응용통계연구 제10권 2호
1997년 9월 pp. 309-323

EM알고리즘을 이용한 중도절단화상에 대한 복원

김 승 구[1)]

요 약

사진과 같은 영상매체를 통한 화상들은 대부분 중도절단과정을 거친 자료임에도 불구하고 정상자료로 취급하여 복원하는 경우가 많다. 이때 편의를 갖는 복원화상을 얻게 된다. 그러나 화상복원 분야에서는 이에 대한 인식을 거의 발견할 수 없다. 이에 본 논문에서는 「가우시안」잡음에 의해 오염된 중도절단화상에 대해 EM알고리즘에 의한 복원방법을 소개한다. 그리고 실험을 통해 중도절단된 모의화상에 대해 복원효과를 보인다.

1. 서 론

1.1 기본 개념

공간적 이동불변(spatially shift invariant)인 선형점확산함수(PSF, point spread function)와 「가우시안」 잡음에 의해 오염된 디지탈화상 Y는 일반적으로

$$\begin{aligned} Y(i,j) &= \Theta(i,j)*\phi(i,j)+E(i,j) \\ &= \sum_{i'}^{N}\sum_{j'}^{M}\Theta(i',j')\phi(i-i',j-j')+E(i,j) \\ &\quad ,\ i=1,\cdots,N+r-1\ ;j=1,\cdots,M+s-1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

의 선형모형으로 가정한다. 단, '*'는 중첩(convolution)연산자를 나타내며, 명암화상인 Θ는 $N\times M$ 진화상행렬 , ϕ는 $r\times s$ PSF행렬 그리고 E는 $(N+r-1)\times(M+s-1)$ 「가우시안」 잡음행렬을 나타낸다. 그런데 식 (1.1)을 통계학자에게 익숙한 일반화 선형회귀모형식으로 표현하면

$$y_i = \sum_{j\in B_i} h_{ij}\theta_j + \varepsilon_i \quad ,\ i=1,\cdots,n \tag{1.1$'$}$$

과 같다. 여기서 $P=NM$, $n=(N+r-1)(M+s-1)$라 할 때, $\theta=\{\theta_j\}$는 $P\times 1$ 진화상벡터, $H=\{h_{ij}\}$는 ϕ에 대응하는 $n\times P$ 퍼짐행렬(blurring matrix)을 나타낸다. 그리고 부분집합 B_i는 점확산함수에 의해 y_i에 영향을 미치는 화소들의 집합을 나타내며 원소수를 $p(<P)$라

1) (220-702) 강원도 원주시 우산동 상지대학교 응용통계학과 조교수

하자. 그리고 $\{\epsilon_i\}$는 독립적으로 $N(0, \sigma^2)$ 분포함을 가정한다. 여기서 $y=\{y_i\}$를 직접관측된 불완전화상이라 하고, θ에 대하여 조건부독립을 가정한다. 한편, 가상의 변량 $x=\{x_{ij}\}$를 직접 관측이 불가능한 완전화상으로 다룬다. 단, 완전화상 x_{ij}는 $y_i= \sum_{j\in B_i} x_{ij}$를 통해 간접관측되며, 결국 독립적으로 $x_{ij}\sim N(h_{ij}\theta_j, \sigma^2/p)$ 이다.

이때, 우리의 목적은 최대사후밀도 추정치(maixmum *a poteriori*) $\hat{\theta}$를 구하는 것이다. x에 대한 θ의 사후밀도는 y가 x만의 함수이므로

$$
\begin{aligned}
p_o(\theta\,|x) &\propto f_1(x\,|\theta)p(\theta)\\
&= f_2(y\,|\theta)f_{1|2}(x\,|y,\theta)p(\theta)
\end{aligned}
$$

으로 주어진다. θ의 사전밀도는 $p(\theta)\propto \exp\{-\lambda J(\theta)\}$과 같은 형태의 「깁스」분포로 주어지게 되는데, 이때 λ는 상수이며 함수 $J(\theta)$는 일반적으로 화상의 국소적 특성을 설명하는 불균일도(roughness) 「페널티」함수를 나타낸다. 본 논문에서는

$$J(\theta)= \sum_{j\sim k}(\theta_j-\theta_k)^2(1-\zeta_{jk}), \quad k\in\partial j \tag{1.2}$$

으로 정의한다. 여기서 $j\sim k$는 화소 j에 대한 쌍별-근린(pairwise-nearest neighbors)을 나타내며, $\zeta_{jk}(\in[0,1])$는 $\zeta_{jk}=\zeta_{kj}$를 만족하며, 두 화소 j, k 사이의 「에지」-강도(edge-strength)를 나타내는 모수이다. 그리고 3장의 화상실험에서는 화소 j의 근방 ∂j에 대해 2차 근방계가 사용되었다. 즉, 내부화소(inner pixel)에 대해서는 상하좌우 및 대각의 8개 화소, 경계에 접한 화소에 대해서는 6개 화소 그리고 화상의 4군데 구석에 위치한 화소에 대해서는 3개의 화소가 ∂j의 원소이다. EM알고리즘은 E-단계에서 주어진 (y, θ^{old})에 대한 완전자료의 조건부기대치

$$\hat{x}_{ij}\equiv E(x_{ij}|y,\theta^{old})=h_{ij}\theta_j^{old}+p^{-1}(y_i-\sum_{k\in B_i}h_{ik}\theta_k^{old}) \tag{1.3}$$

을 구한 후, M-단계에서

$$
\begin{aligned}
Q(\theta\,|\theta^{old}) &= E[\log\{f_1(x\,|\theta)p(\theta)\}|y,\theta^{old})]\\
&\propto E\left\{-\frac{p}{2\sigma^2}\sum_i^n\sum_{j\in B_i}(x_{ij}-h_{ij}\theta_j)^2-\lambda J(\theta)|y,\theta^{old}\right\}
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

