\widehat{R}(t)$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$\widehat{R}(t) = \exp[-(\widehat{\lambda_1} + \widehat{\lambda_3})t] + \exp[-(\widehat{\lambda_2} + \widehat{\lambda_3})t] - \exp(-\hat{\lambda} t), \tag{13}$$

여기서 $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3$.

한편 식 (12)와 Delta 방법을 이용한다면, $\sqrt{n}(\hat{R}(t) - R(t))$의 분포는 n이 증가하면서 다음과 같은 근사적 정규분포를 따름을 알 수 있다(Lehmann(1983), 5장 참조). 즉,

$$\sqrt{n}(\hat{R}(t) - R(t)) \rightarrow N(0, \Sigma), \tag{14}$$

여기서

$$\Sigma = \left(\frac{\partial R(t)}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial R(t)}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial R(t)}{\partial \lambda_3}\right) \cdot I^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \cdot \left(\frac{\partial R(t)}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial R(t)}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial R(t)}{\partial \lambda_3}\right)^T,$$

$$\frac{\partial R(t)}{\partial \lambda_1} = -t \cdot \exp[-(\lambda_1 + \lambda_3)t] + t \cdot \exp[-\lambda t],$$

$$\frac{\partial R(t)}{\partial \lambda_2} = -t \cdot \exp[-(\lambda_2 + \lambda_3)t] + t \cdot \exp[-\lambda t],$$

$$\frac{\partial R(t)}{\partial \lambda_3} = -t \cdot \exp[-(\lambda_1 + \lambda_3)t] - t \cdot \exp[-(\lambda_2 + \lambda_3)t] + t \cdot \exp[-\lambda t].$$

따라서 시스템의 신뢰도 $R(t)$에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 근사적 신뢰구간은 다음과 같이 구성 할 수 있다.

$$\left(\hat{R}(t) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{\Sigma}/n}\ ,\ \ \hat{R}(t) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{\Sigma}/n}\right), \tag{15}$$

여기서 $\hat{\Sigma} = \Sigma \mid_{\lambda = \hat{\lambda}}$ 이며 $z_{\alpha/2}$는 표준정규분포의 오른쪽 꼬리면적이 $\alpha/2$가 되는 값이다.

4. 예제

이 장에서는 3장에서 구성한 시스템의 신뢰도에 대한 최우추정량과 근사적 신뢰구간을 예제를 통해서 구하고자 한다. 우선 Marshall-Olkin의 이변량 지수분포의 난수는 Friday와 Patil(1977)이 제안한 방법으로 30개를 생성하였으며, 여기에서 사용한 모수는 $\lambda_1 = 0.08, \lambda_2 = 0.2, \lambda_3 = 0.03$이다. 그리고 이변량 1종 중단시간은 모든 i에 대해서 $t_{x_i} = 16.5$, $t_{y_i} = 9.5$로 같은 값을 사용하였으며, 자료는 <표 1>과 같이 (x_i, y_i)의 모양으로 주어진다. 여기서 * 표시는 중단된 자료를 의미한다. 그리고 시스템 신뢰도에서 시각 t의 값은 0.5로 하였다. 그러면 시스템 신뢰도의 참값은 $R(t) = 0.90431$

이 된다. 위의 자료에서 $n_1=6, n_2=20, n_3=2, n_4=17, n_5=6$이며, 모수의 최우추정치는 $\hat{\lambda}_1=0.0762$, $\hat{\lambda}_2=0.2020$, $\hat{\lambda}_3=0.0296$이다. 그리고 시스템 신뢰도에 대한 최우추정치는 $\hat{R}(t)=0.90344$이고 $\hat{\Sigma}=0.00005558$이다. 따라서 시스템의 신뢰도에 대한 95% 신뢰구간은 식 (15)에 의해서 (0.90077, 0.90611)로 계산될 수있다.

< 표 1 > 이변량 중단시간이 t_{x_i}=16.5와 t_{y_i}=9.50인 경우의 표본

i	(x_i, y_i)	i	(x_i, y_i)
1	(1.657, 6.948)	16	(3.042, 5.963)
2	(10.126, 2.119)	17	(7.276, 0.675)
3	(4.462, 4.462)	18	(2.227, 1.824)
4	(11.499, 8.400)	19	(10.665, 0.354)
5	(16.50*, 5.172)	20	(3.222, 3.222)
6	(3.786, 0.572)	21	(13.598, 3.827)
7	(2.324, 2.020)	22	(16.50*, 4.552)
8	(3.009, 6.467)	23	(7.645, 5.204)
9	(8.518, 1.368)	24	(3.885, 3.374)
10	(2.014, 1.794)	25	(1.550, 1.728)
11	(4.233, 4.786)	26	(16.50*, 9.50*)
12	(16.50*, 9.50*)	27	(13.931, 7.581)
13	(16.50*, 1.160)	28	(3.469, 1.202)
14	(14.472, 5.726)	29	(8.914, 8.142)
15	(10.825, 4.440)	30	(0.497, 2.850)

참고문헌

[1] Arnold, B.C.(1968), Parameter Estimation for a Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 62, 848-852.

[2] Bhattacharyya, G.K. and Johnson, R.A.(1974), Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength model, *Journal of the American Statistical Association*, 69, 966-970.

[3] Ebrahimi, N.(1982), Estimation of Reliability for a Series Stress-Strength System, *IEEE Transactions on Reliability*, R-31, 202-205.

[4] Friday, D.S. and Patil, G.P.(1977), A Bivariate Exponential Model with Applications to Reliability and Computer Generation of Random Variables, *The Theory and Applications of Reliability*, ed. Tsokos, C.P. and Shimi, I.N., Academic, 527-549.

[5] Hanagal, D.D. and Kale, B.K.(1992), Some Inference Results in Bivariate Exponential Distributions Based on Censored Samples, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 21(5), 1273-1295.

[6] Hanagal, D.D.(1996), Estimation of System Reliability from Stress-Strength Relationship, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 25(8), 1783-1797.

[7] Johnson, R.A.(1988), Stress-Strength Models for Reliability, *Handbook of Statistics, 7, Quality Control and Reliability, 27-54.*

[8] Klein, J.P. and Basu, A.P.(1985), Estimating Reliability for Bivariate Exponential Distributions, *Sankhya : The Indian Journal of Statistics, Series B*, 47, 346-353.

[9] Lehmann, E.L.(1983), *Theory of Point Estimation*, John Wiley and Sons. New York.

[10] Marshall, A.W. and Olkin, I.(1967), A Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 62, 30-44.

[11] Proschan, F. and Sullo, P.(1976), Estimating the Parameters of a Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 71, 465-472.