을 최대화하는 과정을 복원화상 θ^{new}이 수렴할 때까지 반복하게 된다. 이 과정은 결국 $\hat{\theta}$에 수렴하게 된다(Green, P.J (1990)). 그런데 $\partial Q(\theta\,|\theta^{old})/\partial\theta=0$ 을 푼 후 식 (1.3)을 대입하면

$$\theta_j^{new}=\frac{a_j\theta_j^{old}+\sum_i^n h_{ij}\left(y_i-\sum_{k\in B_i}h_{ik}\theta_k^{old}\right)+2\lambda\sigma^2 w_j\,\bar{\theta}_{\partial j}}{a_j+2\lambda\sigma^2 w_j}, \quad j=1,\cdots,P \tag{1.5}$$

와 같이 θ^{new}에 대한 구체적인 반복식을 얻을 수 있다. 단, $a_j = p\sum_i^n h_{ij}^2$, $w_j = \sum_{k\in\partial j}(1-\zeta_{jk})$ 그리고 $\bar{\theta}_{\partial j} = \sum_{k\in\partial j}\theta_k^{old}(1-\zeta_{jk})/w_j$을 나타낸다.

1.2 중도절단화상

사진이나 필름 등과 같은 광화학적 영상매체들은 물리적 특성상 관측화상 y가 한계값 L_1, L_2에 대해

$$y_i^c = \begin{cases} L_1, & y_i \le L_1 \\ y_i, & L_1 < y_i < L_2, \quad i = 1, \cdots, n \\ L_2, & y_i \ge L_2 \end{cases} \tag{1.6}$$

과 같이 중도절단되어 기록된다. 이때 화상 y^c를 중도절단화상이라 정의한다. 예를들어, 명암도화상에 대해 검정색($L_1=0$)이하와 백색($L_2=1$) 이상의 명암값은 중도절단된다. 그럼에도 불구하고 중도절단화상을 그대로 정규이론에 적용하여 복원하는 경우 복원화상 $\hat{\theta}$은 편의를 갖게되며, 화소수가 큰 화상에 대해서도 θ의 일치추정량이 되지 못한다는 사실은 통계학에서 잘 알려져 있다.

논의를 위해 잠시 사전밀도는 모수에 대해 균등하다 하자. 이때 이 모형은 계량경제학에서 소위 「토빗」 모형으로 알려진 양측중도절단 회귀모형에 적용되는 문제이다(G.S.Maddala, 1983). 이 문제의 EM알고리즘 해법은 M.A.Tanner(1996)에서 볼 수 있다. 여기서는 비록 단측중도절단 문제에 대해서만 다루고 있기는 하지만 양측중도절단 문제로 쉽게 확장할 수 있다.이 해법은 본 논문과는 다르게 $\{y_i ; L_1 < y_i < L_2\}$를 불완전자료, $\{y_i ;\ y_i \le L_1,\ y_i \ge L_2\}$를 결측자료 그리고 y^c를 완전자료로 각각 정의하고 있다. 이 방법을 요약하면, EM알고리즘의 각 단계에서 y^c의 자료 중 L_1, L_2을 각각 $E(y_i \mid y_i < L_1, \theta^{old})$과 $E(y_i \mid y_i > L_2, \theta^{old})$로 치환한 자료 y^r을 사용하여, $\log f_2(y^r \mid \theta)$을 최대화하는 해를 구하는 방법이라 할 수 있다. 결국 이 방법은 주어진 σ^2의 추정치에 대해 $\theta^{new} = (H'H)^{-1}H'y^r$을 계산해야하는 알고리즘을 구성하게 된다. 그런데 이 방법은 화상복원에는 적절치 않다. 왜냐하면 행렬 $H'H$의 크기는 N^2M^2이므로 아주 작은 화상에 대해서도 $H'H$에 대한 역행렬의 계산은 현실적으로 거의 불가능하며, 또한 자주 비일치적-상태(ill-condition)를 갖기 때문이다. 화상복원 문제에서 역행렬계산을 피하기 위해서는 완전 및 불완전자료에 대한 정의를 본 논문의 앞 절에서와 같이 하여야만 식 (1.5)와 같은 화소별 복원 알고리즘을 얻을 수 있다.

본 논문의 다음 장에서는 「가우시안」 잡음이 포함된 중도절단 화상에 대한 복원 알고리즘을 제공하고 모수추정문제에 관한 문제를 다루며, 3장에서는 모의화상을 이용한 실험을 통해 중도절단화상의 복원효과를 검사한다. 마지막으로 4장에서는 추가로 연구되어야할 점들을 결론과 함께 논의하였으며, 본문에서의 자세한 수식전개는 부록에 수록하였다.

2. 중도절단화상에 대한 복원

2.1 EM알고리즘 해법

중도절단 화상 y^c에 대한 완전화상의 조건부 기대값은 $y_i^c = L_1$ 에 대해

$$\begin{aligned}\hat{x}_{ij}(L_1) &\equiv E(x_{ij} \mid y_i < L_1, \theta^{old}) \\ &= h_{ij}\theta_j^{old} + p^{-1}\left(-\sigma\frac{\phi_{i1}}{\Phi_{i1}}\right)\end{aligned} \tag{2.1}$$

이며, $y_i^c = L_2$에 대해

$$\begin{aligned}\hat{x}_{ij}(L_2) &\equiv E(x_{ij} \mid y_i > L_2, \theta^{old}) \\ &= h_{ij}\,\theta_j^{old} + p^{-1}\left(-\sigma\frac{\phi_{i2}}{1-\Phi_{i2}}\right)\end{aligned} \tag{2.2}$$

이다(부록 참조). 여기서 Φ_{id}과 ϕ_{id} ,$(d=1,2)$는 각각 $(L_d - \sum_{k\in B_i} h_{ik}\theta_k)/\sigma$에서 계산된 표준화 정규누적분포함수와 표준화 정규밀도함수값을 나타낸다. 그리고 $S_1 = \{i \mid y_i < L_1\}$, $S_2 = \{i \mid y_i > L_2\}$라 하고 S_0를 $S_1 \cup S_2$의 배반집합이라 할 때,

$$\sum_i^n E(x_{ij} \mid y^c, \theta^{old}) = \sum_{i\in S_0} E(x_{ij} \mid y_i, \theta^{old}) + \sum_{i\in S_1} \hat{x}_{ij}(L_1) + \sum_{i\in S_2} \hat{x}_{ij}(L_2) \tag{2.3}$$

이다. 한편

$$\frac{\partial Q(\theta \mid \theta^{old})}{\partial \theta_j} = p\sum_i^n h_{ij}E(x_{ij} \mid y^c, \theta^{old}) - p\sum_i^n h_{ij}^2\theta_j - \lambda\sigma^2\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_j} \quad , \ j=1,\cdots,P \tag{2.4}$$

이다. 따라서 방정식 $\partial Q(\theta \mid \theta^{old})/\partial\theta = 0$에 식 (2.3)를 식 (2.4)에 대입한 후 풀면

$$\begin{aligned}\theta_j^{new} = \frac{1}{a_j + 2\lambda\sigma^2 w_j}\Bigg\{& a_j\theta_j^{old} + \sum_{i\in S_0} h_{ij}\Big(y_i - \sum_{k\in B_i} h_{ik}\theta_k^{old}\Big) + \sum_{i\in S_1} h_{ij}\left(-\sigma\frac{\phi_{i1}}{\Phi_{i1}}\right) + \\ & \sum_{i\in S_1} h_{ij}\left(\sigma\frac{\phi_{i2}}{1-\Phi_{i2}}\right) - 2\lambda\sigma^2 w_j\,\bar{\theta}_{\partial j}\Bigg\} \quad , \ j=1,\cdots,P\end{aligned} \tag{2.5}$$

과 같다. 또한

$$-\sigma\phi_{i1}/\Phi_{i1} = E(y_i \mid y_i < L_1, \theta^{old}) - \sum_{k\in B_i} h_{ik}\theta_k^{old}$$

및 $$\sigma\phi_{i2}/(1-\Phi_{i2}) = E(y_i \mid y_i > L_2, \theta^{old}) - \sum_{k\in B_i} h_{ik}\theta_k^{old}$$

이므로, 이 들을 식 (2.5)에 대입하면,

$$\theta_j^{new} = \frac{1}{a_j+2\lambda\sigma^2 w_j}\Big\{a_j\theta_j^{old} + \sum_{i\in S_0} h_{ij}\Big(y_i - \sum_{k\in B_i} h_{ik}\theta_k^{old}\Big) + \sum_{i\in S_1} h_{ij}\Big[E(y_i|y_i< L_1,\theta^{old})$$

$$- \sum_{k\in B_i} h_{ik}\theta_k^{old}\Big] + \sum_{i\in S_1} h_{ij}\Big[E(y_i|y_i> L_2,\theta^{old}) - \sum_{k\in B_i} h_{ik}\theta_k^{old}\Big] - 2\lambda\sigma^2 w_j\,\bar{\theta}_{\partial j}\Big\}$$

이 된다. y^c의 L_1, L_2 대신 각각 $E(y_i\ |y_i< L_1,\theta^{old})$과 $E(y_i\ |y_i> L_2,\theta^{old})$으로 치환한 자료를 y^R라 정의하면, 결국 식 (2.5)는

$$\theta_j^{new} = \frac{a_j\theta_j^{old} + \sum_i^n h_{ij}\Big(y_i^R - \sum_{k\in B_i} h_{ik}\theta_k^{old}\Big) + 2\lambda\sigma^2 w_j\,\bar{\theta}_{\partial j}}{a_j+2\lambda\sigma^2 w_j}\quad,\quad j=1,\cdots,P \tag{2.6}$$

임을 뜻한다. 이 반복식은 식 (1.5)와 비슷한 형태를 나타내고 있다.

그리고 앞으로 이 반복식에 의한 복원을 CEM(Censorized EM)복원이라 하고 1장의 식 (1.5)에 의한 복원을 NCEM(Non-Censorized EM)복원이라 부르기로 하겠다.

2.2 분산에 대한 추정

그리고 많은 문헌에서 흔히 σ^2을 θ와 분리해서 추정하는데 본 논문에서는 동시추정한 결과를 제공한다.

먼저 M-단계에서 정상자료 y에 대한 분산추정치를 유도하도록 한다.
σ^2을 포함하지 않은 항을 제외한 $Q(\sigma^2\ |\sigma^{2old}, y)$은

$$Q(\sigma^2\ |\sigma^{2old}, y) = -\frac{np}{2}\log\sigma^2 - \frac{p}{2\sigma^2}\sum_i^n\sum_{j\in B_i} E\{(x_{ij}-h_{ij}\theta_j)^2|y_i,\sigma^{2old}\} \tag{2.7}$$

으로 얻어진다. 그런데

$$E\{(x_{ij}-h_{ij}\theta_j)^2|y_i,\sigma^{2old}\} = \Big(\frac{\sigma^{2old}}{p}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big) + p^{-2}(y_i - \sum_{j\in B_i} h_{ij}\theta_j)^2 \tag{2.8}$$

을 식 (2.7)에 대입하면, 방정식 $\partial Q/\partial\sigma^2 = 0$ 으로부터

$$\sigma^{2new} = \Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sigma^{2old} + \Big(\frac{1}{p}\Big)\tilde{\sigma}^2 \tag{2.9}$$

단,

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_i^n (y_i - \sum_{j\in B_i} h_{ij}\theta_j)^2$$

을 구할 수 있다.

한편, 중도절단자료에 대해서는

$$E\{(x_{ij}-h_{ij}\theta_j)^2|y_i<L_1,\sigma^{2old}\}=\left(\frac{\sigma^{2old}}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)+p^{-2}\sigma^{2old}\left(1-\frac{\phi_{i1}}{\Phi_{i1}}L^*_{i1}\right) \quad (2.10)$$

및

$$E\{(x_{ij}-h_{ij}\theta_j)^2|y_i>L_2,\sigma^{2old}\}=\left(\frac{\sigma^{2old}}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)+p^{-2}\sigma^{2old}\left(1+\frac{\phi_{i2}}{1-\Phi_{i2}}L^*_{i2}\right) \quad (2.11)$$

을 얻는다(부록 참조). 여기서 $L^*_{id}=(L_d-\sum_{j\in B_i}h_{ij}\theta_j)/\sigma^{old}$, $i=1,\cdots,n\,;d=1,2$ 을 나타낸다. 그리고 $Q(\sigma^2\ |\sigma^{2old},y^c)$에 식 (2.10)과 식 (2.11)을 대입한 후 $\partial Q/\partial\sigma^2=0$ 을 정리하면

$$\sigma^{2new}=\left(1-\frac{1}{p}\right)\sigma^{2old}+\left(\frac{1}{p}\right)\left(\sigma_0^{2old}+\sigma_1^{2old}+\sigma_2^{2old}\right) \quad (2.12)$$

과 같다. 여기서

$$\sigma_0^{2old}=\sum_{i\in S_0}(y_i-\sum_{j\in B_i}h_{ij}\theta_j)^2/n\ ,$$

$$\sigma_1^{2old}=\frac{\sigma^{2old}}{n}\sum_{i\in S_1}\left(1-L^*_{i1}\frac{\phi_{i1}}{\Phi_{i1}}\right) \quad (2.13)$$

및

$$\sigma_2^{2old}=\frac{\sigma^{2old}}{n}\sum_{i\in S_2}\left(1+L^*_{i2}\frac{\phi_{i2}}{1-\Phi_{i2}}\right)$$

을 나타낸다.

2.3 사전밀도의 모수에 대한 추정

반복식 (2.6)을 수행하기 위해서는 사전밀도의 모수 λ 및 $\{\zeta_{jk}\}$ 등에 대한 추정이 이루어져야 한다. 여기서는 Abdalla et. al(1990)에서 소개된 방법을 토대로 대부분 그대로 사용하되, 「에지」-추출은 보편적으로 많이 사용되는 이른바 나침반기법(compass operator)을 이용하였다.

2.3.1 평활상수 λ

θ의 사전밀도 $p(\theta|\lambda,\zeta)$가 1장에서와 같이 정의될 때 $\{\theta_j|\theta^{old}_{\partial j}\}$들은 서로 독립임을 가정하면 λ^{-1}에 대한 Besag, J. E.(1986)의 의사최우추정량(pseudo mle)을 다음과 같이 얻을 수 있다. 즉,

$$\lambda^{-1}=\text{Argmax}\left\{\prod_j^P p(\theta_j|\theta^{old}_{\partial j})\right\}=2\sum_j^P w_j(\theta_j-\overline{\theta}_{\partial j})^2/P\ . \quad (2.14)$$

이때, λ의 추정치로 $1/\lambda^{-1}$을 사용한다.

2.3.2 「에지」-강도 ζ_{jk}

먼저 m개의 「마스크」 π_i 에 대해

$$\delta_j = \max_i \{ | \Theta(r,s) * \pi_i(r,s) | \} \ , \quad i=1,\cdots,m; \quad j=1,\cdots,P \tag{2.15}$$

을 「에지」-추출(edge-extraction)을 위해 계산한다(참조 A.K.Jain, 1989). 여기서, (r,s)는 화소 j에 대응하는 2차원 좌표를 나타낸다. 이때, 본 연구에서는 두 화소 j, k 사이의 「에지」-강도의 선평가치(pre-evaluates)로서

$$\delta_{jk} = \frac{1}{2}(\delta_j + \delta_k) \ , \quad k \in \partial j \tag{2.16}$$

를 정의하여 사용하도록 한다. 이 정의의 의도는 각 화소에서의 「에지」 특성을 잃지 않고 $\delta_{jk} = \delta_{kj}$ (결국 $\zeta_{jk} = \zeta_{kj}$)을 만족케하기 위함이다. 그 다음 $\delta_{jk} \in [0,1]$이 되도록 척도화하는 과정을 필요로 하는데, Abdalla et. al(1990)에서와 같이 $\{\delta_{jk}\}$의 경험분포의 α_1, α_2-백분위수 (단, $\alpha_1 < \alpha_2$)에 p_1, p_2대해,

$$\hat{\zeta}_{jk} = \zeta(\delta_{jk}) = \begin{cases} 0 \ , & \delta_{jk} < p_1 \\ (\delta_{jk} - p_1)/(p_2 - p_1) \ , & p_1 \le \delta < p_2 \\ 1 \ , & \delta_{jk} \ge p_2 \end{cases} \tag{2.17}$$

를 이용하여 「에지」-강도 ζ_{jk}를 추정하기로 한다. 그들은 실험을 통해 복원화상은 p_1에 의해 거의 영향을 받지않는 반면, p_2에는 매우 민감하게 변화함을 보였다. 따라서 α_1=0.1 정도로 고정하고, α_2를 조율상수(tuning constant)로 사용할 것을 제안하였다.

사실상 EM알고리즘의 각 단계에서 δ_{jk}의 확률분포를 파악한다는 것은 거의 불가능하므로, 잡음제거와 「에지」-추출을 위한 확률적 기준을 설정한다는 것은 현실적으로 매우 어렵다. 따라서 경험분포에 의한 「에지」-강도 ζ_{jk}에 대한 비모수적 추정방법은 매우 설득력이 있다 하겠다.

3. 모의화상실험

3.1 복원 알고리즘

중도절단 기준값 L_1, L_2 , 점확산함수 ψ 및 조율상수 $p_2(, p_1 \approx 0.1)$가 준비되었다면 CEM화상복원을 위해 다음 알고리즘을 수행한다.

[0 단계] 초기화상 $\theta^{(0)}$, 모수의 초기치 $\sigma^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$를 결정한다.

[1 단계] 중도절단화상 y^c를 y^R로 교체한다.

[2 단계] 식 (2.6)을 이용하여 θ^{new}를 구한다.

[3 단계] 식 (2.12), 식 (2.14) 및 식 (2.15)에 의해 각각 σ^{2new}, λ^{new} 및 $\{\zeta_{ik}^{new}\}$를 추정한다.

[4 단계] θ^{new}이 수렴할 까지 [1 단계]~[3 단계]를 반복한다.

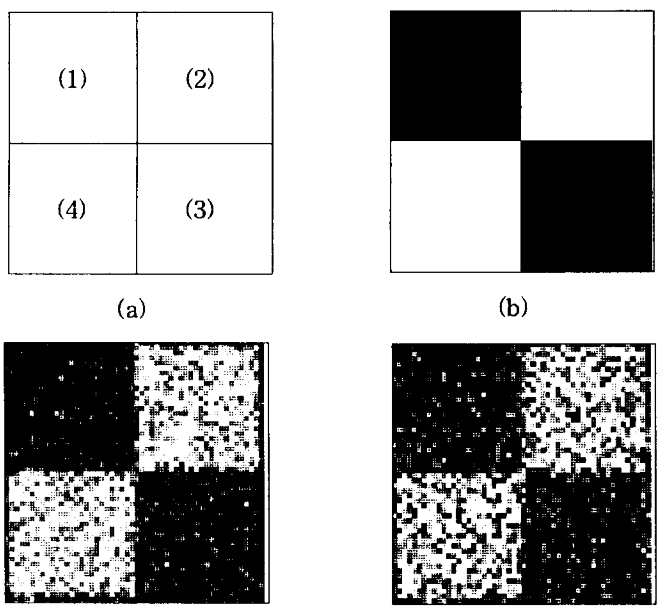
알고리즘 상으로 볼 때, 결국 NCEM복원과 다른점은 단순히 [단계 1]이 더 포함된다는 정도에 불과하다. 따라서 기존의 복원 프로그램 상에 큰 변화를 요구하지 않는다.

3.2 화상실험

실험에 사용할 화상은 50 ×50 크기의 명암도가 0과 1로 구성되어 있는 단순화상으로서 4개의 면으로 구성되어 있다. 그리고 (그림 1)의 (a)에서와 같이 (1) ~ (4)면으로 부르도록 하겠다. (b)는 진화상으로서, 각각 (1)과 (3)면은 명암도가 0 그리고 (2)과 (4)면은 명암도가 1로 하여 작은 분산을 갖는 잡음에 대해서도 중도절단자료가 발생토록 하였다. 한편 본 실험에서는 점확산함수로서

$$\phi = \begin{pmatrix} 0.045 & 0.122 & 0.045 \\ 0.122 & 0.330 & 0.122 \\ 0.045 & 0.122 & 0.045 \end{pmatrix}$$

를, 그리고 「에지」-추출을 위한 「마스크」는



(a) (b)

(c) (d)

(그림 1) (a) 각 면의 번호, (b) 진화상, (c) blur+N(0,0.1)화상, (d) blur+N(0,0.2)화상

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ 및 } \pi_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

를 사용하였다.

(그림 1)의 (c)과 (d)은 ϕ에 의해 점확산된 화상에 평균 0이고 분산이 각각 0.1과 0.2의 정규분포난수로 오염시킨 중도절단화상이다. 그리고 이 두 오염된 화상을 CEM 및 NCEM에 의해 복원한 화상이 각각 (그림 2)와 (그림 3)에 나타나 있다.
이 결과는 두 기법 모두 α_1는 0.1, α_2는 약 0.85 부근에서 최적의 복원화상이 얻게됨을 보여주고 있다. α_2<약 0.85 일때는 잡음제거가 충분히 이루어지지 않고, 반대로 α_2>약 0.85 인 경우는 지나친 평활에 의해 「에지」-보존에 실패하는 것으로 나타났다. 그런데 예상대로 NCEM은 진화상으로부터 편의를 갖는 복원화상을 제공한다는 것을 육안으로도 쉽게 판별할 수 있다. 더욱이 잡음의 분산이 커질수록 편의가 큰 복원화상을 얻게된다. 이때 복원값은 양 극단치의 중간값 $(L_1+L_2)/2$ (여기서는 0.5)의 방향으로 편의를 갖게 될 것이다. 이 결과를 α_1=0.1, α_2=0.85인 경우에 대해 <표 1>과 <표 2>에 수치적으로 정리하였다.

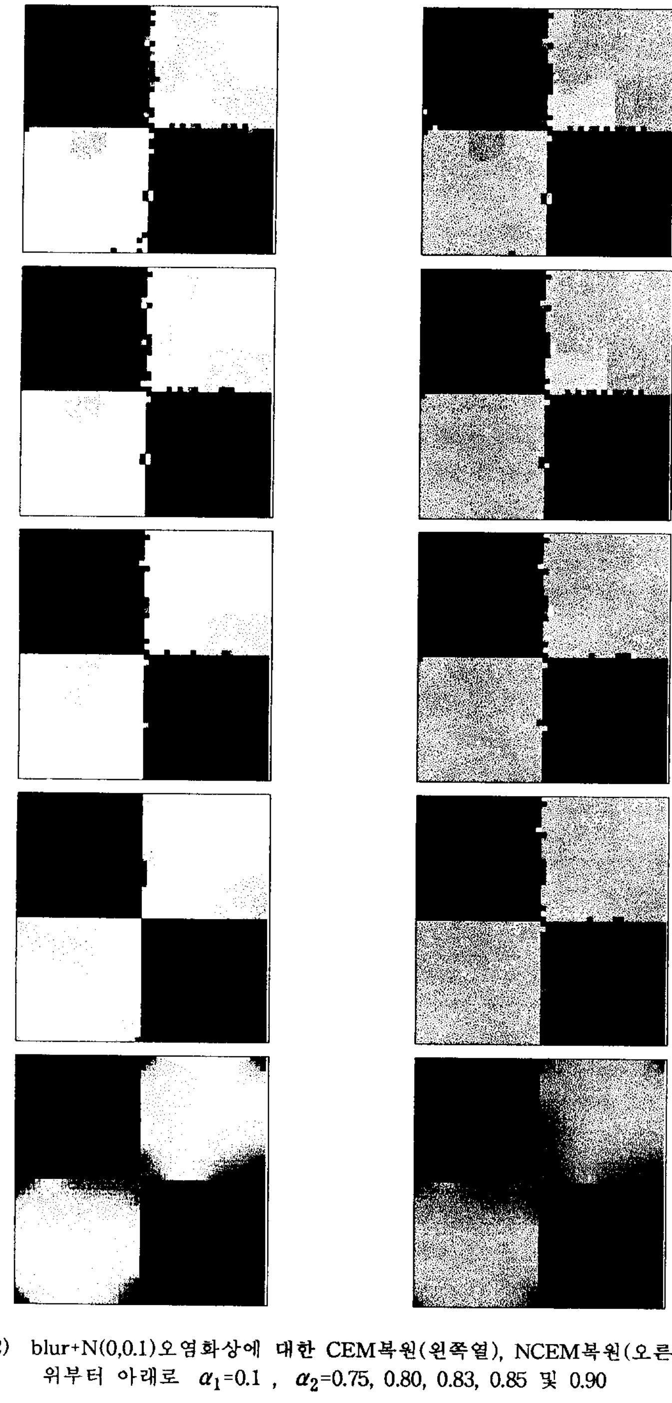
<표 1.1> $\sigma^2 \approx 0.1$ 화상복원 결과: α_1=0.1, α_2=0.85

	σ^2 추정치	각 면에서 $\hat{\theta}$ 평균	
NCEM	0.0433	0.1047	0.8559
		0.8630	0.1411
CEM	0.0849	-0.0155	0.9187
		0.9192	0.0122

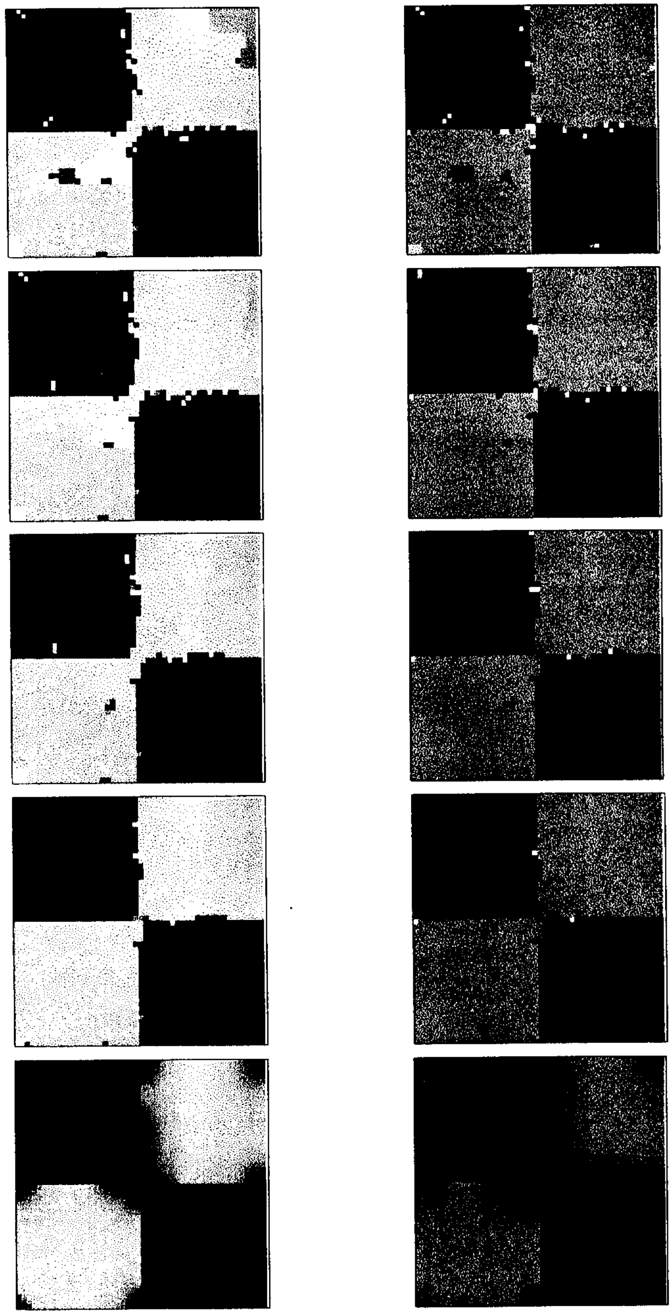
<표 1.2> $\sigma^2 \approx 0.2$ 화상복원 결과: α_1=0.1, α_2=0.85

	σ^2 추정치	각 면에서 $\hat{\theta}$ 평균	
NCEM	0.1029	0.1602	0.8005
		0.8031	0.1552
CEM	0.1832	0.0329	0.9024
		0.9093	0.0198

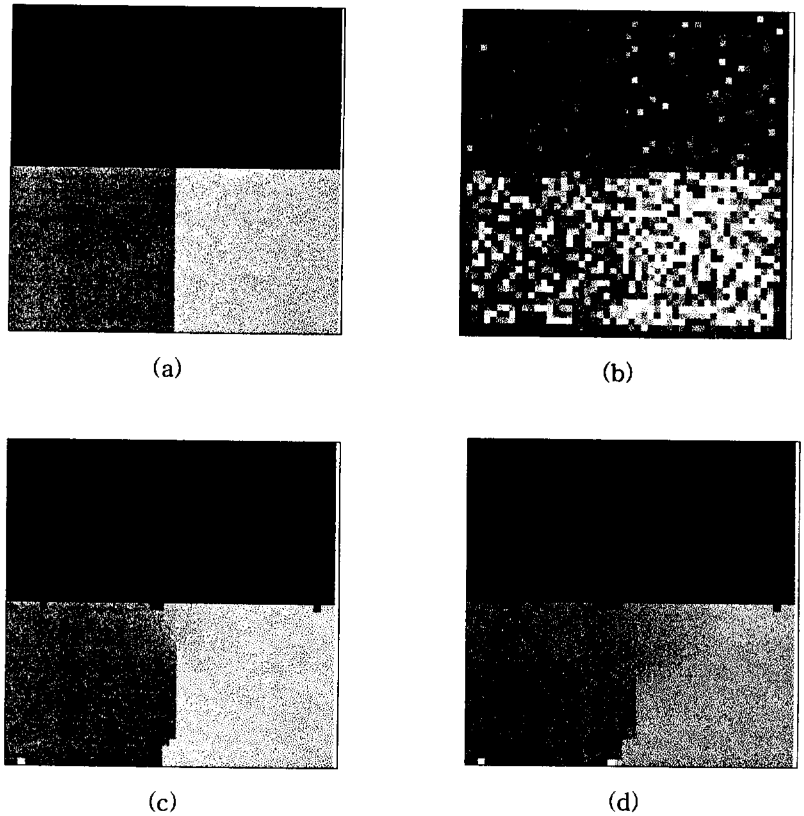
다음은 진화상의 (1)-(4)면의 명암도를 각각 0.14, 0.34, 0.87 및 0.67로 하여, 보다 모호한 경계를 갖는 중도절단화상에 대한 CEM복원의 「에지」-보존 효과를 살펴보았다. 이 화상은 상하 경계 보다는 좌우의 경계가 보다 모호한 화상이다. 이 복원결과는 (그림 4)에 정리하였다. 잡음의 크기($\sigma^2 \approx 0.05$)가 비교적 작아서 NCEM복원화상의 편의는 두드러져 보이지 않지만, CEM복원보다 비교적 좋지않은 「에지」-보존 결과를 보여주고 있다.



(그림 2) blur+N(0,0.1)오염화상에 대한 CEM복원(왼쪽열), NCEM복원(오른쪽열) ;
위부터 아래로 α_1=0.1 , α_2=0.75, 0.80, 0.83, 0.85 및 0.90



(그림 3) blur+N(0,0.2)오염화상에 대한 CEM복원(왼쪽열), NCEM복원(오른쪽열) ;
위부터 아래로 α_1=0.1 , α_2=0.75, 0.80, 0.83, 0.85 및 0.90



(그림 4) α_1=0.1 , α_2=0.85 ; (a) 진화상, (b) blur+N(0,0.05)오염화상, (c) CEM복원화상, (d) NCEM복원화상

4. 결 론

본 연구에서는 EM알고리즘을 이용하여 중도절단된 화상을 복원하는 문제를 다루었다. 만약 중도절단화상을 정상자료로 취급하여 복원할 경우, 이때 복원된 화상은 잡음의 분산이 커짐에 따라 편의가 심해지는 화상을 제공할 뿐만 아니라 「에지」-보존 상태도 좋지 않다. CEM(Censorized EM)복원법이라 칭한 제안된 방법은 중도절단자료에 의한 복원화상의 편의를 보정하며, 잡음의 분산이 지나치게 크지 않다면 잡음의 크기에 관계없이 양질의 복원화상을 제공함을 화상실험을 통해 확인하였다.

본 연구를 통해 얻은 경험에 비추어 몇가지 추가로 연구되어야 할 점을 밝힌다. 첫째로 분산의 초기치 문제이다. CEM복원화상의 「에지」-보존 상태는 분산의 초기치에 다소 민감하다. 결국 본 연구에서는 선행작업으로부터의 분산 추정치를 후속작업의 분산초기치로 사용하였다.

그러나 두 번의 복원작업은 크기가 큰 화상의 경우 작업시간이 부담이 아닐 수 없다. 따라서 분산의 초기치에 크게 영향받지 않는 방법이 연구되어야 하겠다. 둘째로, 식 (1.2)에서 「페널티」 함수 $J(\theta)$를 수식전개의 용이함을 위해 화소값 차의 2차함수로 정의하였으나 좀더 복잡한 초월함수 등으로 정의할 경우 EM알고리즘의 변형인 P.J.Green(1990)의 OSL알고리즘을 사용할 수 있다. 마지막으로 본 연구에서는 단순히 몇 개의 「에지」와 「피크」(peaks)만을 포함하는 단순한 화상을 실험하였으므로 「클릭」(clique)으로 화소의 쌍별-근린만을 사용하여도 무방하였다. 그러나 무수히 많은 「에지」와 「피크」를 포함하는 화상의 경우 클릭에 대한 보다 섬세한 디자인이 필요하다. 이 경우 EM알고리즘보다는 「깁스」추출법(Gibbs sampler)이 훨씬 용이한 방법이다. 따라서 중도절단화상에 대해 이 방법의 연구가 이루어질 수 있을 것이다. 마지막으로, 필연적으로 중도절단이 될 수 밖에 없는 식 (1.1) 혹은 (1.1)′ 대신

$$y_i \sim Beta(\mu_i) \ , \text{ 단, } \ \mu_i = \sum_{j \in B_i} h_{ij}\theta_j$$

즉 평균이 μ_i이고 분산이 $\mu_i(1-\mu_i)$에 비례하는 「베타」-분포에 적합시키는 것이 어쩌면 더 현실적일 수 있다. 이 모형은 관측화상 y_i를 $[0,1]$로 제한하므로써 중도절단을 방지할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] Abdalla, M. and Kay, J. (1990), Edge Preserving Image Restoration, *Stochatic Models, Statistical Methods, and Algorithm in Image Analysis*, P. Barone *et al.*(Eds.), Springer-Verag, 1-13.

[2] Besag, J. E. (1986), On the statistical analysis of dirty pictures(with discussion). *Journal of Royal Statistical Society* B, 259-302.

[3] Green, P.J. (1990), On use of the EM algorithm for penalized likelihood estimation, *Journal of Royal Statistical Society* B, Vol. 52, 443-452.

[4] Jain, A.K. (1989), *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice-Hall.

[5] Maddala, G.S. (1983), *Limited-dependent and qualitative variables in economerics*, Cambridge Uinversity Press.

[6] Tanner, M.A. (1996), *Tools for Statistical Inference*, Methods for the Exploration of Posterior Distributions and Likelihood Functions, third edition, Springer.

부 록

<식 (2.1)과 식 (2.2)에 대한 증명>

$E(x_{ij}|y_i < L_1, \theta^{old})$을 $E(x_{ij}|y_i < L_1)$로 쓰기로 하자.

이때, $f_1(x_{ij}|y_i < L_1) = \int_{-\infty}^{L_1} f_{12}(x_{ij}, y_i)dy_i \Big/ \Phi_1$ 이므로 $E(x_{ij}|y_i < L_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{ij} f_1(x_{ij}|y_i < L_1)dx_i$
$= \int_{-\infty}^{L_1} E(x_{ij}|y_i) f_2(y_i)dy_i \Big/ \Phi_{i1}$.

또한 $E(x_{ij}|y_i) = h_{ij}\theta_j^{old} + p^{-1}(y_i - \sum_k h_{ik}\theta_k^{old})$ 및 $E(y_i|y_i < L_1) = -\sigma\frac{\phi_{i1}}{\Phi_{i1}} + \sum_k h_{ik}\theta_k^{old}$ 이므로, 아래와 같이 식 (2.1)을 얻는다. 즉,
$E(x_{ij}|y_i^c = L_1) = E(x_{ij}|y_i < L_1) = \left\{\theta_j^{old} + \frac{1}{p}\left(E(y_i|y_i < L_1) - \sum_k h_{ik}\theta_k^{old}\right)\right\} = h_{ij}\theta_j^{old} + \frac{1}{p}\left(-\sigma\frac{\phi_{i1}}{\Phi_{i1}}\right)$.
그리고 $-\phi_{i1}/\Phi_{i1}$ 대신 $\phi_{i2}/(1-\Phi_{i2})$을 대체하여 비슷한 방법으로 풀면, $y_i > L_2$ 에 대해 아래와 같이 식 (2.2)를 얻을 수 있다. 즉, $E(x_{ij}|y_i^c = L_2) = E(x_{ij}|y_i > L_2) = h_{ij}\theta_j^{old} + \frac{1}{p}\left(\sigma\frac{\phi_{i2}}{1-\Phi_{i2}}\right)$.

<식 (2.10)과 식 (2.11)에 대한 증명>

$$E\{(x_{ij} - h_{ij}\theta_j)^2|y_i < L_1, \sigma^{2old}\} = \int_{-\infty}^{L_1} E\{(x_{ij} - h_{ij}\theta_j)^2|y_i, \sigma^{2old}\} f_2(y_i)dy_i \Big/ \Phi_{i1}$$
$$= \int_{-\infty}^{L_1}\left\{\left(\frac{\sigma^{2old}}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right) + p^{-2}(y_i - \sum_j h_{ij}\theta_j)^2\right\} f_2(y_i)dy_i \Big/ \Phi_{i1} \qquad \text{(식 (2.8)로부터)}$$
$$= \left(\frac{\sigma^{2old}}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right) + p^{-2}\,Var(y_i|y_i < L_1) + p^{-2}\{E(y_i|y_i < L_1) - \sum_j h_{ij}\theta_j\}^2$$

이 유도된다. 한편
$$E(y_i|y_i < L_1) = -\sigma^{old}\frac{\phi_{i1}}{\Phi_{i1}} + \sum_j h_{ij}\theta_j \quad \text{및} \quad Var(y_i|y_i < L_1) = \sigma^{2old}\left(1 + \frac{\phi_{i1}}{\Phi_{i1}}\left(-\frac{\phi_{i1}}{\Phi_{i1}} - L_{1i}^*\right)\right)$$

이다. (G.S.Maddala, 1983 참조). 따라서

$$E\{(x_{ij} - h_{ij}\theta_j)^2|y_i < L_1, \sigma^{2old}\} = \left(\frac{\sigma^{2old}}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right) + p^{-2}\sigma^{2old}\left(1 - \frac{\phi_{i1}}{\Phi_{i1}}L_{1i}^*\right)$$

이며, $y_i > L_2$ 대해서는 $-\phi_{i1}/\Phi_{i1}$ 과 L_{1i}^* 대신 $\phi_{i2}/(1-\Phi_{i2})$ 와 L_{2i}^*를 각각 대체하여

$$E\{(x_{ij} - h_{ij}\theta_j)^2|y_i > L_2, \sigma^{2old}\} = \left(\frac{\sigma^{2old}}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right) + p^{-2}\sigma^{2old}\left(1 + \frac{\phi_{i2}}{1-\Phi_{i2}}L_{2i}^*\right)$$

Restoration for the Censored Image via EM algorithm

Seung Gu Kim[1)]

Abstract

Although there are many photochemical images of which are censored while they are recorded, normal approaches are often appiled to the restorations for them. In this case, it yields a restored image which might have serious bias. However, solutions for this problem are hardly found in the research of image restorations. This article provides a method of image restoration via EM algorithm for the censored images of which are contaminated with Gaussian noise and blur, also presents some results of simulation for artificial images censorized.

1) Department of Statistics, SangJi university, WonJu, 220-702, Korea